Förderung mathematischen Problemlösens in der Sekundarstufe I – Theoretische Grundlagen und ein Unterrichtsversuch zum Problemlösen lernen im MU anhand geometrischer Denkaufgaben

Katharina Wilhelm

Das Lösen eines mathematischen Problems stellt für viele Schüler oft eine scheinbar nicht zu bewältigende Herausforderung dar, die bei ihnen womöglich auch Angst erzeugt, da sie keine Idee haben, wie sie an das Problem herangehen sollen. Jedoch kann man einen rechten Umgang mit Problemen und deren Bearbeitung nur durch das Lösen von selbigen erlernen. Um den Schülern also die Chance zu geben, ihr Problemlösepotential zu entwickeln und zu entfalten und damit Chancengleichheit zu gewähren, ist Problemlösenlernen ein explizites und wesentliches Ziel des MU (vgl. Bruder et al. 2011, S.7; Haas 2000, S.1). Doch wie sieht es in der Realität mit der Problemlösekompetenz der Schüler aus? Es besteht Bedarf an Untersuchungen, wie man den MU so gestalten kann, dass die Problemlösekompetenzen der Schüler gefördert werden und sie beispielsweise ein erhöhtes Interesse bzw. eine erhöhte Anstrengungsbereitschaft entwickeln. Ausgang des Vortrages ist ein Umriss einiger theoretischer Fakten zum Problemlösen, woran anschließend eine konkrete Lernsituation zur Explizierung von Heurismen vorgestellt wird. Basis des Vortrages bildet eine Examensarbeit, in der in zwei Klassen eine dreistündige Unterrichtseinheit zum Problemlösen lernen durchgeführt wurde, vergleichsweise mit und ohne Explizierung von Heurismen.

Problemlage und Ausgangssituation

Internationale Vergleichsstudien wie TIMSS oder PISA machen auf eine mangelnde Problemlösefähigkeit deutscher Schüler aufmerksam. Der Unterricht nutzt – neben der Vermittlung von Faktenwissen und dem Erlernen von algorithmischen Verfahren – kaum die Chance, heuristische Fähigkeiten zu schulen (vgl. Baumert et al. 1997, S.31; Haas 2000, S.11). Aus der PISA Erhebung des Jahres 2003 kann man folgern, dass deutsche Schüler zwar ein großes kognitives Potential aufweisen und durchaus fächerübergreifende Problemlösekompetenz besitzen, diese im MU jedoch nicht ausreichend gefördert und ausgeschöpft wird (vgl. Prenzel et al. 2003, S.15f).

Da sich diese Untersuchungen auf die fächerübergreifende Kompetenz des Problemlösens beziehen, scheint es interessant, sich speziell mit der mathematischen Problemlösefähigkeit deutscher Schüler zu beschäftigen und die Untersuchung darauf zu konzentrieren.

Theoretische und didaktische Grundlagen zum Problemlösen

Problem(lösen)

In der Literatur findet man keine einheitliche Definition mathematischen Problemlösens. Exemplarisch soll hier die Definition nach Dörner (1979, S.10) aufgezeigt werden, um darauf aufbauend den Begriff Problemlösen definieren zu können. Demnach steht

> *„[e]in Individuum […] einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den wünschenswerten Zielzustand zu überführen.“.*

Gemeinsam ist allen Definitionen aus Psychologie und Mathematikdidaktik, dass sie unter einem Problem eine Aufgabe verstehen, welche durch einen gegebenen Anfangszustand, einen gesuchten Endzustand und einen unbekannten Lösungsweg gekennzeichnet ist (vgl. u.a. Collet 2009, S.18; Scheu 2003, S.39). Wichtig hierbei ist die Betonung der Personenspezifität, d.h. ein Problem an sich gibt es im eigentlichen Sinne nicht, es ist immer abhängig vom jeweiligen Problemlöser, seinem Vorwissen, seiner Motivation u.v.m. (vgl. Bruder et al. 2011, S.11).

Demnach versteht man unter Problemlösen

> *„das Bestreben, einen gegebenen Zustand (Ausgangs- oder Ist-Zustand) in einen anderen, gewünschten Zustand (Ziel- oder Soll-Zustand) zu überführen, wobei es gilt, eine Barriere zu überwinden, die sich zwischen Ausgangs- und Zielzustand befindet"* (Hussy 1984, S.114).

Probleme und Aufgaben

Der Begriff Problem ist nicht mit dem der Aufgabe zu verwechseln. Laut Dörner (1979, S.10) sind

> *„Aufgaben […] geistige Anforderungen, für deren Bewältigung Methoden bekannt sind. [...] Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen muss etwas Neues geschaffen werden.".*

Bei einer Aufgabe existiert also keine Barriere, dem Problemlöser ist der Weg zur Lösung klar, bekannte Vorgehensweisen können durchlaufen werden (vgl. Hussy 1993, S.20).

Bruder (1992, S.6f) unterscheidet drei Möglichkeiten bzw. Stellen, an denen eine Aufgabe für einen Lernenden zu einem Problem werden kann: Zunächst können bereits Schwierigkeiten beim Durchlesen oder Hören der Aufgabenstellung auftreten, beispielsweise aufgrund abstrakter oder komplexer Darstellung. Auch wird eine Aufgabe häufig beim Finden einer Lösungsidee für den Schüler zu einem Problem, da beispielsweise Kreativität fehlt oder mathematische Begriffe/ Zusammenhänge nicht abrufbar sind. Des Weiteren kann die Ausführung des Lösungsplans für den Lernenden ein Problem darstellen, da er seine Ideen aufgrund mangelnder mathematischer Fertigkeiten nicht realisieren kann.

Heurismen und Heuristik

Rott et al. (2014b, S.193) verstehen unter dem Begriff Heurismen

> *„weichere mathematische Tätigkeiten, die helfen können, Problemsituationen besser zu verstehen und Fortschritte auf dem Weg zur Lösung zu machen".*

Im Gegensatz zu Algorithmen haben Heurismen ein sehr viel breiteres Anwendungsgebiet und müssen nicht zwangsläufig zu einer Lösung führen. Sie sind weitestgehend unabhängig vom Inhalt der Aufgabe, erleichtern lediglich die Lösungssuche, indem sie Anstöße zum Weiterdenken geben und so die Chancen zur Lösungsfindung erhöhen. Im Gegensatz zu Beweisen, welche der Sicherung von Erkenntnissen dienen, zielen Heurismen primär auf das Finden von Ideen und Lösungsansätzen ab (vgl. Bruder 2000a, S.73; Bruder 2002, S.6; Haas 2000, S.15ff; König 1992, S.24).

Das Wort Heuristik stammt aus dem Griechischen (gr. *heuriskein*) und bedeutet *finden* oder *entdecken*. Bereits Archimedes beschäftigte sich mit der mathematischen Heuristik: Der Legende nach rief er vor Freude *Heureka* – Ich hab's gefunden – als er beim Baden mit einem Goldstück das Auftriebsgesetz entdeckte (vgl. Bruder et al. 2011, S.34; Winter 1989, S.35).

Prozess der Lösung eines Problems nach G. Polya

Da das Lösen eines Problems selten in einem Zug verläuft, hat George Polya – einer der Wegbereiter mathematischen Problemlösens – versucht, das Vorgehen in natürliche Stadien zu gliedern, wobei eine scharfe Abgrenzung der einzelnen Schritte nicht möglich ist (vgl. Schreiber 2011, S.94). Er beschreibt ein vierphasiges Vorgehen zur Lösung eines Problems (vgl. Polya 1995, 18ff):

1. Phase: Verstehen der Aufgabe
2. Phase: Ausdenken eines Plans
3. Phase: Ausführen des Plans
4. Phase: Rückschau

Die von ihm zusammengestellte Tabelle mit einer Vielzahl an Fragen soll dem Schüler helfen, den Problemlöseprozess zu strukturieren und zu einer Lösung zu gelangen (vgl. Bruder 2002, S.7; Bruder et al. 2011, S.18f).

1. Phase: Verstehen der Aufgabe

- Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?
- Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
- Zeichne eine Figur! Führe passende Bezeichnungen ein!
- Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?

Abb. 1: Auszug aus der Tabelle mit Leitfragen von G. Polya (1995)

Implizites und explizites Heurismentraining

Die zum Lösen von Problemen erforderlichen Heurismen können auf zwei verschiedene Arten trainiert werden: implizit und explizit. Polya (1995, S.18) vertritt die Meinung, dass heuristisches Training **implizit** stattfinden soll, indem der Lehrer den Schülern die Fragen und Anregungen seiner Tabelle so oft vorlegt,

> *„wie er dies ungezwungen tun kann. […] Dank solcher Führung wird der Schüler schließlich hinter den rechten Gebrauch dieser Fragen und Anregungen kommen […].“* (Polya 1995, S.18).

Das bedeutet, dass ein bestimmter Heurismus implizit in das Unterrichtsgeschehen eingeflochten und anhand des aktuellen Schulstoffes mittrainiert wird (vgl. Brockmann-Behnsen 2014a, S.20f). Im Gegensatz zu Polya vertritt König (1992, S.24) die Auffassung, dass ein implizites Training allein nicht ausreichend ist. Er postuliert:

> *„Ausgewählte heuristische Vorgehensweisen sollten […] im Prozeß [sic] der Tätigkeit bewußt [sic] vermittelt werden. Das heißt, es geht um ein zielgerichtetes Aneignen und Anwenden im Unterricht und um ein* ***explizites*** *Abheben von methodologischen Erkenntnissen.“ (König 1992, S.24).*

Demzufolge sollen die Heurismen in separaten Unterrichtseinheiten ausdrücklich vermittelt und trainiert werden. Hierbei werden nicht nur stofflich aktuelle Beispiele zum Üben herangezogen, sondern auch Probleme aus anderen Themengebieten mithilfe des Heurismus bearbeitet (vgl. Brockmann-Behnsen 2014a, S.20f; Rott et al. 2014b, S.194).

Heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien

Heurismen sind ein Sammelbegriff für heuristische Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel, wobei die Begriffe nur schwer voneinander abgrenzbar sind (vgl. Bruder et al. 2011, S.36f, 45; König 1992, S.26). Bruder et al. (2011, S.44f) geben in ihrer Mindmap einen Überblick über verschiedene Heurismen, die eine Orientierungshilfe beim Lösen mathematischer Probleme darstellen und die geistige Beweglichkeit schulen.

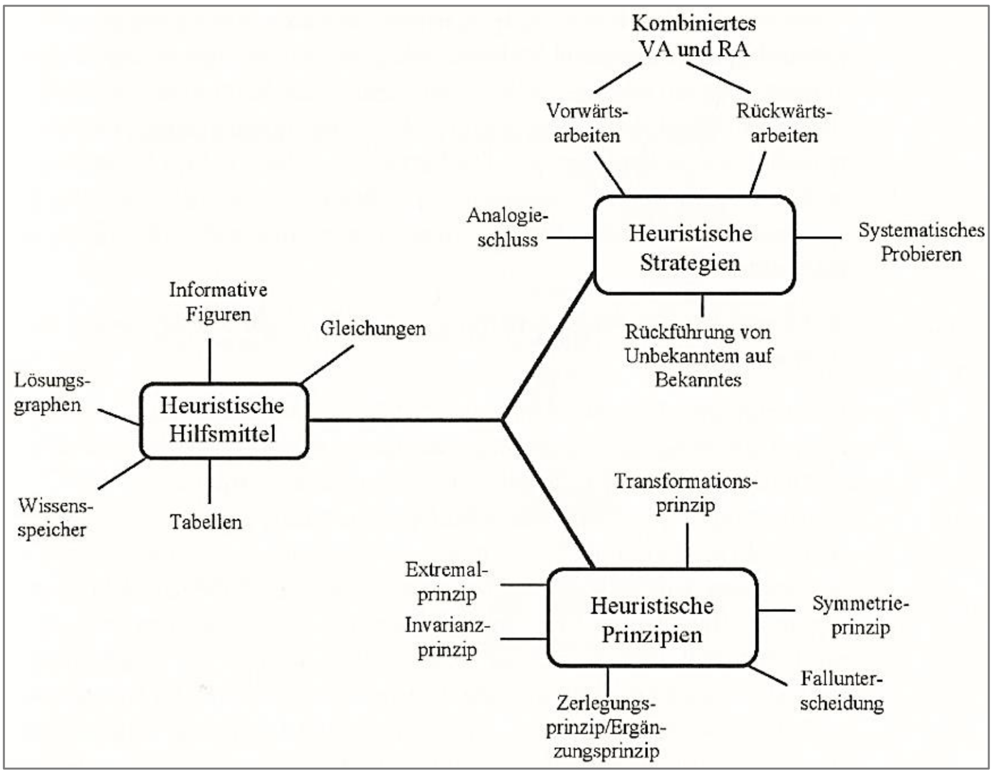

Abb. 2: Überblick über für den MU bedeutsame Heurismen (Bruder et al. 2011, S.45)

Diese müssen nicht isoliert eingesetzt werden, häufig erfordern Probleme eine Kombination von mehreren (vgl. Grieser 2013, S.119). An dieser Stelle sollen lediglich die für den geplanten Unterrichtsversuch relevanten Heurismen kurz angerissen werden.

Unter dem Hilfsmittel **Informative Figur** versteht man – wie man mit dem Ausdruck *informativ* assoziiert – eine Skizze, die möglichst viele wichtige Informationen, Beziehungen und Bezeichnungen enthält. Sie dient dem besseren Verständnis sowie der Veranschaulichung eines Problems und kann zu einem Zugang bzw. zu einer Lösungsidee führen (vgl. Abels 2002, S.27; Bruder 2000c, S.6; Bruder et al. 2011, S.46ff).

Tabellen weisen vielfältige Einsatzmöglichkeiten auf: Man kann sie verwenden, um sich einer Lösung systematisch anzunähern, um alle Möglichkeiten strukturiert aufzulisten (im kombinatorischen Verständnis) oder mittels Zeilen- und Spaltenbeziehungen eine Gleichung aufstellen zu können. Damit kann ein Schüler sein Vorgehen dokumentieren und den Überblick behalten (vgl. Bruder et al. 2011, S.56ff/187; Dolan et al. 1983, S.15).

Gleichungen dienen v.a. dazu, den gegebenen Sachverhalt zu reduzieren, zu mathematisieren sowie Beziehungen und Zusammenhänge herauszustellen. Dieses Hilfsmittel gilt als eines der schwierigsten für Schüler, da es abstrahierendes Denken voraussetzt. Es bietet jedoch die Chance, zu kurzen und eleganten Lösungen zu gelangen (vgl. Bruder et al. 2011, S.67f).

Systematisches Probieren zählt zu den einfachsten heuristischen Strategien, wird jedoch häufig in seiner Bedeutung unterschätzt. Darunter versteht man das Ausführen begründeter Vermutungen mit anschließender Kontrolle, bis die korrekte Lösung gefunden wurde. Bei dieser Strategie geht es also um ein strategisches Durchlaufen aller denkbaren Fälle anhand gewisser Kriterien – im Gegensatz zum unsystematischen Herumprobieren (vgl. Bruder et al. 2011, S.70f; König 1992, S.28; Sewerin 1982, S.153).

Das **Vorwärtsarbeiten** ist eine weitere heuristische Strategie. Hierbei geht der Problemlöser vom Gegebenen aus (Start) und arbeitet sich vorwärts zum Gesuchten (Ziel) (vgl. Abels 2002, S.26; Bruder et al. 2011, S.76). Schlüsselfragen zu dieser Strategie könnten lauten:

„Was ist gegeben? Was weiß ich über das Gegebene? Was kann ich daraus ermitteln?“ (Abels 2002, S.26).

Die Strategie des **Rückwärtsarbeitens** bildet das Gegenteil zum Vorwärtsarbeiten. Sie beginnt am Ende, beim Gesuchten, und arbeitet sich von dort aus zum Gegebenen oder den Voraussetzungen vor (vgl. Abels 2002, S.33; Bruder et al. 2011, S.79; Sewerin 1982, S.151). Ähnlich wie beim Vorwärtsarbeiten kann sich der Problembearbeiter folgende Fragen stellen:

„Was ist gesucht? Was weiß ich über das Gesuchte? Was benötige ich, um das Gesuchte zu ermitteln?“ (Abels 2002, S.34).

Grundlagen der Unterrichtsgestaltung

Zur Förderung und Erhebung der Problemlösekompetenz von Schülern gibt es bereits zahlreiche Studien und Konzepte. Die meisten dieser Studien führen ein Problemlösetraining mit Schülern oder Studenten durch, inklusive eines Vor- und Nachtests, und ziehen darauf aufbauend Schlussfolgerungen bzgl. Lernleistung bzw. Leistungsfortschritt. Gängig ist des Weiteren, dass zwischen explizitem und implizitem Training unterschieden und verglichen wird. In den Studien sind meist (leichte) Vorteile für das explizite Training erkennbar. Man stellt fest, dass sich die meisten Studien, v.a. die älteren, auf Leistungen, Ergebnisse und Kompetenzzuwächse beschränken. Affektive Komponenten wie erhöhtes Interesse, Anstrengungsbereitschaft usw. durch die Explizierung der Heurismen bleiben meist außer Acht.

Auf Grund dieser Tatsache scheint es interessant, die Problemlösekompetenz von Schülern zu testen und sich dabei vornehmlich auf affektive Aspekte zu konzentrieren: Wird die Explizierung von Heurismen als positiv und hilfreich wahrgenommen? Womit haben die Schüler die größten Schwierigkeiten? Fallen ihnen die Aufgabenbearbeitungen durch die Explizierung der Heurismen leichter? usw.

Anlage der Untersuchung und Stichprobe

Um die Problemlösekompetenz von Schülern der Sekundarstufe I zu erheben und gleichzeitig zu fördern, findet eine Felduntersuchung in Form einer dreistündigen Unterrichtseinheit zum Thema Problemlösen in der Klassenstufe zehn eines Gymnasiums statt. Um eine Aussage über den Einfluss der Explizierung von Heurismen treffen zu können, bietet es sich – angelehnt an zahlreiche Studien – an, zwischen einer Experimental- und einer Kontrollgruppe zu unterscheiden: Während in der Experimentalgruppe die Heurismen expliziert werden, werden in der Kontrollgruppe die gleichen Problemstellungen bearbeitet, ohne jedoch die Heurismen explizit zu thematisieren.

Aufgaben: geometrische Denkaufgaben von P. Eigenmann

Die Problemlösefähigkeit der Schüler wird in beiden Klassen anhand geometrischer Denkaufgaben von Paul Eigenmann (1992) erfasst und gefördert. Die Aufgaben lassen sich nicht nach einem bestimmten Schema lösen, sondern regen die Phantasie und logische Denkfähigkeit der Schüler an – man könnte sie also auch als geometrische Denk*probleme* bezeichnen. Dadurch bieten sie die Chance, Zusammenhänge zu entdecken, Wissen nachhaltig zu vernetzen und produktives Denken zu schulen. Sie eignen sich somit hervorragend, um die Problemlösefähigkeit zu testen bzw. zu fördern und um Heurismen explizit herauszuarbeiten (vgl. Eigenmann 1992, S.3).

Methode: Stationenlernen

Die gewählte Unterrichtsmethode zur Erfassung der Problemlösefähigkeit ist in beiden Klassen das Stationenlernen. Dies eignet sich insbesondere in der Experimentalgruppe, da zu dem übergeordneten Thema Heurismen einzelne Teilaspekte thematisiert werden können, die nicht aufeinander aufbauen (vgl. Mattes 2011, S.168; Müller 2010, S.89). Im Sinne der Individualisierung und Differenzierung gibt es in beiden Klassen vier Pflichtstationen und zwei Wahlstationen als Zusatzangebot für schnelle und leistungsstarke Schüler (vgl. Mattes 2011, S.168). Die Lernenden können frei wählen, mit welcher Pflichtstation (P1 bis P3) sie beginnen, die vierte Pflichtstation 4(G) setzt jedoch als gemischte Übung die Bearbeitung der drei ersten Stationen voraus.

Die Auswahl der Heurismen stützt sich auf die Ergebnisse der Untersuchung von Komorek et al. (2004, S.59), welche zu dem Schluss kommen, dass v.a. die Heurismen Tabelle (hier in Verbindung mit dem systematischen Probieren), informative Figur und Gleichung, das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sowie das Zerlegung- und Invarianzprinzip zu positiven Effekten bzgl. der Schülerleistungen führen (vgl. Perels 2003, S.93/122/251, zitiert nach Komorek et al. 2004, S.59).

Ein Laufzettel, welchen die Schüler parallel zur Stationenarbeit ausfüllen, dokumentiert ihren Lernfortschritt (vgl. Mattes 2011, S.168). Zunächst gibt dieser einen kurzen Überblick über den Aufbau und den Ablauf des Stationenlernens, danach werden Aspekte wie Bearbeitungszeit, bearbeitete Aufgabe, Hilfe, Vorgehensweise, Schwierigkeitsgrad und individuelle Rückmeldung zur Station erfasst. Dieser Laufzettel gibt dem Leiter der Untersuchung eine Rückmeldung und dient somit als eine Grundlage der Ergebnisauswertung.

Während der Bearbeitungsphase sollen sich die Schüler im Sinne eines Helfersystems vermehrt gegenseitig unterstützen (vgl. Müller 2010, S.90). Die Lehrkraft muss darauf achten, ein Mindestmaß an Hilfen zu geben und Lösungsideen nicht vorschnell zu verraten, sondern vielmehr Motivations- und Rückmeldungshilfen zu benutzen (vgl. Zech 2002, S.315ff). Zusätzlich zum gegenseitigen Unterstützen liegen am Pult gestaffelte Hilfskärtchen in Form von Schlüsseln zu den einzelnen Problemen bereit (vgl. Leuders et al. 2010, S.16f). Die Tipps auf den Kärtchen beziehen sich eher auf die Metaebene, d.h. konkrete inhaltliche Hilfen werden dosiert und selten verwendet. Vielmehr werden allgemein-strategische und inhaltsorientierte Hilfen eingesetzt (vgl. Zech 2002, S.315ff). In der Experimentalgruppe liegt darüber hinaus an jedem Gruppentisch der reduzierte Problemlösekatalog von Polya aus, welcher in Form eines stummen Impulses als implizite Hilfe benutzt werden kann und ebenfalls zu den allgemein-strategischen Hilfen zu zählen ist (vgl. Polya 1995, Buchdeckel; Zech 2002, S.315ff). Die Selbstkontrolle erfolgt ebenfalls über ein Kärtchen am Pult (vgl. Müller 2010, S.90).

Die Schüler der Experimentalgruppe sind nach der Aufgabenbearbeitung aufgefordert, in der Tischgruppe über ihre Irrwege und Fehler zu diskutieren sowie Lösungswege zu vergleichen. Durch diese Form der Reorganisation wird der Lernertrag gesteigert, die Phase der Reflexion korrespondiert mit der von Polya beschriebenen vierten Phase des Problemlösens (Polya 1995, Buchdeckel).

Literatur

ABELS, L. (2002): Ich hab's – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen. In: mathematik lehren – Mathe-Welt, H.115, S.23-46.

BAUMERT, J., LEHMANN, R., LEHRKE, M., SCHMITZ, B., CLAUSEN, M., HOSENFELD, I., KÖLLER, O. & J. NEUBRAND (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen.

BROCKMANN-BEHNSEN, D. (2014a): Explizites und implizites Heurismentraining im Unterricht. In: Der Mathematikunterricht, H.5, S.19-23.

BRUDER, R. (1992): Problemlösen lernen – aber wie?. In: mathematik lehren, H.52, S.6-13.

BRUDER, R. (2000a): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht. In: FLADE, L. & W. HERGET (Hrsg.): Mathematik. Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin, S.69-78.

BRUDER, R. (2000c): Problemlösen im Mathematikunterricht – ein Lernangebot für alle. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Bd.21, S.2-11.

BRUDER, R. (2002): Lernen, geeignete Fragen zu stellen. In: mathematik lehren, H.115, S.4-9.

BRUDER, R. & C. COLLET (2011[1]): Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin.

COLLET, C. (2009): Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. Münster, Diss. (= Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd.2).

DÖRNER, D. (1979[2]): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz.

EIGENMANN, P. (1992): Geometrische Denkaufgaben. Stuttgart.

GRIESER, D. (2013): Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden.

HAAS, N. (2000): Das Extremalprinzip als Element mathematischer Denk- und Problemlöseprozesse. Untersuchungen zur deskriptiven, konstruktiven und systematischen Heuristik. Berlin, Diss. (=D 82 RWTH Aachen).

HUSSY, W. (1984): Denkpsychologie. Ein Lehrbuch. Band 1. Geschichte, Begriffs- und Problemlöseforschung, Intelligenz. Stuttgart.

HUSSY, W. (1993): Denken und Problemlösen. Stuttgart.

KÖNIG, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: Der Mathematikunterricht, H.3, S.24-38.

KOMOREK, E., BRUDER, R. & B. SCHMITZ (2004): Integration evaluierter Trainingskonzepte für Problemlösen und Selbstregulation in den Mathematikunterricht. In: DOLL, J. & M. PRENZEL (Hrsg.): Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien des Qualitätsverbesserung. Münster, S.54-76.

LEUDERS, T. & K. Philipp (2010): Problemlösestunden planen. In: mathematik lehren, H.158, S.14-17.

MATTES, W. (2011): Methoden für den Unterricht. Kompakte Übersichten für Lehrende und Lernende. Paderborn.

MÜLLER, F. (2010[4]): Selbstständigkeit fördern und fordern. Handlungsorientierte und praxiserprobte Methoden für alle Schularten und Schulstufen. Weinheim, Basel.

PERELS, F. (2003): Ist Selbstregulation zur Förderung von Problemlösen hilfreich? Entwicklung, Durchführung sowie längsschnittliche und prozessuale Evaluation zweier Trainingsprogramme. Frankfurt am Main (=Diss. Technische Universität Darmstadt, Reihe VI Psychologie, Bd.709).

POLYA, G. (1995[4]): Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Tübingen, Basel.

PRENZEL, M., BAUMERT, J., BLUM, W., LEHMANN, R., LEUTNER, D., NEUBRAND, M., PEKRUN, R., ROLFF, H.-G., ROST, J. & U. SCHIEFELE (Hrsg.) (2003). PISA 2003. Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Zusammenfassung. o.O. URL: http://www.bmfsfj.de/doku/Publikationen/genderreport/01-Redaktion/PDF-Anlagen/lit-pisa-ergebnisse-2003,property%3Dpdf,bereich%3Dgenderreport,sprache%3Dde,rwb%3Dtrue.pdf [Stand: 24.10.2015].

ROTT, B. & T. GAWLICK (2014b): Explizites oder implizites Heurismentraining – was ist besser?. In: mathematica didactica, H.37, S.191-212.

SCHEU. G. (2003): Heuristisches Problemlösen nach den Regeln von G. Polya. Ein Zugang zum Lösen von Aufgaben mit und ohne Computer. In: Praxis der Mathematik in der Schule, H.45, S.39-43.

SCHREIBER, A. (2011): Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung. Berlin.

SEWERIN, H. (1982[5]): Mathematische Schülerwettbewerbe. Beschreibungen – Analysen – Aufgaben. Trainingsmethoden mit Ergebnissen einer Umfrage zum Bundeswettbewerb Mathematik. München (= Manz mathematische Texte, Bd. 8).

WINTER, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig, Wiesbaden.

ZECH, F. (2002[10]): Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Weinheim, Basel.

Adresse der Autorin:
Katharina Wilhelm
Fachbereich Mathematik
Universität des Saarlandes
VI. Gartenreihe 51
66740 Saarlouis
kathywil@gmx.de