Mehr Geometrie im Geometrieunterricht! – Eine kurze Situationsbeschreibung und ein Vorschlag

Christoph Hammer

18. Juli 2016

1 Zusammenfassung

Wieviel Geometrie ist (noch) im Geometrieunterricht? Verschiedene Aspekte geben Anlass nachzudenken. Betrachtet man die Lehrplanentwicklung der letzten Zeit, so ist festzustellen, das vor allem Themen aus der Geometrie den Kürzungen zum Opfer fallen. Nimmt man von den verbleibenden Inhalten diejenigen weg, die eigentlich versteckte Algebra darstellen, wird die Bilanz noch bedenklicher. Es gibt mehrere Möglichkeiten, trotz dieser Situation gehaltvollen Geometrieunterricht zu gestalten. Eine davon soll im Folgenden vorgeschlagen werden. An Beispielen zum Flächeninhalt wird gezeigt, wie das Prinzip der Messung Vernetzungen erlaubt, die zum Verständnis grundlegender Strukturen führen können.

2 Geometrie in der Schule

Einerseits ist man sich einig, dass die Geometrie

- ein wesentliches Kulturgut mit interessanten Verbindungen zur Wissenschaftsgeschichte und Philosophie darstellt;
- wichtige Erfahrungen und Erkenntnisse ermöglicht, die helfen, sich in der Umwelt zurecht zu finden;
- unverzichtbare Beiträge zur Entwicklung eines angemessenen Bilds von Mathematik liefert, denn sie ist ein ideales Feld, in dem Problemlösen, Begriffsbildung und nicht zuletzt Beweisen angebahnt und gelernt werden kann.

Andererseits stellt sich die Frage, in wie weit diese wohlklingenden Ansprüche im Geometrieunterricht tatsächlich eine Rolle spielen. Natürlich gäbe es zu diesen Punkten viel mehr zu sagen, als hier angesprochen werden kann. Etwa, welche Aufgaben dem Geometrieunterricht in einer Umwelt zufallen könnten, in der an Stelle von Landkarten oder Stadtplänen GPS-Geräte getreten sind. Unser Alltag ist zweidimensional geworden. Damit wird es natürlich auch schwerer, sich die Lage der Höhe einer Pyramide oder den Abstand zweier windschiefer Geraden vorzustellen. Um diesem Problem zu begegnen, sind kopfgeometrische Übungen sinnvoll ([2],[3]) und werden in Schulbüchern (z. B. [1],[5]) zunehmend angeboten. Über den dritten Punkt wurde schon viel diskutiert, vor allem wenn es um die Frage nach Beweisen geht. Irgendwo zwischen Plausibilitätsbetrachtungen und schlüssigen Beweisen dürfte sich die Unterrichtsrealität bewegen. Jedenfalls wurde in allen mir bekannten Lehrplänen der Begriff „Beweisen“ durch „Argumentieren“ ersetzt. Immerhin ist es erfreulich, dass das mathematische Argument als Vorstufe im Sinne einer *Entwicklung hin zum Beweisen* an Bedeutung gewonnen hat ([3]).

Die oft (wenigstens sinngemäß) zitierte Herkunft des griechischen Worts „geometria“ ($\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\varrho\acute{\iota}\alpha$) für „Landmessung“ weist auf die Bedeutung der Messung in der Geometrie hin. Allerdings scheint in der Praxis die messende Geometrie weniger betont zu werden als die damit abgeleiteten Formeln. So lernen Schüler die Idee der Messung im Zusammenhang mit dem Flächeninhalt eines Rechtecks und dem Volumen eines Quaders zwar kennen, im Weiteren spielt sie aber kaum mehr eine Rolle. Oft ist die Integralrechnung nach langer Pause die nächste Gelegenheit. Die rechnende Geometrie nimmt einen großen Raum in Curricula und Lehrbüchern ein. So könnte bei Schülern der Eindruck entstehen, es gäbe in der Geometrie eben viele Formeln zu lernen und es wäre daher in ihr ein großer Anteil Algebra versteckt. In diesem Beitrag soll gezeigt werden, wie dem durch Betonung der in den Bildungsstandards beschriebenen Leitidee „Messen“ entgegengewirkt werden kann.

3 Vorschlag

Die grundlegende Idee des folgenden Vorschlags wurde eben bereits erwähnt: Das Prinzip des Messens soll als „roter Faden“ nicht nur an den üblichen Stellen (Rechteck, Quader) dienen, sondern stärker in den Mittelpunkt rücken. Zunächst trage ich Eulen nach Athen:

Messen

Beim Messen vergleicht man zwei Repräsentanten aus dem betrachteten Größenbereich:

- einen zu messenden Repräsentanten (Gegenstand)
- den Repräsentanten eines Teils dieser Größe („Messinstrument“), der als (Maß-) Einheit bezeichnet wird.

Die Einheit wird wiederholt ohne Lücken und Überschneidungen an dem zu messenden Objekt abgetragen und gezählt, wie oft dies möglich ist (der zu messende Repräsentant wird „ausgeschöpft“). Diese Zählung ergibt die *Maßzahl*. Umgekehrt kann die Maßzahl „aufbauend“ repräsentiert werden, indem eine entsprechende Anzahl an Einheiten zusammengefügt wird. Die Idee des Messens und die Idee der Maßzahlrepräsentation durch Aufbau sind also „zwei Seiten einer Medaille“. Doch nicht immer ist die Sache problemlos. Vergleicht man zwei Repräsentanten indirekt mit einer Einheit, so können sie nicht immer mit dem selben Maß gemessen werden. Dies würde nämlich voraussetzen, dass beide Maßzahlen ganzzahlige Vielfache der Einheit sind. Betrachtet man zum Beispiel zwei Längen mit reellen Maßzahlen l_1 und l_2, so haben sie ein gemeinsames Maß $e \in \mathbb{R}$, wenn es ganze Zahlen q und p gibt mit:

$$l_1 = q \cdot e \text{ und } l_2 = p \cdot e, q, p \in \mathbb{Z}.$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass das Verhältnis von l_1 und l_2 rational ist:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{q \cdot e}{p \cdot e} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}, \text{ da } q, p \in \mathbb{Z}.$$

In diesem Fall heißen l_1 und l_2 kommensurabel, andernfalls inkommensurabel.

Beispiele:

- Die Seite eines Quadrats und seine Diagonale sind inkommensurabel, da ihr Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{2}}$ irrational ist. Dies kann man sich mit dem Satz des Pythagoras oder einer elementargeometrischen Überlegung klar machen: Das Quadrat über der Diagonalen eines Quadrats hat den doppelten Flächeninhalt wie das Quadrat selbst. Also gilt: $d^2 = 2 \cdot a^2$ und damit $\frac{a}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Die Seiten eines DIN-Blatts sind inkommensurabel, ihr Verhältnis beträgt $\sqrt{2}$, wie unmittelbar aus der Ähnlichkeit aller DIN-Blätter untereinander folgt. Auf diese Idee kommen wir später noch einmal zurück.

- Beim Kreis sind Umfang und Durchmesser inkommensurabel. Das Verhältnis ist $\frac{U}{d} = \pi$, also sogar transzendent.

Flächeninhalte

Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis zeigen, dass Schüler erhebliche Probleme bei Flächeninhalten haben, die sich auch in verschiedenen Studien widerspiegeln (z. B. [6]). Für diese offensichtlichen Schwierigkeiten gibt es vielfältige Ursachen. Angesichts der „Liniendominanz ebener Figuren“ ([2]) fällt es schwer, tragfähige Vorstellungen von diesem Begriff zu entwickeln

([7]). Flächeninhalte werden im Alltag so gut wie nie gemessen[1], sondern nahezu ausschließlich aus Längenmaßen berechnet. Für die Abgrenzung zwischen Umfang und Flächeninhalt stellt dies eine zusätzliche Schwierigkeit dar. Eine zweite Ursache für Schülerprobleme liegt darin begründet, dass die Flächeninhaltsformeln zu verschiedenen Figuren in unterschiedlichen Schuljahren behandelt werden und dadurch der Blick auf ihre Strukturgleichheit verstellt werden könnte. Schließlich dominiert in uns das lineare Denken. Da sich jedoch Längenänderungen meist überproportional auf Flächeninhalte auswirken, ergeben sich Konflikte mit subjektiven Vorstellungen.

Flächenmessung bei speziellen Figuren

- *Rechteck:* Das Vorgehen beim Rechteck ist allgemein bekannt. Hier soll nur noch einmal betont werden dass es zunächst nur darum geht, die *Anzahl* der Einheitsflächenstücke zu bestimmen, die das Rechteck lückenlos und überschneidungsfrei ausfüllen. Dazu wird die Anzahl (n_l) der Einheitsflächenstücke, die in einen Streifen passen und die Anzahl (n_b) der Streifen, die das Rechteck vollständig ausfüllen, ermittelt.
  Das Produkt $n = n_l \cdot n_b$ aus diesen beiden Anzahlen ergibt die Anzahl der Einheitsflächenstücke im Rechteck und damit die Maßzahl für den Flächeninhalt: $A = n \cdot A_{Einheit}$. Wählt man als Einheitsflächenstück ein Quadrat mit einer Längeneinheit als Seitenlänge und legt seinen Flächeninhalt als Einheitsfläche fest, so ergibt sich der Flächeninhalt des Rechtecks als Produkt der Seitenlängen. Dies ist die bekannte Formel $A = l \cdot b$. Allerdings sollte nicht zu früh mit normierten Einheiten gearbeitet werden. Voreiliges Messen von Längen und Rechnen mit der Formel verstellen den Blick auf den wesentlichen Gedanken (vgl. [7]).

- *Parallelogramm:* Verbreitete Herleitungen der Flächeninhaltsformel für das Parallelogramm verwenden die Verschiebung eines Teildreiecks oder das Prinzip der Ergänzungsgleichheit. Grundidee ist in beiden Fällen die Rückführung auf ein Rechteck.

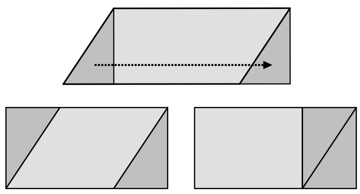

Abbildung 1: Rückführung auf das Rechteck durch Umformung bzw. Ergänzungsgleichheit

[1] mit Ausnahme der *einen* Gelegenheit im Mathematikunterricht, wenn es um den Flächeninhalt des Rechtecks geht.

Ich schlage vor, auch hier das Prinzip des Messens zu nutzen und vorzugehen wie beim Rechteck: Wir legen das Parallelogramm mit Einheitquadraten aus und bestimmen ihre Anzahl.[2] „Geschicktes“ Zählen bedeutet wie beim Rechteck, zwei Anzahlen miteinander zu multiplizieren. Alternativ könnte man das Auslegen durch Zählen von Kästchen im Heft ersetzen.

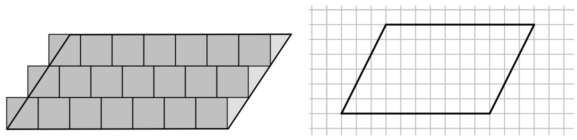

Abbildung 2: Messung beim Parallelogramm

Dieses Vorgehen hat einige Vorteile: Beim Messen wird der Begriff „Flächeninhalt“ durch die durchgeführte oder vorgestellte Handlung vertieft. Es wird keine spezielle Höhe verwendet, sondern „Höhe“ ist gleichbedeutend mit „Abstand zweier Gegenseiten“. So wird die Gefahr der Übergeneralisierung von „Seite mal Seite“ verringert. Das Problem der außerhalb des Parallelogramms liegenden Höhe kommt gar nicht vor. Scherung des mit Quadraten ausgelegten Parallelogramms macht deutlich, dass alle Parallelogramme, die in Grundseite und Abstand der zugehörigen Gegenseiten übereinstimmen, gleichen Inhalt haben – auch das Rechteck.

- *Kreis:* Beim Flächeninhalt des Kreises sollten zwei Probleme beachtet werden:

  - Zu frühe und zu einseitige Fixierung auf den Inhalt eines speziellen Kreises und damit auf die Bestimmung eines Näherungswerts für π behindert das Verständnis für den entscheidenden Sachverhalt $A \sim r^2$, um den es im Folgenden gehen wird.
  - Wenn die Flächeninhaltsformel aus der für den Umfang (z. B. wie in Abb. 3 angedeutet, oder mit der zweifellos schöneren Zwiebelidee, die Hans Walser vorgestellt hat.) hergeleitet wird, muss klargestellt werden, dass so ein Zusammenhang im Allgemeinen nicht besteht. Andernfalls wird ein Fehlkonzept bestärkt.

[2] Sollten Sie sich daran stören, dass das nicht immer „aufgeht“, sollten Sie überlegen, wie Sie mit dem Problem beim Rechteck umgehen. Manche haben auch schon kritisiert, dass Quadrate überstehen und andere nicht genau bis zum Rand des Parallelogramms reichen. In der Abbildung geschieht etwas drei Mal, was im verbreiteten Weg nur einmal vorkommt: Umformung durch Verschiebung.

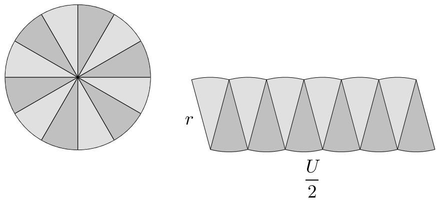

Abbildung 3: Umfang und Flächeninhalt beim Kreis

Im folgenden Vorschlag wird deshalb ein anderer Weg beschritten. Wir messen näherungsweise den Flächeninhalt eines Viertelkreises:

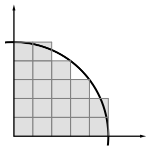

Abbildung 4: Messung beim Kreis

Dabei ist es nicht wesentlich, wie genau diese Messung ist. Verdoppelt man nun sowohl den Radius des Viertelkreises als auch die Seitenlänge der Quadrate, so bleibt deren Anzahl erhalten. In jedes der großen Quadrate passen aber vier kleine.

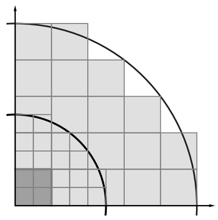

Abbildung 5: Messung beim Kreis

Dieses generische Beispiel läßt sich verallgemeinern zu beliebigen Faktoren, die dem Kreisradius entsprechen, wenn man vom Einheitskreis ausgeht. Der Flächeninhalt eines Kreises ist also $(\frac{r}{1\,\mathrm{LE}})^2$-mal so groß wie der des Einheitskreises. Abschließend gilt es natürlich, einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Einheitskreises zu bestimmen.[3] Im Grunde genügt dafür die einfache Abschätzung $\pi \gtrapprox 3$ mit ein- und umbeschriebenen Quadraten.

[3] Wenn Sie wollen, könnte auch die Tortenstückmethode eine Bedeutung behalten, nämlich zur Klärung der Frage, ob $\pi_{\text{Umfang}} = \pi_{\text{Flächeninhalt}}$ gilt.

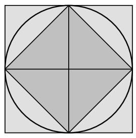

Abbildung 6: Näherungswert für π

> Wohlgemerkt: Diese Überlegungen kann man verstehen, ohne genau über die zentrische Streckung Bescheid zu wissen. Sie zeigen einen Weg zu allgemeinen Beziehungen zwischen den Flächeninhalten ähnlicher Figuren auf, der bis in die Hochschulmathematik reicht.

Die Verallgemeinerung liegt in der Luft: Mit den Überlegungen zum Kreis ist sofort ersichtlich, dass sich zentrische Streckung mit dem Faktor k quadratisch auf Flächeninhalte und kubisch auf Volumina (hier nehmen wir einfach Würfel) auswirkt:

$$s' = k \cdot s$$

$$A' = k^2 \cdot A$$

$$V' = k^3 \cdot V$$

Dabei ist es nicht einmal wichtig, ob etwas über s, A oder V bekannt ist. Auf dieser Grundlage werden Zusammenhänge klar, die hier nicht alle aufgeführt werden können. Zum Beispiel kann mit einem Satz begründet werden, dass bei der Kugel $V \sim r^3$ gilt. Die wunderschöne Argumentation mit dem Prinzip von Cavalieri hat hier weiterhin eine Bedeutung, nämlich zur Begründung des Vorfaktors $\frac{4}{3}\pi$. Stellvertretend für weitere Bezüge seien noch zwei[4] Hinweise gegeben:

- Bei welchen Figuren besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Umfang und Flächeninhalt?

- Welche Figuren kann man über den Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zeichnen, so dass für ihre Flächeninhalte die Pythagorasbeziehung gilt?[5]

[4] Ein weiteres Beispiel ist weiter oben versteckt: Das Seitenverältnis eines DIN-Blatts ergibt sich aus der Ähnlichkeit aller DIN-Blätter untereinander und der Tatsache, dass das jeweils nächst größere doppelten Flächeninhalt hat.

[5] Antwort: Die drei Figuren müssen die Dreiecksseiten in ihrem Umfang enthalten und ähnlich zueinander sein.

Fazit

Das Prinzip des Messens könnte als roter Faden dienen, Teile des Geometriecurriculums vernetzt zu unterrichten. Damit soll dem übertriebenen Formeldenken entgegengewirkt und Verständnis für die Struktur der Formeln in den Mittelpunkt gerückt werden. Es sollte deutlich werden, dass die Parameter in den Formeln sekundär sind und die funktionalen Zusammenhänge nicht zu kurz kommen dürfen.

Literatur

[1] Affolter, W., Nydegger, A., Wälti, B., Wieland, G. (2013). *mathbuch 1*. Zug: Klett und Balmer.

[2] Franke, M. & Reinhold, S. (2016^3). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[3] Hammer, C. (2009). Vom Argument zum Beweis, *Mathematik lehren, 155*, 18-21.

[4] Hammer, C. (2011). Immer mal wieder ... Aufgabenideen zur Kopfgeometrie, *Mathematik lehren, 167*, 25-27.

[5] vom Hofe, R. et al. (2012). *Mathematik heute 5*. Braunschweig: Schroedel.

[6] Ulfig, F. (2013). *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

[7] Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R. et al. (Hrsg.). (2009). *Didaktik der Geometrie f?r die Sekundarstufe I*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.