Vorlesungsskript zu Analysis 1

Wintersemester 2000-2001

Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Wittstock

5. Januar 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen und Funktionen

1.1 Reelle Zahlen

Die folgenden Mengen von Zahlen werden als bekannt vorausgesetzt:

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	$= \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	$= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_*$	$= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, p \neq 0,\, q \in \mathbb{N} \right\}$	rationale Zahlen ungleich Null
$\mathbb{Q}^+$	$= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{N}_0,\, q \in \mathbb{N} \right\}$	nichtnegative rationale Zahlen
$\mathbb{Q}^+_*$	$= \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{N},\, q \in \mathbb{N} \right\}$	positive rationale Zahlen

Die Menge der **reellen Zahlen** bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.

Ziel 1.1.1 Wir werden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch ihre Eigenschaften charakterisieren. Diese Eigenschaften lassen sich auf wenige Axiome zurückführen, die in die folgenden Gruppen unterteilt werden:

die Körperaxiome (K1)-(K11),
die Axiome (01)-(03) für die positiven Zahlen,
das archimedische Axiom (A),
das Intervallschachtelungsprinzip (I).

Die reellen Zahlen bilden das Fundament des Gebäudes Analysis, das wir bauen wollen. Für das Fundament geben wir nur die Anforderungen in Form der Axiome an und vertrauen vorerst den Konstrukteuren (Richard Dedekind 1872 und Georg Cantor 1883).

1.1.1 Körperaxiome

Die Menge $\mathbb{R}$ genügt den **Körperaxiomen**:

Definition 1.1.2 (Körperaxiome.) (K1) *Je zwei Elementen a, $b \in \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Element $a + b \in \mathbb{R}$ zugeordnet, das* Summe *von a und b heißt.*

(K2) *Für a, b, $c \in \mathbb{R}$ gilt das* Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(K3) *Es gibt ein Element* $0 \in \mathbb{R}$*, so daß für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$a + 0 = a.$$

(K4) *Zu* $a \in \mathbb{R}$ *gibt es* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $a + x = 0$*.*

(K5) *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt das* Kommutativgesetz

$$a + b = b + a.$$

(K6) *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *ist eindeutig ein Element* $ab \in \mathbb{R}$ *zugeordnet, das* Produkt *von* a *und* b *heißt.*

(K7) *Für* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt das* Assoziativgesetz

$$(ab)c = a(bc).$$

(K8) *Es gibt ein Element* $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, so daß für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$a1 = a.$$

(K9) *Zu* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gibt es* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $ax = 1$*.*

(K10) *Für* $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt das* Kommutativgesetz

$$ab = ba.$$

(K11) *Für* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *gilt das* Distributivgesetz

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Eine Menge mit den Eigenschaften (K1) - (K11) heißt ein Körper.

Außer den reellen Zahlen gibt es noch viele weitere **Körper**, die zum Teil ganz andere Eigenschaften haben:

Beispiele 1.1.3

1. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden einen Körper.
2. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper. In $\mathbb{C}$ gibt es eine Zahl i mit $i^2 = -1$.
3. Die Menge $\mathbb{Z}_2$ bestehend aus den zwei Elementen 0 und 1 und den folgenden Verknüpfungen ist ein Körper:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

In $\mathbb{Z}_2$ gilt $1 = -1$.

Bemerkung 1.1.4

1. Aus den Körperaxiomen folgen alle weiteren bekannten Rechenregeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlen.

2. Die Lösung der Gleichung (K3) $a + x = 0$ ist eindeutig. Wir nennen die Lösung den negativen Wert von a und bezeichnen sie mit $-a$. Differenzen definieren wir wie üblich als $b - a := b + (-a)$.

3. Die Lösung der Gleichung (K9) $ax = 1$ ist eindeutig. Wir nennen die Lösung den Kehrwert von a und bezeichnen sie mit $\frac{1}{a}$. Brüche definieren wir wie üblich $\frac{b}{a} := b\frac{1}{a}$.

4. Wir benutzen die Potenzschreibweise a^n für das n-fache Produkt von a mit sich, setzen $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ und verwenden die bekannten Rechenregeln für ganzzahlige Potenzen. Insbesondere setzen wir $a^0 := 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

1.1.2 Geordnete Körper

Die Menge der **positiven Zahlen** kann wie folgt **axiom**atisch eingeführt werden:

Definition 1.1.5 (Geordneter Körper)

(O1) *Es gibt eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}$, so daß für alle $a \in \mathbb{R}$ genau eine der folgenden drei Möglichkeiten zutrifft:*

$$a = 0, \quad a \in P, \quad -a \in P.$$

(O2) *P ist abgeschlossen unter der Addition, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a + b \in P$.*

(O3) *P ist abgeschlossen unter der Multiplikation, d.h. für $a, b \in P$ gilt $ab \in P$.*

Bezeichnung Wir werden später die Menge der positiven reellen Zahlen mit $\mathbb{R}_*^+$ bezeichnen oder als offenes Intervall $(0, \infty)$ schreiben.

Ein Körper, der die Ordnungsaxiome (O1) - (O3) erfüllt, heißt ein geordneter Körper.

Beispiele und Bemerkungen 1.1.6

1. In einem geordneten Körper ist für alle $a \neq 0$ das Quadrat $a^2 \in P$, speziell ist $1 \in P$. Die Körper $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}_2$ sind also keine geordneten Körper.

2. Aus $a \in P$ folgt $\frac{1}{a} \in P$.

3. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Mit $1 \in P$ ist auch die Summe von n Einsen positiv. Jeder geordnete Körper enthält die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und damit auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und deren Quotienten, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
4. $\mathbb{Z} \cap P = \mathbb{N}$
5. Eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist genau dann in P, wenn $p, q \in \mathbb{N}$. D.h. $P \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_*^+$.

1.1.3 Anordnung

Wir arbeiten im allgemeinen nicht mit den Axiomen (O1)-(O3), sondern mit den entsprechenden Regeln für die Anordnung:

Definition 1.1.7 (Anordnung.) *Wir definieren eine* Anordnung *auf* $\mathbb{R}$ *durch*

$$a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in P$$

und führen die Notation

$$a > b \quad :\Leftrightarrow \quad b < a$$

ein.

Die Anordnung von $\mathbb{R}$ drückt sich geometrisch in der vertrauten Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden aus: Dabei bedeutet $a < b$, daß der Punkt a links vom Punkt b liegt.

Die Addition $x \mapsto x + b$ wird zur Verschiebung (Translation) um die Strecke b und die Multiplikation $x \mapsto xb$ mit einem $b > 0$ zur Streckung um den Faktor b.

Man veranschauliche sich die geometrische Aussage der folgenden Regeln.

Feststellung 1.1.8 (Rechenregeln für Ungleichungen.)

1. $a \in P \Leftrightarrow a > 0$.
2. *Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt genau eine der drei Relationen*

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

3. *Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (**Transitivität** der Anordnung.)*

4.

$$\text{Aus } a < b \text{ folgt } \begin{cases} a + c < b + c & \text{für jedes } c \in \mathbb{R} \\ ac < bc & \text{falls } c > 0 \\ ac > bc & \text{falls } c < 0 \\ \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} & \text{falls } a > 0 \end{cases}$$

---

5. *Man kann Ungleichungen addieren:*

$$\text{Aus } a < b \text{ und } c < d \text{ folgt } a + c < b + d.$$

6. *Ungleichungen zwischen positiven Zahlen kann man multiplizieren:*

$$\text{Aus } 0 < a < b \text{ und } 0 < c < d \text{ folgt } ac < bd.$$

7. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a$, $0 < b$. Dann gilt*

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^n < b^n.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [Königsberger, S. 8].

Bezeichnung 1.1.9 Wir führen eine abkürzende Bezeichnung ein:

$$b \leq a \quad :\Leftrightarrow \quad b < a \text{ oder } b = a$$

und entsprechend

$$a \geq b \quad :\Leftrightarrow \quad b \leq a.$$

Bemerkung 1.1.10 (zur Relation $\leq$)

1. Für beliebige reelle Zahlen a, b ist

$$\text{entweder} \quad a \leq b \quad \text{oder} \quad a > b.$$

2. Die Aussage $a \leq b$ ist die Negation der Aussage $b < a$.

   Man kann eine Aussage $a \leq b$ beweisen, indem man den die Annahme $b < a$ zu einem Widerspruch führt

3. Aus $a \leq b$ und $b \geq a$ folgt $a = b$ **(Antisymmetrie)**.

   Diese Schlußweise wird häufig benutzt, um komplizieretere Identitäten zu beweisen, die man nicht durch durch einfaches Anwenden von Formeln erhalten kann.

---

4. Wenn

   $$a \leq b + \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

   gilt, dann ist

   $$a \leq b.$$

   Wenn man den Punkt b ein wenig nach rechts rückt, läßt sich die Abschätzung oft leichter zeigen

---

1.1.4 Minimum und Maximum

Definition 1.1.11 (Minimum und Maximum.)
Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

1. *Eine Zahl $a \in M$ heißt* ***Minimum*** *von M, falls für alle $x \in M$ gilt: $a \leq x$. Man bezeichnet das Minimum von M mit $\min M$.*

2. *Eine Zahl $b \in M$ heißt* ***Maximum*** *von M, falls für alle $x \in M$ gilt: $x \leq b$. Man bezeichnet das Maximum von M mit $\max M$.*

Bemerkung 1.1.12 (Minimum und Maximum)

1. Sind a_1 und a_2 Minima von M so ist $a_1 = a_2$.

   Ebenso sind Maxima eindeutig bestimmt.

2. Wenn M ein Minimum hat, so ist $\min M$ das **kleinste** Element von M.

   Wenn M ein Maximum hat so ist $\max M$ das **größte** Element von M.

Beispiele 1.1.13 (Minimum und Maximum)

1. $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ besitzt kein Minimum und kein Maximum.

2. Für $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ gilt

   $$\min J = 0 \quad \text{und} \quad \max J = 1.$$

3. Die Mengen $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ haben kein Maximum. Es ist $\min \mathbb{N} = 1$.

4. M habe ein Minimum. Dann hat die Menge
$$-M := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$$
ein Maximum und es gilt
$$\max(-M) = -\min M$$

1.1.5 Betrag

Definition 1.1.14 (Betrag.) *Der* Betrag *einer reellen Zahl a wird definiert durch*
$$|a| := \begin{cases} a & \textit{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \textit{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

Bemerkung 1.1.15 1. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt
$$|a| = \max\{a, -a\}$$

2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
$$|a| \leq |b| \quad \Leftrightarrow \quad -|b| \leq a \leq |b|$$

3. Für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$$a < x < b \text{ und } a < y < b \quad \Rightarrow \quad |x - y| < |b - a| = b - a.$$

Bei der Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden mißt $|a|$ den Abstand des Punktes a zum Nullpunkt und $|a - b|$ mißt den Abstand der Punkte a und b.

Viele Rechnungen mit Beträgen beruhen nur auf dem Abstandsbegriff und benutzen nicht die Definition des Betrages.

Rechnungen, die auf den folgenden Regeln für einen Betrag beruhen, lassen sich problemlos auf den Abstand komplexer Zahlen und weitere Abstandsbegriffe übertragen.

Satz 1.1.16 (Rechenregeln für den Betrag.) *Für a, $b \in \mathbb{R}$ gelten:*

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3. $|ab| = |a||b|$
4. $|a+b| \le |a| + |b|$ ***(Dreiecksungleichung)***

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [Kaballo, S. 9].

Korollar 1.1.17 *Für a, $b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$||a| - |b|| \le |a-b|.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [Kaballo, S. 9].

Beispiele 1.1.18 .

Für die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad |x-3||x+3| < 16\}$$

gilt

$$x \in M \quad \Leftrightarrow \quad -5 < x < 5.$$

1.2 Vollständige Induktion

1.2.1 Summen und Produktzeichen

Summen von endlich vielen reellen Zahlen nennt man im Unterschied zu den noch zu behandelnden unendlichen Reihen auch endliche Summen oder endliche Reihen.

Summen werden mit Hilfe des Summenzeichens abgekürzt:

Bezeichnung 1.2.1 (Summenzeichen) 1. Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m < n$. Wir schreiben die Summe der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit dem Summenzeichen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

2. Man nennt

m	*untere Summationsgrenze*
n	*obere Summationsgrenze*,
k	*Laufindex* oder *Summationsindex*,
a_k	*Summand.*

Die Anzahl der Summanden ist $n - m + 1$.

---

3. Eine formale Erweiterung des Summenzeichens ist die **leere Summe**: Eine Summe bei der der obere Summationsindex kleiner als der untere Summationsindex ist, heißt leere Summe. Die leere Summen wird als 0 definiert.

Bei der leeren Summe wird nichts addiert, die formalen Summanden müssen nicht einmal definiert sein.

Ein Beispiel einer leeren Summe ist

$$0 = \sum_{k=10}^{1} k \neq 10 + 9 + \cdots + 1.$$

Beispiele 1.2.2 (Summenzeichen)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} x^k &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{(geometrische Reihe)},\\
\sum_{k=0}^{10} 2^{-k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1024},\\
\sum_{k=-m}^{n} c_k 10^k & \quad \text{wobei } c_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{(Dezimalzahl)}\\
\sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n \quad \text{(Polynom vom Grad } n\text{)},\\
\sum_{k=m}^{m-1} a_k &= 0 \quad \text{(leere Summe)}
\end{aligned}$$

Feststellung 1.2.3 (Rechenregeln für endliche Summen)

1. *Auf die Bezeichnung des Index kommt es nicht an:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j.$$

2. *Verschiebung des Laufindex:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+l}^{n+l} a_{j-l}.$$

Die Summationsgrenzen müssen entgegengesetzt verschoben werden.

---

3. *Das* ***Assoziativgesetz*** *gilt: Wenn $l, m, n \in \mathbb{Z}$ und $l < m < n$ ist so gilt*

$$\sum_{k=l}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_k.$$

Beachte, das Summenzeichen bindet stärker als das '+'-Zeichen.

---

4. *Das* ***Kommutativgesetz*** *gilt: Bei einer Umordnung (Permutation) der Summanden ändert sich der Wert der Summe nicht.*

5. Beispiel: *umgekehrte Reihenfolge der Summanden:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n+m-k}.$$

6. Beispiel: *Summen mit gleichen Summationsgrenzen kann man unter einem Summenzeichen zusammenfassen:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k).$$

---

7. Beispiel: *Bei* ***Doppelsummen*** *kann man die Summationsreihenfolge vertauschen:*

$$\sum_{k=m}^{n} \sum_{l=p}^{q} a_{kl} = \sum_{l=p}^{q} \sum_{k=m}^{n} a_{kl}.$$

Man ordne die Summanden in einem Rechteck an:

$$\boxed{\begin{array}{llll} a_{m,p} & a_{m,p+1} & \dots & a_{m,q} \\ a_{m+1,p} & a_{m+1,p+1} & \dots & a_{m+1,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,p} & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,q}. \end{array}}$$

Man kann nun entweder zuerst die Zeilensummen bilden und diese aufaddieren oder mit den Spaltensummen beginnen. Auf beiden Wegen erhält man die Summe aller Einträge.

---

8. *Das* ***Distributivgesetz*** *gilt:*

$$c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c\, a_k.$$

9. Beispiel: *Für das Produkt zweier Summen gilt:*

$$\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\sum_{l=p}^{q} b_l\right) = \sum_{k=m}^{n}\sum_{l=p}^{q} a_k b_l.$$

Man kann also auf die Klammern auf der linken Seite verzichten.

Produkte werden mit Hilfe des Produktzeichens abgekürzt:

Bezeichnung 1.2.4 (Produktzeichen)

1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$. Wir schreiben das Produkt der Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit dem Produktzeichen:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

2. Ein Produktzeichen, bei dem die obere Grenze kleiner als die untere Grenze ist, heißt *leeres Produkt.* Das leere Produkt wird als 1 definiert.

Bemerkungen und Beispiele 1.2.5 (Produktzeichen)

1. Auf die Bezeichnung des Index kommt es nicht an; es ist:

$$\prod_{k=n}^{m} a_k = \prod_{j=n}^{m} a_j$$

2. Der Laufindex läßt sich transformieren:

$$\prod_{k=n}^{m} a_k = \prod_{j=n+l}^{m+l} a_{j-l}.$$

Die Grenzen müssen entsprechend transformiert werden.

3. Das Produkt ist assoziativ und die Reihenfolge der Faktoren kann beliebig permutiert werden.

---

4. Beispiel eines leeren Produktes:

$$\prod_{j=n+1}^{n} a_j = 1.$$

5. Für $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} a = a^n.$$

   Für $n < 0$ stimmt dies nicht!

6. Das Produkt der Zahlen $1, 2, \ldots, n \in \mathbb{N}$ nennt man Fakultät von n und bezeichnet es mit $n!$. Man setzt $0! := 1$. Sprich: n-Fakultät.

   Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

1.2.2 Induktionsprinzip

Wir setzen weiterhin die natürlichen Zahlen als bekannt voraus, wollen aber ihre Eigenschafter etwas formaler beschreiben. Das kann auf verschieden Weisen geschehen.

Üblich ist das folgende Axiomensystem **(Peano Axiome)**, das wir hier nur umgangssprachlich formulieren.

Die Axiome präzisieren den Vorgang des Zählens:

- Es gibt eine natürliche Zahl 1.
- Auf jede natürliche Zahl n folgt eine nächste, die man mit $n+1$ bezeichnet.
- Man kann beim Zählen nicht mehrmals auf dieselbe Zahl stoßen. D.h. wenn zwei natürliche Zahlen m, n denselben Nachfolger haben, sind sie gleich:

$$m + 1 = n + 1 \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

- Man kommt beim Zählen nicht zurück zur 1. D.h. für alle natürlichen Zahlen n gil:

$$n + 1 \neq 1$$

- Man erreicht durch Zählen, ausgehend von der 1, alle natürlichen Zahlen.

Die zuletzt genannte Eigenschaft heißt das **Induktionsprinzip**. Wir formulieren es in der Sprache der Mengenlehre.

Feststellung 1.2.6 (Induktionsprinzip) *Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein Teilmenge der natürlichen Zahlen mit den Eigenschaften*

a) $1 \in M$

b) $n \in M \quad \Rightarrow \quad n+1 \in M$

Dann folgt schon $M = \mathbb{N}$

In den Anwendungen hat man eine Aussage $A(n)$ über eine natürliche Zahlen n. Die Aussage sei für alle natürlichen Zahlen formulierbar. Man möchte die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ beweisen.

Dazu bilde man die Menge

$$M := \{n \mid n \in \mathbb{N},\ A(n) \text{ ist richtig für } n\}$$

und zeige mit Hilfe des Induktionsprinzips, daß $M = \mathbb{N}$ ist.

Dazu muß man für M die Eigenschaften a) und b) nachweisen. Man kommt so zu dem folgendem Beweisprinzip:

Feststellung 1.2.7 (Vollständige Induktion)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte:

Induktionsanfang: *$A(1)$ ist richtig .*

Induktionsschritt: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt der Schluß:*

$$A(n) \quad \Rightarrow \quad A(n+1).$$

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [Kaballo, S. 13].

Beispiele 1.2.8 (Induktionsbeweise) .

1. Dreiecksungleichung für endliche Reihen:
$$|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

2. Summenformel der geometrischen Reihe:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{für } x \neq 1 \\ n+1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

3. Zweite binomische Formel:

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k = x^{n+1} - y^{n+1}.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [Kaballo, S. 14].

1.2.3 Varianten des Induktionsprinzips

Anmerkung. Aus den Peano-Axiomen folgen alle weiteren Eigenschaften der natürlichen Zahlen; insbesondere:

- Die natürlichen Zahlen haben eine Anordnung (totale Ordnung).
- Die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen ergibt wieder natürliche Zahlen.

Die Herleitung dieser Aussagen erfolgt in einer langen Kette an sich einfacher Induktionsbeweise, die man aber in der richtigen Reihenfolge durchführen muß (siehe [Landau]).

Wir verwenden diese Regeln im folgenden kommentarlos.

Anmerkung. Darüber hinaus kann man zeigen:

> Jeder geordnete Körper, insbesondere $\mathbb{R}$, enthält die natürlichen Zahlen.

Letzteres kann man auch zur Definition der natürlichen Zahlen erheben.

In einem *strengen axiomatischen Aufbau* führe man zunächst die reellen Zahlen mit den folgenden Axiomen ein:

> Körperaxiome (K1)-(K11), Ordnung (O1)-(O3) und die Supremumseigenschaft (S)

Anschließend kann man die natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ definieren und das Induktionsprinzip beweisen:

> $\mathbb{N}$ *ist der Durchschnitt aller Teilmengen* $M \subset \mathbb{R}$*, die die folgenden beiden Eigenschaften haben:*
>
> $1 \in M$.
>
> *Aus* $n \in M$ *folgt* $n+1 \in M$.
>
> *Es gibt solche Mengen* M*, z. B.* $\mathbb{R}$ *selber. Also ist* $\mathbb{N}$ *wohldefiniert und erfüllt das Induktionsprinzip.*

Manchmal ist es praktischer, eine Aussage nicht für die natürlichen Zahlen, sondern für alle ganzen Zahlen ab einem $n_0 \in \mathbb{Z}$ zu formulieren:

Feststellung 1.2.9 (Vollständige Induktion ab n_0)
Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte:

Induktionsanfang: $A(n_0)$ *ist richtig .*

Induktionsschritt: *Für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ gilt der Schluß:*

$$A(n) \quad \Rightarrow \quad A(n+1).$$

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ richtig.

Manchmal ist es hilfreich, statt der Aussage $A(n)$ die folgende Aussage zu beweisen:

$$B(n) \quad :\Leftrightarrow \quad A(1) \text{ und } \dots \text{ und } A(n).$$

Beim Induktionschluß $B(n) \Rightarrow B(n+1)$ hat man stärkere Vorraussetzungen, muß aber nur $A(n+1)$ zeigen:

Feststellung 1.2.10 (Schluß $1, \dots, n \Rightarrow n+1$)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte:

Induktionsanfang: $A(1)$ *ist richtig .*

Induktionsschritt: *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt der Schluß:*

$$A(1) \text{ und } \dots \text{ und } A(n) \quad \Rightarrow A(n+1).$$

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Bezeichnung ($\{1, \dots, n\}$)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben zur Abkürzung:

$$\{1, \dots, n\} := \{k \mid k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n\}.$$

Anmerkung. Manchmal schreibt man auch suggestiver

$$\{1, 2, \dots, n\} := \{1, \dots, n\}.$$

Man beachte aber, daß im Falle $n = 1$ dann $2 \notin \{1, 2, \dots, n\}$ ist!.

Eine äquivalente Formulierung des Induktionsprinzip ist:

Feststellung 1.2.11 ($\{1, \dots, n\} \subset M \Rightarrow n+1 \in M$)
Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein Menge mit den Eigenschaften

Induktionsanfang: $1 \in M$

Induktionsschritt: $\{1, \cdots n\} \subseteq M \quad \Rightarrow \quad n+1 \in M$

Dann folgt $M = \mathbb{N}$.

Man benutzt das Induktionsprinzip bei der **rekursiven Definition** einer Funktion f, die für alle natürlichen Zahlen erklärt werden soll:

Feststellung 1.2.12 (rekursive Definition)

Anfangswert: *Man gebe den Wert* $f(1)$ *an.*

Rekursion: *Man gebe eine Vorschrift an, wie aus den Werten* $f(1), \ldots, f(n)$ *der Wert* $f(n+1)$ *zu bilden ist.*

Dann ist f *auf ganz* $\mathbb{N}$ *erklärt.*

Bemerkung. 1. Manchmal beginnt die rekursive Definition auch mit einem Anfangswert $f(n_0)$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$.

2. Die Herleitung des Rekursionsprinzips aus dem Induktionsprinzip ist nicht so einfach (vgl. [van der Waerden]).

1.2.4 Fakultät, Binomialkoeffizient

Beispiele 1.2.13 (Rekursive Definition der Fakultät)
Man setze

$$0! := 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze man

$$(n+1)! := n!\,(n+1).$$

Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Satz 1.2.14 (Anzahl der Permutationen)
Es ist $n!$ *die Anzahl der möglichen Anordnungen (**Permutationen**) einer Menge aus* n *Elementen.*

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 15].

Definition 1.2.15 *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ bezeichnet der* ***Binomialkoeffizient*** $\binom{n}{k}$ *die Anzahl der möglichen Auswahlen von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen.*

Anmerkung: *Es ist* $\binom{n}{0} := 1$.

Lemma 1.2.16 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0 \ldots n+1\}$ gilt:*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 16].

Aus diesem Lemma erhalten wir das **Pascalsche Dreieck**:

n=0					1				
n=1				1		1			
n=2			1		2		1		
n=3		1		3		3		1	
n=4	1		4		6		4		1

Jede Zahl ist die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen.

Satz 1.2.17 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 15].

Satz 1.2.18 (Binomischer Satz) *Für $n \in \mathbb{N}$ und x, $y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 17].

Anmerkung. Man vergleiche die ähnliche zweite binomische Formel 1.2.8 (3)

1.2.5 Wohlordnung der natürlichen Zahlen

Satz 1.2.19 (Minimum und Maximum)
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \{1, \ldots, n\}$ hat ein Minimum und ein Maximum.

Beweis (Minimum und Maximum).

$\boxed{\textbf{Minimum:}}$ Beweis durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{n = 1\textbf{:}}$ $\quad \emptyset \neq M \subset \{1\} \quad \Rightarrow \quad \min M = 1$

$\boxed{n \Rightarrow n+1\textbf{:}}$ Wenn $M = \{n+1\}$ so ist $\min M = n+1$, anderenfalls ist

$$\min M = \min(M \cap \{1, \ldots, n\}).$$

$\boxed{\textbf{Maximum:}}$ Beweis durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{n = 1\textbf{:}}$ $\quad \emptyset \neq M \subset \{1\} \quad \Rightarrow \quad \max M = 1$

$\boxed{n \Rightarrow n+1\textbf{:}}$ Wenn $n+1 \in M$ so ist $\max M = n+1$, anderenfalls ist

$$\max M = \max(M \cap \{1, \ldots, n\}).$$

Satz 1.2.20 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen)
Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein Minimum.

Beweis (Wohlordnung der natürlichen Zahlen).
Es gibt ein $n_0 \in M$. Dann hat nach Satz 1.2.19 die Menge $M \cap \{1, \ldots, n_0\}$ ein Minimum und es gilt:

$$\min M = \min(M \cap \{1, \ldots, n_0\}).$$

1.3 Abbildungen

1.3.1 Abbildungsbegriff

Definition 1.3.1 (Anschauliche Definition: Abbildung) *Es seien zwei Mengen M, N gegeben. Unter einer Abbildung f von M nach N verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y = f(x) \in N$ zuordnet.*

Bemerkung 1.3.2 (zur Definition einer Abbildung)

Hier wird der Begriff *Abbildung* durch den ebenfalls undefinierten Begriff *Vorschrift* erklärt. Wir werden unten (siehe 1.3.10) den Abbildungsbegriff mit Hilfe der Mengenlehre präzisieren.

Bezeichnung 1.3.3 (Definitions-, Zielbereich)

1. M heißt der **Definitionsbereich** der Abbildung f. Wir bezeichnen den Definitionsbereich mit $D(f) := M$.

2. N heißt der **Zielbereich** von f. Wir bezeichnen den Zielbereich mit $Z(f) := N$. Statt Zielbereich sagt man auch Wertevorrat von f. (vgl. die Anmerkung zu 1.3.11)

3. Wenn $y = f(x)$ ist, so heißt y der **Wert** der Abbildung f an der Stelle x oder auch das Bild von x unter der Abbildung f.

4. In dem Ausdruck $f(x)$ nennen wir x das **Argument** der Abbildung f. Um zu betonen, daß in einer Aussage über $f(x)$ das Argument x beliebig in M gewählt werden darf, sprechen wir von der **Variablen** x.

Definition 1.3.4 (Gleichheit von Abbildungen)

1. *Das Symbol f für eine Abbildung beinhaltet die Abbildungsvorschrift, den Definitionsbereich $D(f)$ und den Zielbereich $Z(f)$.*

2. *Zwei Abbildungen f, g werden nur dann als **gleich** betrachtet, wenn sowohl ihre Definitionsbereiche als auch ihre Zielbereiche übereinstimmen:*

$$D(f) = D(g), \quad Z(f) = Z(g)$$

und wenn für alle x im Definitionsbereich die Werte übereinstimmen:

$$f(x) = g(x).$$

Bezeichnung 1.3.5 (Abbildungen)

1. Kurzschreibweisen um Namen, Definitionsbereich und Zielbereich einer Abbildung zu benennen:

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ M &\xrightarrow{f} N \\ M \ni x &\overset{f}{\mapsto} y \in N \\ x &\overset{f}{\mapsto} y \end{aligned}$$

   Statt des Wertes y kann auch eine *Formel* oder $y =$ *Formel* stehen.

   Man beachte die Form des Pfeiles in letzten beiden Zeilen!

---

2. Bei Angabe einer *Formel* vergibt man häufig kein Namenssymbol für die Funktion:

$$M \ni x \mapsto \mathit{Formel}$$

3. Wenn eine Funktion f innerhalb einer umfangreichen Formel vorkommt, schreibt man manchmal

$$f(\cdot)$$

   statt f. Man sieht dann leichter, wo die Variable einzusetzen ist. Es gilt $f(\cdot) := f$.

4. Die Klammern um das Argument können auch entfallen, wenn dadurch keine Mißverständnisse entstehen können. Beispiele:

$$\log x, \ \sin x, \quad \text{lineare Abbildung } \Phi\, x.$$

Anmerkung: (unabhängige und abhängige Variable)

Wenn klar ist, welche Funktion gemeint ist, findet man in Physikbüchern die Kurzschreibweise $y = y(x)$. Man nennt x die **unabhängige Variable** und y die **abhängige Variable**.

Physikalische Größen werden mit einem feststehenden Buchstaben bezeichnet. Wenn eine Größe von einer anderen abhängt, wird ihr Buchstabe auch für das Abbildungssysmbol verwendet. Z.B.:

v	Geschwindigkeit
t	Zeit
$v(t)$	Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Beispiele 1.3.6 (identische und konstante Abbildung)

a) Für $N = M$ erklären wir die identische Abbildung:

$$\begin{aligned} id = id_M : M &\to M \\ id_M(x) &= x \quad \text{für } x \in M. \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiel:

$$f = id_M \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x \quad \text{für alle } x \in M.$$

Häufig läßt man bei der identischen Abbildung das Funktionssymbol weg und schreibt nur x.

---

b) Für festes $c \in N$ wird eine **konstante Abbildung**

$$\begin{aligned} c : M &\to N, \\ c(x) &:= c \quad \text{für } x \in M \end{aligned}$$

definiert.

Das Zeichen c steht also sowohl für das Element in N wie auch für den Namen der konstanten Funktion. Strenggenommen müßten wir hierfür unterschiedliche Symbole verwenden.

Beispiele 1.3.7 (Funktionen)
Abbildungen in die Zahlen heißen auch **Funktionen**.

d) Für $M = N := \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ wird durch $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, eine **affine Funktion**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definiert.

In Rechnungen spart man sich häufig den Funktionsnamen und spricht von der affinen Funktion $ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Es sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Man definiert die **Potenzfunktion** zur Potenz n:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n$$

e) Es seien $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Man erklärt ein **Polynom** P durch:

$$\begin{aligned} P &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ P(x) &:= \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \end{aligned}$$

Die Zahlen $c_0, \ldots, c_n$ heißen die Koeffizienten des Polynoms.

1.3.2 Graphen

Definition 1.3.8 (Kartesisches Produkt)
Für Mengen M, N bezeichnet

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M,\, y \in N\}$$

*das **kartesische Produkt** von M und N, d.h. die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$.*

Der Name *kartesisches Produkt* erinnert an **René Descartes** (1596-1650), den Begründer der *analytischen Geometrie*.

Beispiel: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ können wir durch eine Ebene veranschaulichen. Man zeichne in der Ebene zwei Koordinatenachsen. Jedem Punkt P ist dann durch seine Koordinaten x und y auf den Achsen eindeutig bestimmt. Die Punkte der Ebenen entsprechen so eineindeutig den Koordinaten-Paaren $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.3.9 (Graph einer Abbildung)
Eine Abbildung $f : M \to N$ wird durch ihren **Graphen**

$$\begin{aligned} \Gamma(f) &:= \{(x, y) \mid x \in M,\, y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N \end{aligned}$$

eindeutig festgelegt. Dieser hat offensichtlich die Eigenschaft:

$$\forall x \in M \quad \exists_1 y \in N \quad : \quad (x, y) \in \Gamma(f).$$

In Worten: Für alle $x \in M$ gibt es **genau ein** $y \in N$, so daß $(x, y) \in \Gamma(f)$ ist.

Umgekehrt ist die Abbildung f durch ihren Graphen eindeutig festgelegt:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \Gamma(f).$$

Anmerkung: Etwas präziser sollte man zuerst Graphen einführen und dann die Definition 1.3.1 einer Abbildung nicht als *Definition* sondern *Vereinbarung* einer (praktischeren) Schreibweise betrachten.

Definition 1.3.10 (Graphen)
Ein Graph Γ mit Definitionsbereich M und Zielbereich N ist eine Teilmenge

$$\Gamma \subseteq M \times N,$$

für die gilt:

$$\forall x \in M \quad \exists_1 y \in N \ : \ (x, y) \in \Gamma.$$

Anmerkung: (alternative Definition von Abbildungen)
Es sei $\Gamma \subset M \times N$ ein Graph.

- Man vereinbart dann die Abbildungsbezeichnung $f = f_\Gamma : M \to N$ und erklärt:

$$y = f(x) : \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \Gamma.$$

- In dieser alternativen Definition sind eine Abbildung und ihr Graph dasselbe Objekt.
- Im folgenden wird die mehr intuitive Vorstellung von Abbildungen im Sinne der Definition 1.3.1 beibehalten und die Graphen als die daraus abgeleiteten Objekte angesehen.

1.3.3 Umkehrabbildung

Definition 1.3.11 (Bild und Urbild) .
Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

1. *Für $A \subseteq M$ erklären wir durch*

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

*das **Bild von A**. Es ist $f(A) \subset Z(f) = N$.*

2. *Für $B \subseteq N$ erklären wir durch*

$$f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$$

*das **Urbild von B**. Es ist $f^{-1}(B) \subset D(f) = M$.*

Anmerkung. Man unterscheide $\text{Bild}(f) := f(M)$ und den Zielbereich $Z(f)$ einer Abbildung.

Definition 1.3.12 (injektiv, surjektiv,bijektiv)
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

1. ***injektiv**, falls für alle $x, x' \in M$ gilt:*

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$

2. ***surjektiv**, falls es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ so gibt, daß $y = f(x)$ ist.*
3. ***bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.*

Anmerkung: Für eine Abbildung $f : M \to N$ gilt:

$$f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f(M) = N.$$

Feststellung 1.3.13 (bijektive Abbildungen)
Es sei $f : M \to N$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist bijektiv*
2. *Zu jedem $y \in N$ **gibt es genau ein** $x \in M$, so daß $y = f(x)$ ist.*

Man sagt, x ist die eindeutige Lösung der Gleichung $f(x) = y$.

Definition 1.3.14 (Umkehrabbildung)
*Es sei $f : M \to N$ eine **bijektive** Abbildung. Die **Umkehrabbildung***

$$f^{-1} : N \to M$$

wird für alle $y \in N$ definiert durch:

$$f^{-1}(y) = x : \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \ .$$

1.3.4 Komposition von Abbildungen

Wenn der Zielbereich einer Abbildung f im Definitionsbereich einer weiteren Abbildung g enthalten ist, können wir die beiden Abbildungen nacheinander ausführen:

Definition 1.3.15 (Komposition)
*Für Abbildungen $f : M \to N$, $g : N \to L$ definiert man die **Komposition***

$$g \circ f : M \to L$$

durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

für alle $x \in M$.

Anmerkung

1. Sprich g nach f für die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f$.
2. Statt Komposition sagt man auch **Zusammensetzung**, **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung**.
3. Die Komposition bindet stärker als das Argument:
$$g \circ f(x) = (g \circ f)(x) \ .$$
Um Mißverständnisse zu vermeiden, sollte man die Klammern aber setzen.
4. In längeren Formeln schreibt man statt $g \circ f$ auch
$$g(f) \quad \text{oder} \quad g(f(\cdot)) \ .$$
5. Man kann die Komposition auch anschaulicher als Diagramm schreiben:
$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \ .$$

Beispiel.
Auch wenn $M = N$ ist, so ist im allgemeinen $g \circ f \neq f \circ g$. Z.B.:

$$\mathbb{R} \ni x \overset{f}{\mapsto} |x|$$
$$\mathbb{R} \ni x \overset{g}{\mapsto} -x.$$

Dann ist $(g \circ f)(x) = -|x|$ und $(f \circ g)(x) = |x|$.

Feststellung 1.3.16 (Assoziativgesetz der Komposition) *Für*

$$f : M \to N, \quad g : N \to L, \quad h : L \to K$$

gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \ .$$

Man kann also kurz $h \circ g \circ f$ schreiben.

Wir veranschaulichen das Resultat als kommutierendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g \circ f} & L \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ N & \xrightarrow[h \circ g]{} & K \end{array}$$

Feststellung 1.3.17 (Umkehrabbildung)
Eine Abbildung

$$f : M \to N$$

ist genau dann ***bijektiv****, wenn eine Abbildung*

$$g : N \to M$$

so existiert, daß

$$g \circ f = id_M \quad \textit{und} \quad f \circ g = id_N \ .$$

Dann ist $g = f^{-1}$.

Als kommutatives Diagramm sieht das so aus:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & M \\ N \arrow[r, equal] & N \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

1.3.5 Endliche Mengen

Bemerkung 1.3.18 (Mengen $\{1, 2, \ldots, n\}$)

1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$.
   a) Es gibt keine injektive Abbildung $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$.
   b) Es gibt keine surjektive Abbildung $\{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.
2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Abbildung

   $$f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

   gilt:

   $$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv.}$$

3. Eine bijektive Abbildung

   $$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

   heißt eine **Permutationen** der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Bemerkung 1.3.19
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset \{1, \ldots, n\}$ eine nichtleeren Teilmenge.

1. Es gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, und eine bijektive Abbildung
$$f : \{1, \ldots, m\} \to M.$$
2. $M \neq \{1, \ldots, n\} \quad \Leftrightarrow \quad m < n.$

Bemerkung 1.3.20 (endliche Mengen)

1. Eine Menge A heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung
$$a : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$$
gibt oder $A = \emptyset$ ist.

   Man schreibt dann die Werte in der Form a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, und kürzt den Sachverhalt folgendermaßen ab:
$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \\ &= \{a_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

---

2. Zu einer endlichen Menge A gibt es immer eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung (**Aufzählung**)
$$a : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$$
Die Zahl n heißt die Anzahl der Elemente von A oder die **Mächtigkeit** von A.

   Auf Grund von Bemerkung 1.3.18 ist die Mächtigkeit einer endlichen Menge wohldefiniert.
3. Es kommt auf die Reihenfolge der Aufzählung nicht an.

   Hat man eine andere Aufzählung, so gibt es eine Permutation σ von $\{1, 2, \ldots, n\}$, so daß die andere Aufzählung die Form
$$k \mapsto a_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \ldots n,$$
hat:
$$A = \{a_1, \ldots, a_n\} = \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\}.$$

---

4. Auf Grund von Bemerkung 1.3.19 ist eine Teilmenge M einer endlichen Menge A endlich.

   Wenn die Teilmenge $M \neq A$ ist, so ist die Mächtigkeit von M kleiner als die Mächtigkeit von A.

5. Es sei A eine endliche Menge und $f : A \to A$. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} .$$

Feststellung 1.3.21 (Maximum endliche Menge) *Jede endliche Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ hat ein Maximum.*

Beweis. Zum Begriff der endlichen Menge vgl. Bemerkung 1.3.20. Wir zeigen die folgende Behauptung durch vollständige Induktion:

Eine Teilmenge $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}$, hat ein Maximum.

$\boxed{n = 1\text{:}}$ $M = \{x_1\}$ und $\max M = x_1$.

$\boxed{n \Rightarrow n + 1\text{:}}$ $M = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} = \{x_1 \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}$. Also ist

$$\max M = \max\{\{x_1, \ldots, x_n\},\, x_{n+1}\}.$$

1.3.6 Karthesisches Produkt

Wir verallgemeinern die Definition 1.3.8 und erklären das Karthesische Produkt von endlich vielen Mengen:

Definition 1.3.22 (Kartesisches Produkt $\prod_{k=1}^{n} A_k$)
Sind die Mengen $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ nicht leere Mengen, dann heißt die Menge

$$A_1 \times \cdots \times A_n \quad := \quad \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

*das **kartesische Produkt** der Mengen $A_1, \ldots, A_n$.*

Anmerkung:

1. Man erklärt das Produktzeichen für Mengen:

$$\prod_{k=1}^{n} A_k := A_1 \times \cdots \times A_n.$$

---

2. Beim kartesischen Produkt kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren an!

3. Die Elemente des kartesischen Produktes $A_1 \times \cdots \times A_n$ heißen ***n*-Tupel**.

4. (a_1, a_2) heißt ein Paar.

   (a_1, a_2, a_3) heißt ein Tripel

   (a_1, a_2, a_3, a_4) heißt ein Quadrupel.

5. Man schreibt zu Abkürzung:

$$(a_k)_{k=1}^n := (a_1, \ldots, a_n).$$

6. Sind alle A_k gleich einer Menge A so schreibt man

$$A^n := \prod_{k=1}^n A\ .$$

7. Auch in diesem Fall kommt es auf die **Reihenfolge** der Koeffizienten eines n-Tupels an. Beispiel: $A = \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned}\{0,1\}^3 = \ & \{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\\ & (1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\ \}\ .\end{aligned}$$

Anmerkung: (Abbildungen mit n Variablen)

Abbildungen von einem kartesischen Produktes $A_1 \times \cdots \times A_n$ in eine Menge M nennt man auch Abbildungen mit n Variablen:

$$f : A_1 : \times \cdots \times A_n \to M$$

Beispiele sind die **Projektionen** auf die Kordinaten:

$$\begin{aligned} p_k : A_1 : \times \cdots \times A_n & \to A_k,\\ p_k(a_1, \ldots, a_n) & := a_k,\end{aligned}$$

für $k = 1, \ldots, n$. Man spricht auch kurz von den Kordinaten eines n-Tupels.

Verknüpfungen sind Abbildungen $A \times A \to A$

Die Addition ist eine Verküpfung:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Bezeichnung 1.3.23 (Tupel von Abbildungen)

Es seien M eine Menge und $f_k : M \to A_k$, $k = 1, \ldots, n$, Abbildungen. Man definiert dann das n-Tupel:

$$\begin{aligned} f := (f_1, \ldots, f_n) : M & \to A_1 \times \cdots \times A_n,\\ (f_1, \ldots, f_n)(x) & := (f_1(x), \ldots, f_n(x)).\end{aligned}$$

Beispiel: Ein Punkt in der Ebene ist durch seine Koordinaten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ festgelegt. Eine zeitliche Bewegung eines Punktes in der Ebene beschreibt man durch zwei Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : [0,T] &\to \mathbb{R} \\ f_2 : [0,T] &\to \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dabei sei $[0,T]$ ein Zeitintervall. Das Tupel

$$(f_1, f_2) : [0,T] \to \mathbb{R}^2$$

beschreibt den Weg des Punktes in der Ebene.

Bezeichnung 1.3.24 (kartesisches Produkt von Abbildungen)

Es seien $g_k : A_k \to B_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$, Abbildungen. Man definiert das kartesische Produkt der Abbildungen:

$$\begin{aligned} g := g_1 \times \cdots \times g_n : A_1 \times \cdots \times A_n &\to B_1 \times \cdots \times B_n, \\ (g_1 \times \cdots \times g_n)(a_1, \ldots, a_n) &:= (g_1(a_1), \ldots, g_n(a_n)). \end{aligned}$$

Beispiel: Ein Tupel von Abbildungen:

$$f := (f_1, \ldots, f_n) : M \to A_1 \times \cdots \times A_n$$

Ein kartesisches Produkt von Abbildungen:

$$g := g_1 \times \cdots \times g_n : A_1 \times \cdots \times A_n \to B_1 \times \cdots \times B_n.$$

Die Komposition $g \circ f$ dieser Abbildungen ist dann:

$$g \circ f = (g_1 \circ f_1, \ldots, g_n \circ f_n) : x \mapsto (g_1(f_1(x)), \ldots, g_n(f_n(x))\,).$$

1.4 Reellwertige Funktionen

1.4.1 Funktionen

Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ mit Zielbereich $\mathbb{R}$ heißt auch **Funktion**. Für Funktionen f, g lassen sich **Summe**, **Produkt**, und **Quotient** punktweise für $x \in M$ definieren:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x)+g(x), \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0,\ , \end{aligned}$$

wobei $\frac{f}{g}$ nur auf $M \setminus \{x \in M \mid g(x) = 0\}$ erklärt ist.

Entsprechend definiert man

$$\begin{aligned} |f|(x) &:= |f(x)|, \\ \max(f,g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

und $\min(f,g)$. Weiter hat man die punktweisen Beziehungen

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in M : f(x) \leq g(x).$$

und

$$f < g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in M : f(x) < g(x).$$

Definition 1.4.1 *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt*

a) ***nach oben beschränkt****, falls*

$$\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : x \leq C.$$

b) ***nach unten beschränkt****, falls*

$$\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : C \leq x.$$

c) ***beschränkt****, falls M nach unten und nach oben beschränkt ist.*

Die $C \in \mathbb{R}$, die a) bzw. b) erfüllen heißen **obere**, bzw. **untere Schranke** von M.

M ist genau dann beschränkt, wenn ein reelles C existiert, so daß für alle x aus M gilt $|x| \leq C$.

Beispiele 1.4.2 Siehe auch [Kaballo, S. 22].

a) Hat $M \subset \mathbb{R}$ ein Maximum, so ist M nach oben beschränkt. Hat $M \subset \mathbb{R}$ ein Minimum, so ist M nach unten beschränkt.

b) Für $0 \leq q < 1$ ist $\left\{\sum_{k=0}^{n} q^k \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ beschränkt

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 2\right\}$ ist nach oben, aber nicht nach unten beschränkt.

Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind beschränkte oder unbeschränkte **Intervalle**:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}
\end{aligned}$$

Das Symbol ∞ für „unendlich“ steht hier, wie im folgenden, lediglich als Abkürzung.

Die Beschränktheitsbegriffe für Mengen lassen sich auf Funktionen übertragen, in dem man sie auf die Bilder der Funktionen anwendet.

Definition 1.4.3 *Sei M eine Menge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt*

1. ***nach oben beschränkt**, falls $f(M)$ nach oben beschränkt ist.*
2. ***nach unten beschränkt**, falls $f(M)$ nach unten beschränkt ist.*
3. ***beschränkt**, falls $f(M)$ beschränkt ist.*

Definition 1.4.4 *Sei M eine Menge.*

1. *Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ besitzt ein **Minimum**, falls $f(M)$ ein Minimum besitzt. Punkte $x_0 \in M$ mit*
$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x) := \min f(M)$$
heißen Minimalstellen.

2. *Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ besitzt ein **Maximum**, falls $f(M)$ ein Maximum besitzt. Punkte $x_0 \in M$ mit*
$$f(x_0) = \max_{x \in M} f(x) := \max f(M)$$
heißen Maximalstellen.

Maximalstellen und Minimalstellen nennen wir auch **Extremalstellen**.

Für Funktionen mit $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ führt man folgende Monotoniebegriffe ein:

Definition 1.4.5 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt*

1. (a) ***monoton wachsend**, falls für alle $x,\ y \in M$ aus $x < y$ folgt, daß $f(x) \leq f(y)$ ist.*
   (b) ***streng monoton wachsend**, falls für alle $x,\ y \in M$ gilt, daß aus $x < y$ die Abschätzung $f(x) < f(y)$ folgt.*
2. (a) ***monoton fallend**, falls für alle $x,\ y \in M$ mit $x < y$ stets $f(x) \geq f(y)$ ist.*
   (b) ***streng monoton fallend**, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x < y$.*

Beispiele 1.4.6 Siehe auch [Kaballo, S. 24].

1. Konstante Funktionen sind monoton wachsend und fallend.
2. Die Potenzfunktionen sind auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.
3. Die Potenzfunktionen $\mathbb{R} \ni x \to x^n$ sind genau dann streng monoton wachsen, wenn n ungerade ist.
4. Die Inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend.

Bemerkung 1.4.7 Im Fall $M,\ N \subseteq \mathbb{R}$ nennt man die Umkehrabbildung f^{-1} der Funktion $f : M \to N$ auch **Umkehrfunktion**.

Satz 1.4.8 *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.*

1. *Dann ist f injektiv.*
2. *Dann ist $f : M \to f(M)$ bijektiv.*
3. *Dann ist $f^{-1} : f(M) \to M$ streng monoton wachsend.*

Dieser Satz gilt sinngemäß auch für streng monoton fallende Funktionen.

Beispiele 1.4.9 Siehe auch [Kaballo, S. 26].

1. Die Potenzfunktionen $\mathbb{R} \ni x \to x^n \in \mathbb{R}$ sind genau dann injektiv, wenn n ungerade ist. *Wir werden später sehen, daß sie dann sogar bijektiv sind*
2. Die Inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist auf $(0, \infty)$ bijektiv.

1.4.2 Folgen

Definition 1.4.10 *Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt **Folge**. Die Funktionswerte $a_n := a(n)$ heißen **Folgenglieder**. Man schreibt die Folge a in der Form:*

$$(a(n))_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_n := a.$$

oder auch als a_n, ${}_{n\in\mathbb{N}}$, bzw. a_n ${}_{(n\in\mathbb{N})}$ oder ganz anschaulich als

$$a_1, a_2, a_3, \ldots .$$

Folgen können auch mit einem $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen. z.B. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bei einer Folge kommt es auf die Reihenfolge der Folgenglieder an. Man unterscheide die **Folge** $(a_n)_n$ und ihre **Bildmenge** $a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Allgemeiner nennt man eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$ eine Folge in der Menge M und spricht im Fall $M = \mathbb{R}$ von **reellen Folgen**.

Beispiele: (Folgen)

1. $$\begin{aligned} (\tfrac{1}{n})_{n=1}^{\infty} &= 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots \\ (\tfrac{1}{n^2})_{n=1}^{\infty} &\le (\tfrac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (a_n)_n (b_n)_n &= (a_n b_n)_n \end{aligned}$$

   Wenn alle Folgenglieder $b_n \neq 0$, so ist $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Folge.

2. Zu einer Folge $(a_n)_n$ kann man die Folge $(s_n)_n$ der **Partialsummen**

   $$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

   bilden. Die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} a_n\right)_n$ nennt man auch eine (unendliche) **Reihe** und die a_n die Summanden der Reihe.

---

3. Da Folgen Funktionen sind, kann man auf sie die bereits bekannten Beschränktheits- und Monotoniebegriffe verwenden.

   Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **monoton wachsend**, wenn $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und streng monoton wachsend, wenn $\ldots$.

   Eine Folge von Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$ ist monoton wachsend, wenn die Summanden $a_n \ge 0$ sind.

4. Die vollständige Induktion ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Folgen. Man kann Folgen auch **rekursiv** definieren. Z.B. die Folge der Fibonacci-Zahlen:

   Anfangswerte: $a_0 := 0,\ a_1 := 1$
   Rekursion: $a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n = 2, 3, \ldots$

   Es ist also:

$$(a_n)_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Beispiele 1.4.11 (harmonische Reihe)

1. Die Folge $h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt harmonische Reihe.
2. Wir werden später sehen, daß die Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ gegen $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449340$ *streben.*

n	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
2	1,5	1,25
3	1,833	1,3611
5	2,2833	1,46361
10	2,92897	1,54977
100	5,18738	1,63498
10 000	9,78761	1,64483
10^6	14,39272672	1,6449331
10^{10}	23,60306659	1,6449340

Satz 1.4.12 *Für alle n, $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2^m$ gilt die Abschätzung*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Anmerkung: Dies wurde zum erstenmal um 1350 von Nicole ORESME – Bischhof von Lisieux – gezeigt.

Da $\mathbb{N}$ anschaulich unbeschränkt ist – dies werden wir auch noch als Axiom formulieren – ist die Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$ unbeschränkt.

Satz 1.4.13 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Zum Beweis siehe Vorlesung oder [KABALLO, S. 33].

Beweis.

Wir geben hierfür zwei Beweise:

1. Man vergleiche $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ mit der **Teleskopsumme**

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) .$$

2. Man zeige induktiv, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

ist.

1.5 Ungleichungen

Die Aufgabe einer Ungleichung ist es, komplizierte, schwer berechenbare Ausdrücke durch einfachere, übersichtlichere nach oben oder nach unten abzuschätzen.

Interessante Gleichungen der Analysis werden häufig durch Ungleichungen bewiesen. Am Ende steht dann der Schluß:

$$a \leq b \quad \text{und} \quad b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Abschätzen ist eine Kunst, die man durch Übung und Verinnerlichen von Beispielen erwirbt. Dazu gehört die Kenntnis einer Reihe von Rezepten, sprich Standard-Ungleichungen, die man bei der Tätigkeit des Abschätzens nacheinander - in der richtigen Reihenfolge - anwendet.

Beim Abschätzen von Produkten, Potenzen und Fakultäten hilft häufig die **Bernoullische Ungleichung**.

1.5.1 Bernoullische Ungleichung

Satz 1.5.1 (Bernoullische Ungleichung) *Es gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ für } x \geq -2 \text{ und } n \in \mathbb{N} \ .$$

Jakob Bernoulli, 1654-1705.

Anmerkung: Zum Beweis unterscheide man die Fälle:

$-2 \leq x < -1$: klar

$-1 \leq x$: Vollständige Induktion.

Satz 1.5.2

1. *Für alle $q \in (0,1)$ existiert ein $C > 0$ so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*
$$q^n \leq \frac{C}{n}.$$
2. *Für alle $q > 1$ existiert ein $C > 0$ so, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*
$$q^n \geq Cn.$$

Hinweis: (1) Man schreibe

$$C := \frac{q}{1-q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{C} \ .$$

und benutze nun die Bernoullische Ungleichung.

Zur Abschätzung der Fakultäten $n!$ ist es naheliegend die Faktoren durch ihren „Mittelwert“ $\frac{n}{2}$ zu ersetzen.

Wir zeigen in den beiden folgenden Sätzen, daß für $n = 1, 2, \dots$

$$3\left(\frac{n}{3}\right)^n \le n! \le 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

gilt.

Lemma 1.5.3 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Satz 1.5.4 *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$n! \le 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Beweis.

$\boxed{n = 1\textbf{:}}$ nachrechnen!

$\boxed{n \Rightarrow n + 1\textbf{:}}$

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= n!\,(n+1) \\
&\le 2\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1) \\
&= 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\,(n+1) \\
&\le 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{1}{2}\,(n+1) \\
&= 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Lemma 1.5.5 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Beweis. Für $k = 1, \ldots, n$ ist

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k-1}\frac{n-l}{n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Also

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\ &\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\ &= 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 3.\end{aligned}$$

Satz 1.5.6 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$3\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$$

Beweis.

$\boxed{n = 1\textbf{:}}$ klar.

$\boxed{n \Rightarrow n+1\textbf{:}}$ Die Ungleichung gelte für ein n, dann folgt:

$$\begin{aligned}(n+1)! = (n+1)\,n! &\geq (n+1)\,3\left(\frac{n}{3}\right)^n\\ &\geq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{3}\right)^n\\ &= 3\,\frac{n+1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{3}\right)^n\\ &= 3\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

1.5.2 Approximation der Eulerschen Zahl

Diskrete Simulation eines Wachstumsprozesses.

Man hat die folgende Beobachtung eines **realen Prozesses:**

1. Für hinreichend kleine Zeitintervalle $[t_1, t_2]$ ist die zeitliche Entwicklung $a(t)$ eine lineare Funktion der Zeit:

$$a(t) \approx a(t_1)(1+\alpha(t-t_1)) \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]. \qquad (\star)$$

2. Die relative Änderung

$$\alpha \approx \frac{1}{a(t_1)} \frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$$

   ist für alle hinreichend kleinen Zeitintervalle $[t_1, t_2]$ dieselbe. Die relative Änderung α ist also zeitlich konstant.

3. Für größere Zeitintervalle ist dagegen die beobachtete zeitliche Entwicklung nichtlinear.

Aufstellung eines diskreten mathematischen Modells zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung für einen größeren Zeitraum $[t_0, t]$. Der Wert $a(t_o)$ sei bekannt.

Man wähle eine $n \in \mathbb{N}$ und teile das Intervall $[t_0, t]$ in n gleiche Teile. Für die Teilpunkte $t_k := t_0 + \frac{k(t-t_0)}{n}$, $k = 1, 2, \ldots n$, ergibt das Modell die Werte a_k. Zur Berechnung der a_k wende man nacheinander auf die Teilintervalle die Näherungformel $(\star)$ an.

Die a_k kann man rekursiv berechnen. Für $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt:

Anfangswert:	$a_0 = a(t_0)$
Rekursion:	$a_k := a_{k-1}\big(1 + \frac{\alpha(t-t_0)}{n}\big)$

Also ist für $k = 0, 1, 2, \ldots n$:

$$a_k = a_0 \left(1 + \tfrac{\alpha(t-t_0)}{n}\right)^k$$

Der Endwert a_n approximiert den realen Wert $a(t)$.

Frage: Wie groß soll man das $n \in \mathbb{N}$ wählen und wie ändern sich die Endwerte $a_0(1 + \frac{\alpha(t-t_0)}{n})^n$ mit n? Zur Vereinfachung betrachten wir vorerst den Fall $\alpha(t - t_0) = 1$.

Wir untersuchen nun die Folge

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

die bei kontinuierlichen Wachstumsprozessen eine Rolle spielt. Hilfreich bei der Untersuchung ist die Folge $e_n^* := e_n(1 + \frac{1}{n})$. Es ist $e_n < e_n^*$.

Satz 1.5.7

1. *Die Folge* $\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ *ist streng monoton wachsend.*
2. *Die Folge* $\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}$ *ist streng monoton fallend.*

Bemerkung 1.5.8 (Intervallschachtelung $[(1+\frac{1}{n})^n, (1+\frac{1}{n})^{n+1}]$ **)** Es gilt nun

$$\begin{aligned} 2 = (1+\tfrac{1}{1})^1 \leq \cdots \leq (1+\tfrac{1}{n})^n \leq (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} \leq \cdots \\ \cdots \leq (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2} \leq (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} \leq \cdots \leq (1+\tfrac{1}{1})^{1+1} = 4 \end{aligned}$$

Wir haben also die folgenden Inklusionen von Intervallen:

$$\begin{aligned} [(1+\tfrac{1}{1})^1, (1+\tfrac{1}{1})^{1+1}] \supseteq [(1+\tfrac{1}{2})^2, (1+\tfrac{1}{2})^{2+1}] \supseteq \cdots \\ \cdots [(1+\tfrac{1}{n})^n, (1+\tfrac{1}{n})^{n+1}] \supseteq [(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1}, (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+2}] \supseteq \cdots \end{aligned}$$

Für die Länge der Intervalle gilt (vgl.Lemma 1.5.3 und 1.5.5):

$$\tfrac{2}{n} \leq \left|(1+\tfrac{1}{n})^{n+1} - (1+\tfrac{1}{n})^n\right| < \tfrac{3}{n}.$$

Anmerkung: (Intervallschachtelung für e)

Unsere Anschauung sagt uns, daß die Länge der Intervalle beliebig klein wird. Wenn man diese Begriff *„beliebig klein werden“* präzisiert, sieht man, daß man dies nicht beweisen kann, sondern als ein Axiom der reellen Zahlen *(siehe Archimedisches Axiom)* fordern muß.

Wenn wir nun bereits wissen, daß die Intervalle beliebig klein werden, dann sollten sie sich auf einen Punkt zusammenziehen. Wir werden zeigen, daß dieser Punkt keine rationale Zahl sein kann.

Die Existenz einer reellen Zahl, die in allen diesen Intervallen liegt, werden wir später aus einem weiteren Axiom der reellen Zahlen *(siehe Intervallschachtelungsprinzip)* folgern.

Diese Zahl, die durch die im Satz 1.5.7 angegebene Intervallschachtelung bestimmt wird, heißt die **Eulersche Zahl** e, nach Leonhard Euler (1707-1783)

Feststellung 1.5.9 *Die Folge*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ist streng monoton wachsend. Die Folge

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist streng monoton fallend.

Vergleichen wir diese mit den vorhergehenden Folgen:

Satz 1.5.10

$$\text{a)} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$\text{b)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad E_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$e_n^* := e_n \left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad E_n^* := E_n + \frac{1}{n\, n!}$$

Wir haben also eine Intervallschachtelung in der anderen:

$$e_n \leq E_n < E_n^* < e_n^*$$

Beweis (Satz 1.5.10). (a)

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = E_n. \end{aligned}$$

(b) Für $n = 1$ gilt $e_1^* = 3 < 4 = E_n^*$. Für $n = 2, 3, \ldots$ gilt:

$$\begin{aligned} e_n^* - E_n^* &= e_n \left(1+\frac{1}{n}\right) - E_n - \frac{1}{n\, n!} \\ &= \frac{1}{n}\left(e_n - \frac{1}{n!}\right) - \underbrace{(E_n - e_n)} \end{aligned}$$

Da (siehe nächste Folie) $(E_n - e_n) \leq \frac{1}{n}(E_{n-1} - \frac{1}{2}\ )$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{n}\left(e_n - \frac{1}{n!}\right) - \frac{1}{n}\left(E_{n-1} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(e_n - E_{n-1} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(e_n - E_n + \frac{1}{2}\right) \\ &> \frac{1}{n}\left(e_2 - E_2^* + \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Hilfsbehauptung $(E_n - e_n) \le \frac{1}{n}(E_{n-1} - \frac{1}{2})$ für $n = 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}
E_n - e_n &= \Big(2 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!}\Big) - \Big(2 + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\Big) && (1)\\
&= \frac{1}{2n} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \prod_{l=0}^{k-1}(1 - \frac{l}{n})\Big) && (2)\\
&\le \frac{1}{2n} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)^k\Big) && (3)\\
&\le \frac{1}{2n} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \Big(1 - \frac{k(k-1)}{n}\Big)\Big) && (4)\\
&= \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k!}\Big) = \frac{1}{n}\Big(E_{n-2} - \frac{1}{2})\Big) \le \frac{1}{n}\Big(E_{n-1} - \frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}$$

Wir verwenden weiterhin die Abkürzungen:

$$E_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad E_n^* := E_n + \frac{1}{n\, n!}.$$

Satz 1.5.11 (e nicht rational)
Es gibt keine rationale Zahl, die in allen Intervallen $[E_n, E_n^*]$, $n \in \mathbb{N}$, liegt.

Anmerkung: Der Beweis wird etwas mehr zeigen:
Wenn $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, dann ist

$$r \notin [E_{q+1}, E_{q+1}^*].$$

Beweis (e nicht rational).

Annahme: es gibt ein $r \in \mathbb{Q}$, so daß gilt:

$$E_n < r < E_n + \frac{1}{n\,n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q!r &= (q-1)!p \in \mathbb{Z}, \\ q!E_q &= \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}, \\ q!r - q!E_q &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Andererserseits ist nach Annahme:

$$q!E_q < q!r < q!E_q + \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad 0 < q!r - q!E_q < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Widerspruch!

Literatur

[Bröcker] Bröcker, Theodor: *Analysis1 (2. Auflage) 1995* Spektrum, Akad. Verl.

[Dieudonné] Dieudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press 1960. Deutsche Übersetzung: *Grundzüge der modernen Analysis* Vieweg 1981

[Forster] Forster, Otto: *Analysis 1 (4. Auflage)* Vieweg 1983

[Kaballo] Kaballo, Winfried: *Einführung in die Analysis I (2. Auflage)* Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg Berlin

[Königsberger] Königsberger, Konrad: *Analysis I (2. Auflage)* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

[Landau] Landau, Edmund: Grundlagen der Analysis (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen) Leipzig 1930, dritte Auflage: New York 1960.

[van der Waerden] van der Waerden, B. L.: Algebra (Band I) 7. Auflage: Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1966.