

Andreas Filler,  
Anselm Lambert (Hrsg.)

# **Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen Raumgeometrie**

Vorträge auf der 31. Herbsttagung des  
Arbeitskreises Geometrie in der  
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik  
vom 12. bis 14. September 2014 in Saarbrücken

Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.):  
Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen  
Raumgeometrie  
AK Geometrie 2014

ISBN

© 2015 by Franzbecker, Hildesheim, Berlin

## Inhaltsverzeichnis

Editorial .....	1
Günter Maresch <i>Raumvorstellungsvermögen: Beiträge des Geometrieunterrichts und Genauigkeit der Richtungsanzeige</i> .....	3
Katharina Gaab <i>Raumgeometrie in der Sekundarstufe I – Basics? Eine aktuelle Aufgabenschau</i> .....	33
Günter Graumann <i>Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie. Aspekte zur Förderung der Vorstellung im Raum</i> .....	57
Hans-Jürgen Elschenbroich <i>Anmerkungen zum Aufbau eines dynamischen Grundverständnisses von Symmetrie und Spiegelungen</i> .....	71
Stephan Berendonk, Marc Sauerwein, Ysette Weiss-Pidstrygach <i>Stempeln mit platonischen Körpern. Vom Raum in die Ebene und zurück</i> .....	85
Hans Walser <i>DIN-Format und Raum</i> .....	105
Autorenverzeichnis .....	121



## Editorial

Andreas Filler, Anselm Lambert

„Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen“ ist ein längerfristiges Leitthema des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Bei der Herbsttagung 2014 wurden unter dieser Perspektive vor allem Inhalte der Raumgeometrie diskutiert, wobei Aufgaben zur Körpergeometrie, die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens sowie natürlich auch Beziehungen und Analogien zwischen der Geometrie der Ebene und der des Raumes (u. a. bezogen auf geometrische Abbildungen) im Mittelpunkt des Interesses standen.

Den Hauptvortrag der Herbsttagung hielt *Günter Maresch* aus Salzburg zu möglichen erfolgreichen Beiträgen des Geometrieunterrichts zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens. Er beschreibt das Projekt *GeodiKon*, in dessen Rahmen untersucht wird, inwieweit eine umfassende und ausgewogene Schulung der Faktoren der Raumvorstellung und eine Bewusstmachung der unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien von Raumvorstellungsaufgaben zu einem besseren Raumvorstellungsvermögen führt. Dabei geht er u. a. auf Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben und auf Raumvorstellungstests ein.

Einen Überblick über die Berücksichtigung elementarer Raumgeometrie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I (insbesondere der Hauptschule bzw. vergleichbarer Schulformen) gibt *Katharina Gaab*. Sie stellt fest, dass die Raumgeometrie sowohl in den Vorgaben der Bildungsstandards als auch in der Schulwirklichkeit nicht hinreichend berücksichtigt wird und erhärtet dies u. a. durch Anforderungen und Aufgaben in der Berufsausbildung. Abschließend stellt sie Ansätze vor, die bestehende Lücke zwischen schulischen Inhalten und beruflichen Anforderungen im Bereich der Raumgeometrie zu schließen.

Im Zentrum des Beitrags von *Günter Graumann* stehen Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie. Er behandelt analoge Begriffe, Aufgabenstellungen und Sätze zu den Themen gerade Linien und ebene Flächen, senkrecht und parallel, Kongruenzabbildungen und Symmetrie, Dreiecke und Dreieckspyramiden, Haus der Parallelogramme und Parallelepipede, Kreis und Kugel sowie regelmäßige Vielecke und Platonische Körper.

Geometrische Abbildungen in der Ebene und im Raum bilden den Schwerpunkt der beiden folgenden Beiträge. *Hans-Jürgen Elschenbroich* zeigt anhand von Schulbuch-Beispielen auf, wie Fehlvorstellungen zur Symmetrie durch die begriffliche Vermischung von Abbildung und Symmetrie erzeugt werden. Weiterhin geht er auf Probleme ein, die damit zusammenhängen, dass Ebenenspiegelungen im Raum als Beispiele bzw. Veranschaulichungen für Geradenspiegelungen in der Ebene genutzt werden, ohne auf Analogien und Unterschiede einzugehen.

Mit Bewegungen der Ebene und des Raumes befasst sich der Beitrag von *Stephan Berendonk*, *Marc Sauerwein* und *Ysette Weiss-Pidstrygach*. Nach einer Diskussion von Problemen bei der Behandlung geometrischer Abbildungen in der Schule und auch in der Lehramtsausbildung befassen sich die Autoren mit Kippspuren platonischer Körper als einem Zugang, um ebene und räumliche Phänomene beziehungsreich darzustellen. Damit verbundene Ziele sind u. a. die Erkundung der Ebene und des Raumes durch eine einfache Bewegung (Kippen) und deren Spuren sowie die handlungsorientierte Betrachtung der Kompositionen von Bewegungen bis hin zu strukturellen Überlegungen.

Dass hinter dem DIN-Format interessante Mathematik steckt, ist allgemein bekannt. Aber was hat dieses Papierformat mit dem Raum zu tun? Der Beitrag von *Hans Walser* beantwortet diese Frage ausführlich. Ausgehend von didaktischen und erkenntnistheoretischen Problemen der Raumgeometrie stellt er zunächst einige Modelle von Polyedern vor, welche aus Papier im DIN-Format hergestellt werden können. Anschließend wird die Grundidee des DIN-Formats auf andere Figuren und auch auf Körper übertragen, wobei nicht nur der dreidimensionale Raum eine Rolle spielt.

# **Raumvorstellungsvermögen: Beiträge des Geometrieunterrichts und Genauigkeit der Richtungsanzeige**

**Günter Maresch**

Zusammenfassung. Der Beitrag erörtert zwei spezielle Ergebnisse der Analysen des Forschungsprojekts GeodiKon. Im Rahmen des Projekts, an dem 903 SchülerInnen teilnahmen, wurde untersucht, ob eine umfassende und ausgewogene Schulung der Faktoren der Raumvorstellung und eine Bewusstmachung der unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien von Raumvorstellungsaufgaben zu einem besseren Raumvorstellungsvermögen bzw. zu einer besseren Lösekompetenz von Raumvorstellungsaufgaben führt. Die Resultate in Bezug auf die Abhängigkeiten der Genauigkeit der Richtungsanzeige beim räumlichen Orientierungstest Spatial Orientation Test und Befunde zu Effekten des Geometrieunterrichts in Bezug auf die Förderung des Raumvorstellungsvermögens werden diskutiert.

## **Einführung**

Vor knapp mehr als 100 Jahren wurde der Begriff des Raumvorstellungsvermögens als eine der grundlegenden Teile menschlicher Intelligenz erkannt und in entsprechenden Intelligenzmodellen ausgewiesen (unter anderem von Spearman, 1904; El Koussy, 1935; Thurstone, 1938). In einem weiteren Schritt wurde diese Intelligenzfacette eingehender erforscht, wobei das Identifizieren der konstituierenden Faktoren der Raumintelligenz und damit verbunden das Etablieren von strukturierten Modellen des Raumvorstellungsvermögens das Ziel zahlreicher Untersuchungen war (Cattell, 1963; El Koussy, 1935; Gardner, 1991; Guilford, 1967; Maier, 1994; Thurstone, 1950; Vernon, 1961). Weiterführende Forschungsarbeiten zeigten, dass die Raumintelligenz nicht alleine durch genetische Vererbung in ihrem Umfang und Potential fundiert und schließlich beschränkt ist, sondern dass diese Intelligenzfacette durch gezielte Förderung und ausgewogenes Training verbessert werden kann (Glück u. Vitouch, 2008; Glück et al, 2005). Nun ist es – nicht zuletzt wegen des Wissens der Trainierbarkeit des Raumvorstellungsvermögens – eines der zentralen Anliegen des Geometrieunterrichts Raumvorstellung zu fördern und das Raumvorstellungsvermögen der Lernenden zu verbessern. Der jeweils gültige Lehrplan stellt zu meist das zentrale Instrument für die Vorbereitung des Unterrichts dar. Das Kompetenzmodell für Geometrisches Zeichnen (Mick et al., o.J.), Darstellende Geometrie (Kraker et al., 2012), Mathematik (4. und 8. Schulstufe:

Bifie, o.J.; 12. Schulstufe: Liebscher, et al., 2013) und oftmals auch die vorliegenden Schulbücher bestimmen ebenfalls die inhaltliche Unterrichtsplanung zu einem maßgeblichen Teil. Doch inwiefern werden die psychologischen Erkenntnisse über die Raumintelligenz und deren einzelne Faktoren – gerade unter dem Aspekt der Trainierbarkeit, Förderung und Weiterentwicklung des Raumvorstellungsvermögens – im Unterricht bewusst integriert? Die Analyse von geometrischen Aufgaben, welche im Mathematikunterricht der ersten bis zur zehnten Schulstufe gestellt werden, zeigt auf, dass vorrangig der Faktor räumliche Visualisierung/Veranschaulichung angesprochen wird, die weiteren Faktoren der Raumvorstellung dahingegen gar nicht bzw. nur zu einem deutlich untergeordnetem Maße im Unterricht enthalten sind (Maier, 1994, S. 237 ff). Diese Situation führte uns zur Frage: Wirkt sich eine aktive Auswahl von Unterrichts-Beispielen, welche in einem ausgewogenen Maße die unterschiedlichen Faktoren des Raumvorstellungsvermögens trainieren, positiv auf die Förderung der Raumintelligenz aus? Das Forschungsprojekt GeodiKon (Entwicklung eines *didaktischen Konzepts* für den *Geometrieunterricht*) beschäftigt sich gezielt mit diesem Fragenkomplex.

Ein weiteres Themenfeld wurde im Rahmen von GeodiKon adressiert: Die Messung der Raumintelligenz bei Lernenden erfolgt zumeist im Rahmen von Tests. Diese Tests sind im Allgemeinen aus unterschiedlichen Aufgabengruppen und -typen aufgebaut, welche gezielt unterschiedliche Faktoren der Raumintelligenz adressieren und schließlich ausweisen, inwiefern die einzelnen Faktoren bei Individuen ausgeprägt sind. Diese speziellen Aufgabengruppen, die gezielt die Fähigkeiten von Individuen bei einzelnen Faktoren aufzeigen, werden als sogenannte „Marker“ für den jeweiligen Faktor bezeichnet (Hegarty u. Waller, 2005). Nur dann, wenn die einzelnen Markeraufgaben mit der intendierten Bearbeitungsstrategie von ProbandInnen bearbeitet werden, wird tatsächlich die Fähigkeit eines Individuums bei dem jeweiligen Faktor erhoben und nur dann können valide, aussagekräftige und vergleichbare Ergebnisse nach der Testauswertung erwartet werden. Die jüngere Literatur über Raumintelligenzforschung zeigt oftmals die Problematik auf, dass ProbandInnen durchwegs situativ-individuell unterschiedliche Bearbeitungsstrategien für die Lösung von Raumvorstellungsaufgaben verwenden (Glück u. Vitouch, 2008; Kaufmann, 2008; Souvignier, 2000). Dies eröffnet ein breites Feld an Fragen, wie z.B.: Inwiefern kann mit Raumvorstellungstests tatsächlich die Fähigkeit von Individuen



bei den unterschiedlichen Faktoren der Raumintelligenz erhoben werden? Oder: Welche und wie viele unterschiedliche Strategien zur Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben verwenden Lernende?

Strategien rücken somit mehr und mehr in den Fokus der Betrachtungen. Aussagen wie „Der flexible Einsatz von Strategien bzw. der Einsatz einer adäquaten Strategie je nach Aufgabenstellung, ist ein wichtiger Faktor bei der Erzielung optimaler Leistungen bei räumlichen Aufgaben“ (Kaufmann, 2008; Glück et al., 2005) oder „Der Umfang des Strategierepertoires einer Person und ihre Flexibilität bei der Anpassung an die Anforderungen der jeweiligen Aufgabenstellung sind deshalb relevanter für Alltagsleistungen als einfache kognitive Basisprozesse“ (Glück u. Vitouch, 2008) bestärken die Intention, Bearbeitungsstrategien näher zu untersuchen. Hinweise darauf gibt es nicht zuletzt bereits bei Maier (1994, S. 55) mit der Aussage, dass „übliche alternative Lösungsstrategien mittels weiterer kognitiver Qualifikationen oder veränderter räumlich-visueller Bezüge deshalb die gebotene Beachtung finden sollten“. Im Rahmen des Forschungsprojekts GeodiKon wurde das Themenfeld „Strategien“ bewusst aufgegriffen um Fragen wie „Mit welchen Bearbeitungsstrategien bearbeiten ProbandInnen Raumvorstellungstests?“ oder „Wirkt sich eine bewusste Schulung von unterschiedlichen Lösungsstrategien und damit verbunden das Erweitern des individuellen Strategierepertoires positiv auf das Raumvorstellungsvermögen aus?“ näher zu beleuchten.

## **Die Forschungshypothesen**

Die beiden Themenfelder Faktoren und Bearbeitungsstrategien stellen den Fokus der Untersuchungen im Rahmen von GeodiKon dar. Zwei Forschungshypothesen wurden formuliert:

1. Das Training (Bewusstmachung, Kategorisierung, angewandtes Üben) jedes einzelnen der Faktoren der Raumintelligenz bewirkt eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens.
2. Die Schulung (Bewusstmachung, Kategorisierung, Verinnerlichung) eines Strategierepertoires zur Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben bewirkt eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens.

Die im Projekt erhobene Vielzahl von Daten ermöglicht neben der Suche von Antworten auf die beiden obigen Hypothesen unter anderem das Formulieren von Hinweisen über einen Zusammenhang von speziellen Freizeitaktivitäten und Raumintelligenz, über einen Zusammenhang von Computernutzung und Raumintelligenz, über die Peilgenauigkeit von Individuen und über geschlechtsspezifische Effekte. In diesem Beitrag werden konkret die Beiträge des Geometrieunterrichts zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens und die Peilgenauigkeit von Individuen erörtert.

Welches der zahlreichen in der Literatur formulierten Faktorenmodelle der Raumintelligenz sollte bei GeodiKon verwendet werden? Während der faktoriellen Phase der Raumintelligenzforschung (Maresch, 2013) zwischen 1950 und 1994 wurden von zahlreichen ForscherInnen faktorenbasierte Modelle des Raumvorstellungsvermögens beschrieben (z.B. Thurstone, 1950; French, 1951; Guilford, 1956; Rost, 1977; Lohman, 1979; McGee, 1979; Linn u. Peterson, 1985; Lohmann, 1988; Carroll, 1993 und Maier, 1994). Eine eingehende Analyse und ein Vergleich dieser Modelle wurden zu Beginn des Projekts GeodiKon durchgeführt (Maresch, 2013). Der Ansatz von Maier (Maier, 1994) wurde als Zusammenführung der bis zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Modelle formuliert und diente daher für GeodiKon als Ausgangspunkt der Betrachtungen. Das 3-Faktoren-Modell von Thurstone (1950) mit den Faktoren Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Beziehungen und Räumliche Orientierung diente Maier als Grundlage seines Ansatzes und das ebenfalls aus 3 Faktoren bestehende Modell von Linn u. Petersen (1985) mit den Elementen Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Wahrnehmung und Mentale Rotation erwies sich als „herausragende Ergänzung“ (Maier, 1994, S. 50) dazu. Somit fasste Maier diese beiden Modelle zusammen und formulierte sein Modell mit den fünf Faktoren Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Wahrnehmung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation und Räumliche Orientierung (Maier, 1994, S. 51). Bei der näheren Untersuchung des Modells von Maier konnte festgehalten werden, dass die vier Faktoren Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation und Räumliche Orientierung in der Literatur bei mindestens jeweils drei bis zu neun weiteren Modellen anderer ForscherInnen ebenfalls postuliert wurden (Maresch, 2013). Lediglich der Faktor Räumliche Wahrnehmung wurde nur von Linn u. Petersen (1985) formuliert. Die Beschreibung dieses Faktors zeigt, dass mit Räumlicher Wahr-

nehmung im Sinne Linn u. Petersens (1985, Maier, 1994) konkret die „Fähigkeit zur Identifikation der Horizontalen und Vertikalen“ angesprochen wird. Diese sehr spezifische Fähigkeit erachten unter anderem Thurstone (1950) als integrativen Teil des Faktors Räumliche Orientierung. Die Räumliche Wahrnehmung wurde daher nicht weiter als eigenständiger Faktor berücksichtigt. Bei GeodiKon wurde somit das Modell von Maier – jedoch ohne den Faktor Räumliche Wahrnehmung – als Basis für die Entwicklung der Lernmaterialien und der Zusammenstellung der Testbatterien verwendet.

Konkret beinhaltet das faktorielle Modell der Raumintelligenz für GeodiKon die vier Faktoren:

- Veranschaulichung/räumliche Visualisierung
- Räumliche Beziehungen
- Mentale Rotation
- Räumliche Orientierung

Neben den Faktoren der Raumintelligenz stellt das Bewusstmachen von unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben den Fokus bei GeodiKon dar. Als Ziel kann erachtet werden, dass Informationen über Strategien möglichst fokussiert, klar und strukturiert an die SchülerInnen weitergegeben werden können. Um dies realisieren zu können, wurde eine Recherche der vorliegenden Literatur vorgenommen (Maresch, 2014b). Konkrete Auflistungen von unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien lieferten unter anderen Barratt (Key features strategies, Move object strategies, Move self strategies) (1953), Just u. Carpenter (Mentale Rotation um das Weltkoordinatensystem, Mentale Rotation um ein Benutzerkoordinatensystem, Merkmale von Objekten miteinander vergleichen, Perspektivenwechsel) (1985), Dünser (Man bewegt sich selbst oder man bewegt das Objekt, Konzentration auf Details oder auf das Ganze, Nachdenken und Vorstellen) (2005, S. 159) und Schultz (Mental rotation strategy, Perspective change strategy, Analytic strategy) (1991). Zusätzlich zu den erwähnten Strategien werden oftmals weitere Bezeichnungen und Begriffe wie Ausweichstrategien, Ergänzungsstrategien, Mischstrategien, verbal-analytische Strategien sowie logisch-folgerndes Denken (Grüßing, 2002; Maier, 1994; Souvignier, 2000) formuliert, die nach näherer Betrachtung als integrative Teile der obigen Strategien zugeordnet werden können.

Die Analyse von Strategieuntersuchungen ergab, dass vier Paare von verwendeten Lösungsstrategien identifiziert werden können. Diese vier Strategiepaare erheben nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, wenngleich eine Großzahl von Publikationen diese vier Strategiepaare bzw. diverse Teilmengen daraus als DIE relevanten Strategien erkannten (Maresch, 2014a).

Das strukturierte Modell der „*Vier Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben*“, welches bei GeodiKon verwendet wurde, lautet:

1. Holistische (ganzheitliche) Strategie – Analytische Strategie
2. Räumliches Denken – Flächendenken
3. Objekte werden bewegt – BearbeiterIn bewegt sich
4. Verifizierende Strategie – Falsifizierende Strategie

(Maresch, 2014a)

Die einzelnen Paare von Strategien für die Lösung von Raumvorstellungsaufgaben stellen jeweils Gegenpole dar. Geometrische Objekte werden bei Testfragen im Allgemeinen entweder ganzheitlich (holistisch) erfasst oder sie werden analytisch (Einzelteil für Einzelteil) betrachtet. Versuchspersonen generieren sich entweder ein mentales räumliches Modell der abgebildeten Objekte (Räumliche Strategie) oder nehmen das ebene Abbild des Objektes als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen (Flächendenken). Bei der Lösung von Raumvorstellungsaufgaben positionieren sich ProbandInnen oftmals außerhalb der Aufgabenkonstellation und bewegen für die Lösungsfindung die Szene mental. Im Gegensatz dazu versetzen sich Testpersonen – vor allem bei Aufgaben zur räumlichen Orientierung – in die gegebene Szene und bewegen sich mental durch die in der Aufgabe dargestellten Objekte. Schließlich kann bei Versuchspersonen ein generell verifizierendes oder falsifizierendes Vorgehen bei der Lösungsfindung beobachtet werden. Bei mehreren Lösungsmöglichkeiten einer Aufgabe wird entweder versucht, direkt auf die richtige Lösung zuzusteuern oder es wird im ausschließenden Verfahren vorgegangen, indem falsche Lösungen ausgeschlossen werden und somit die einzig richtige schließlich als letzte noch nicht ausgeschlossene Lösungsmöglichkeit vorhanden ist (Maresch, 2014a).

Eine eingehende Argumentation dieser Zusammenstellung, Merkmale dieser Strategien und Querverbindungen zwischen den einzelnen angeführten Strategien kann bei Maresch (2014a) entnommen werden.

## **Beschreibung der Studie**

Das Forschungsprojekt GeodiKon des österreichischen Unterrichtsministeriums und der Pädagogischen Hochschule Salzburg wurde in den Jahren 2013 und 2014 in den drei österreichischen Bundesländern Niederösterreich, Salzburg und Steiermark durchgeführt. Projektpartner des Projekts waren die Kirchlich-Pädagogische Hochschule *Wien-Krems*, die Pädagogische Hochschule *Wien*, die Pädagogische Hochschule *Niederösterreich*, die Pädagogische Hochschule *Steiermark*, die *Universität Salzburg*, die *Universität Innsbruck*, die *Technische Universität Wien* und die *Arbeitsgruppe Didaktische Innovation*.

Das Finden von Hinweisen auf die oben formulierten Forschungshypothesen war das Kernziel des Projektes. Um dieses zu erreichen, wurden folgende Zwischenziele/Milestones (M) formuliert:

- M1. Entwicklung von Lernmaterialien für 12 Lernwochen zur Schulung der Faktoren der Raumvorstellung (Linn u. Petersen, 1985; Maier, 1994; Thurstone, 1950; Maresch, 2014b) mit dem Ziel, bei den SchülerInnen eine ausgewogene und umfassende Entwicklung der Raumvorstellung zu fördern
- M2. Entwicklung eines strukturierten Modells von anwendbaren Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben (Barratt, 1953; Just u. Carpenter, 1985; Schultz, 1991) mit dem Ziel, das Strategierepertoire der Lernenden zu erweitern
- M3. Entwicklung der Testbatterie, Durchführung der Pre- und Posttests in den Klassen und Schulung der TestklassenlehrerInnen im Umgang mit den Lernmaterialien und den Strategieinformationen; Auswertung und Analyse der Daten
- M4. Zusammenstellung der entwickelten Lernmaterialien und der gewonnenen Erkenntnisse des Projekts zu einem Buch für LehrerInnen, welche geometrische Inhalte im Unterricht vermitteln, für SchülerInnen zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens und weitere am Training der Raumintelligenz Interessierter
- M5. Schulung von Lehrenden und Studierenden im Umgang mit den Lernmaterialien im Rahmen von Fortbildungsseminaren und Workshops und Dissemination der Erkenntnisse des Projekts bei Tagungen und Publikationen

Die Studie wurde im Pretest-Posttest-Design durchgeführt. Während der ersten Phase des Projekts (Jänner bis September 2013) wurden spezielle Lernmaterialien für 12 Wochen Geometrie-Unterricht und die Testbatterie zusammengestellt. Im September und Oktober 2013 fanden die Pretests in sämtlichen Testklassen statt. Danach schloss direkt die Interventionsphase an, wo die entwickelten Lernmaterialien im Unterricht eingesetzt wurden und die Schulung des Strategierepertoires erfolgte. Die Lernmaterialien bestanden aus mehr als 100 kurzen Übungen, bei denen alleine durch Überlegung ohne Zirkel und Lineal die Lösungen gefunden und eingetragen/markiert/berechnet werden können.

Zwei Beispiele:

1. Schlauchfiguren (siehe Abb. 1)

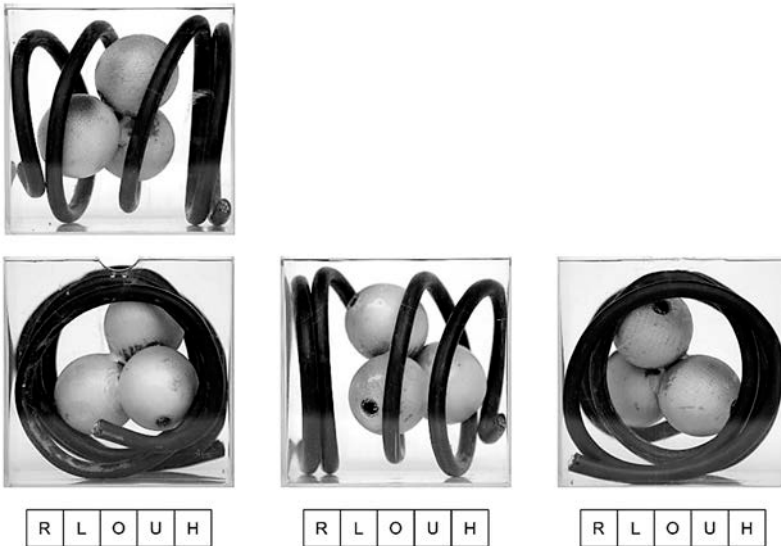


Abb 1: Jede der Aufgaben zeigt Fotos eines durchsichtigen Würfels, in dem sich schlauchartige Objekte befinden. Das linke obere Foto zeigt jeweils die Ausgangsstellung des Objekts „von vorn“. Alle weiteren Fotos zeigen andere Ansichten.

Aufgabe: Gib bei jedem Foto an, von welcher Seite der Ausgangsstellung es aufgenommen wurde.

Möglich sind: Von rechts (R), von links (L), von oben (O), von unten (U) und von hinten (H).

## 2. Würfel-Stempel (siehe Abb. 2)

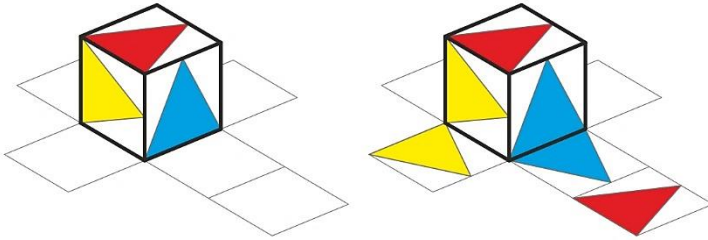


Abb. 2: Aufgabe: Kippe den „Würfel-Stempel“ und zeichne die Stempelabdrücke ein, die er hinterlässt. Nicht sichtbare Seitenflächen des Würfels tragen kein Muster.

Links ist ein Beispiel für eine Aufgabe abgebildet, rechts daneben die Lösung dieser Aufgabe.

Die Literatur zu den Bearbeitungsstrategien von geometrischen Aufgaben wurde zu Beginn des Projekts studiert und daraus ein kompaktes und für SchülerInnen möglichst intuitiv erfassbares Modell von vier Strategiepaaren entwickelt (Maresch, 2014a). Dieses Modell und zu jedem Strategiepaar einfache Beschreibungen wurden jeder Testklasse, die sich mit den Strategien beschäftigte, zur Verfügung gestellt. Die LehrerInnen dieser Testklassen hatten die Aufgabe, möglichst oft im Unterricht unterschiedliche Strategien anzusprechen, diese an passenden Beispielen bewusst zu machen und somit das Strategierepertoire der SchülerInnen zu erweitern.

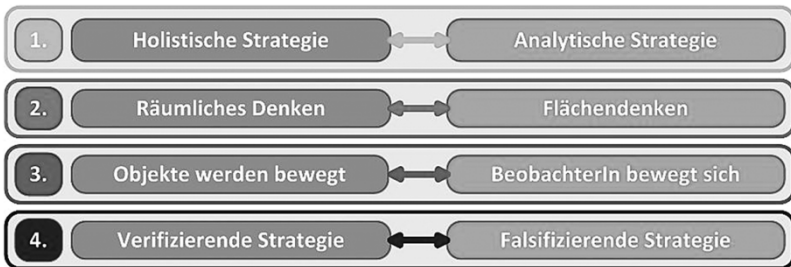


Abb. 3: Überschriften-Teil des Plakates für diejenigen SchülerInnen, die mit den Strategien im Unterricht gearbeitet haben

Im Jänner und Februar 2014 wurden die Posttests an den Schulen durchgeführt. Danach (März bis Oktober 2014) erfolgte die Auswertung der Daten, die Aufbereitung der Erkenntnisse, die Zusammenstellung der Lernmaterialien zu einem Buch (Maresch et al., 2014) für Lehrende der Sekundarstufe und die Dissemination der Ergebnisse und Lernmaterialien im Rahmen von Workshops, Tagungen und mittels Publikationen.

Am Projekt nahmen 46 Klassen mit insgesamt 903 SchülerInnen im Alter von 12 bis 14 Jahren aller österreichischen Schultypen der Sekundarstufe I (Hauptschule (HS), Neue Mittelschule (NMS), Allgemeinbildende Höhere Schule (AHS)) in den drei Bundesländern Niederösterreich, Salzburg und Steiermark teil. Die Einladung zur Teilnahme am Projekt erging an 2.260 LehrerInnen an AHS und HS/NMS (606 an AHS und 1.654 an HS/NMS) via digitalem Newsletter, der in regelmäßigen Abständen an Geometrielehrende im deutschsprachigen Raum (mit vorrangig österreichischen EmpfängerInnen) verschickt wird. Ursprünglich war das Projekt für 10 Klassen konzipiert. Aufgrund der großen Anzahl der Interessensbekundungen für die Teilnahme am Projekt, wurde die Anzahl der teilnehmenden Klassen auf 46 erhöht. Mehr als die doppelte Zahl an bewerbenden Klassen (97) konnte registriert werden. Auswahlkriterien für Teilnahme am Projekt waren: Zugehörigkeit zu einem der Bundesländer Niederösterreich, Salzburg oder Steiermark und eine insgesamt möglichst ausgewogene Gleichverteilung der Teilnehmenden hinsichtlich Geschlecht, Alter, Schultyp und Stadt- bzw. Landschule. Die jeweils 12 Testklassen in Salzburg und der Steiermark und die 22 Testklassen aus Niederösterreich wurden jeweils von Bundeslandkoordinatoren (2 Personen in Niederösterreich, 1 Person in Salzburg und 2 Personen in der Steiermark) betreut. Diese fünf Personen wurden als Testleiter eingeschult und führten sämtliche Pretests und Posttests in den Testklassen nach gleichlautendem Ablaufplan (inkl. gleichen Zeitvorgaben und Instruktionen für die SchülerInnen) durch.

Die TestklassenlehrerInnen wurden ebenfalls in allen drei Bundesländern im Umgang mit den Lernmaterialien und den Informationen über die unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien von Raumvorstellungsaufgaben vertraut gemacht, sodass ein möglichst einheitlicher Einsatz während des Treatments gewährleistet werden konnte. Die Bearbeitung der für die 12 Wochen der Interventionsphase zusammengestellten speziellen Lernmaterialien betrug pro Woche durchschnittlich die Hälfte einer Unterrichtsstunde (= 25 Minuten; max. 35 Minuten) im Gegenstand Geometrisches Zeichnen. Die zweite Hälfte der Unterrichtsstunde konnten die TestklassenlehrerInnen unabhängig vom Projekt gestalten.

Im Pretest-Posttest-Design wurden bei allen teilnehmenden SchülerInnen vor der Interventionsphase mittels Pretests und direkt nach der Interventionsphase durch die Posttests der Leistungsstand durch Paper-Pencil-Tests



erhoben. Im Anschluss wurden bei der Auswertung der Daten vorrangig die Leistungsunterschiede zwischen Pre- und Posttest analysiert.

## Die Testbatterie

Das zentrale Element der Testbatterie für die Pretests und Posttests stellten die vier Raumvorstellungstests Dreidimensionaler Würfeltest (3DW-Test) (Gittler, 1984), Differential Aptitude Test (DAT) (Bennett et al., 1973), Mental Rotation Test (MRT) (Peters et al., 1995) und Spatial Orientation Test (SOT) (Hegarty u. Waller, 2004) dar. Weitere Fragebögen adressierten folgende Themenbereiche: Bearbeitungsstrategien der Aufgaben bei den einzelnen Tests, Informationen über Geschlecht, Alter, Computererfahrung und -interessen, Freizeitaktivitäten, Schulnoten des vergangenen Schuljahres in Mathematik, Deutsch und Englisch sowie Lerntyp. Für die bessere Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse seien im Folgenden die vier verwendeten Raumvorstellungstests vorgestellt.

### *Dreidimensionaler Würfeltest (3DW-Test) (Gittler, 1984)*

Bei diesem Test ist zu prüfen, ob einer der Würfel A bis F derselbe Würfel sein kann wie der Würfel X, oder ob die Antwort G "kein Würfel richtig" zutreffend ist. Jedes Muster auf den Seitenflächen eines Würfels kommt nur einmal vor (vgl. Gittler, 1984). Der für dieses Forschungsprojekt vom Testautor G. Gittler adaptierte 3DW-Test beinhaltet 13 Aufgaben (die erste davon eine nichtausgewertete „hidden warming up“-Aufgabe), für deren Bearbeitung 15 Minuten als maximale Testdauer festgelegt wurden.

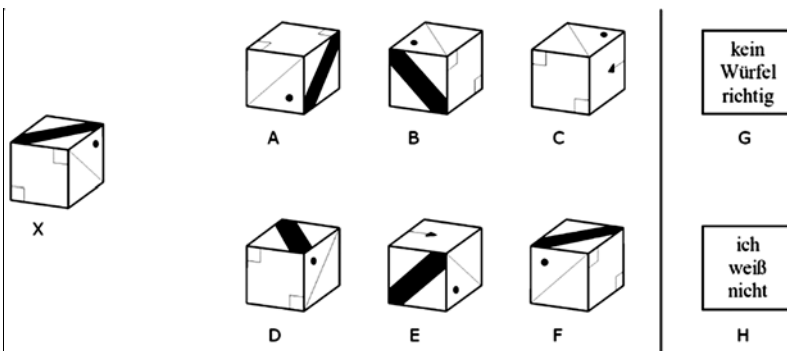


Abb. 4: Ein Beispiel aus dem Dreidimensionalen Würfeltest (Gittler, 1984)

*Differential Aptitude Test (DAT) (Bennett et al., 1973)*

Die Aufgaben dieses Tests bestehen aus Faltvorlagen mit Schattierungen oder Mustern. Diese Faltvorlagen können zu 3-dimensionalen Figuren gefaltet werden. Jede Aufgabe zeigt eine Faltvorlage und vier 3-dimensionale Figuren. Jene Figur A, B, C oder D ist zu identifizieren, welche aus der Faltvorlage erstellt werden kann. Der Test beinhaltet 15 Aufgaben, wobei bei jeder Aufgabe exakt eine Lösung korrekt ist und die Testzeit mit 8 Minuten vorgegeben war.

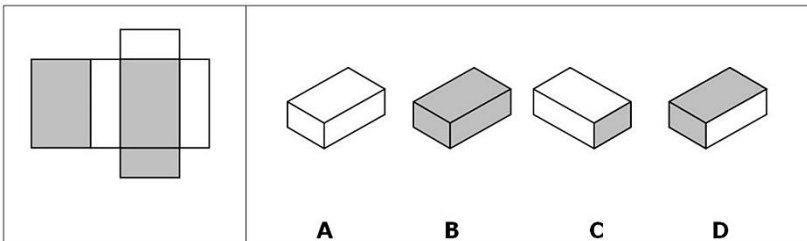


Abb. 5: Ein Beispiel aus dem Differential Aptitude Test (Bennett et al., 1973)

*Mental Rotation Test (MRT) (Peters et al., 1995)*

Bei diesem Test ist jeweils das Objekt links gegeben. Zwei der vier Abbildungen A, B, C und D rechts daneben zeigen dasselbe Objekt. Diese beiden Objekte sollen herausgefunden werden. Ein Beispiel wurde genau dann als korrekt gelöst gewertet, wenn beide richtigen Lösungsobjekte markiert wurden. Genau dann und nur dann wurde ein Punkt vergeben. Der Test besteht aus 24 Aufgaben für deren Bearbeitung 6 Minuten Testzeit festgelegt war.

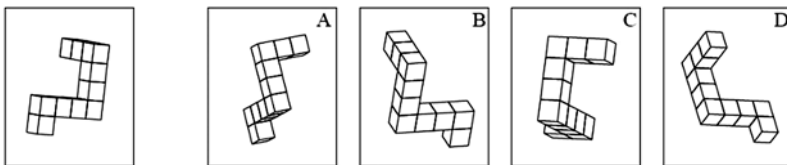
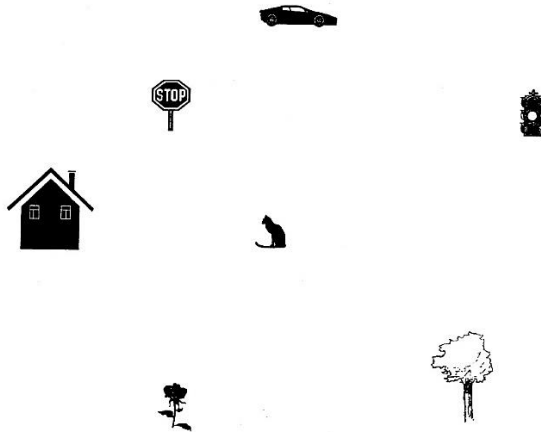


Abb. 6: Ein Beispiel aus dem Mental Rotation Test (Peters et al., 1995)

*Spatial Orientation Test (Hegarty u. Waller, 2004)*

Dieser Test misst die Fähigkeit, sich verschiedene räumliche Orientierungen vorstellen zu können.

Jede Aufgabe hat dasselbe Bild als Ausgangssituation. Die Testpersonen sollen sich vorstellen, bei einem dieser Objekte zu stehen und von dort zu einem anderen Objekt zu blicken. Dann sollen Sie bestimmen, in welcher Richtung von dieser Position aus ein drittes Objekt liegt und diese Richtung in einem beim Test vorgegebenen Kreis als Pfeil einzeichnen (Hegarty u. Waller, 2004). Bei diesem Test werden keine Punkte vergeben. Vielmehr wird der Abweichungswinkel von der richtigen Lösung gemessen. Dieser Winkel wird nicht orientiert gemessen, sodass sämtliche Abweichungswinkel im Bereich von  $0^0$  und  $180^0$  liegen. Der SOT besteht aus 12 Aufgaben für deren Bearbeitung 8 Minuten als Testzeit vorgegeben war.



**Beispiel:**

Stellen Sie sich vor, Sie stehen bei der **Blume** und blicken zum **Baum**.  
Zeigen Sie zur **Katze**.

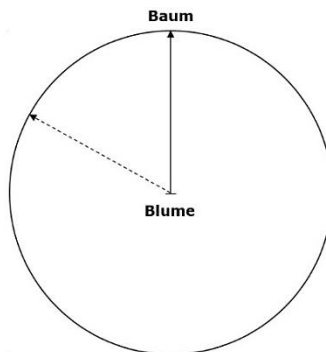


Abb. 7: Ein Beispiel aus dem SOT (Hegarty u. Waller, 2004)

Für die Erhebung der verwendeten Bearbeitungsstrategien wurde folgende Vorgehensweise gewählt: Nach jedem der vier durchgeführten Raumvorstellungstests erhielten die SchülerInnen eine beliebige Aufgabe des jeweiligen Tests nochmals zur Bearbeitung. Beim Lösen der Aufgabe sollten sich die ProbandInnen selbst beobachten, mit welcher Strategie sie die jeweilige Aufgabe lösen. Nachfolgend ist ein Teil des Strategiefragebogens zu sehen, bei dem in einer achtstufigen Skala direkt nach dem Lösen des jeweiligen Beispiels die vier Möglichkeiten, welche das zugrundeliegende Modell der vier Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben adressiert, zwischen den beiden Polen zu beantworten waren.

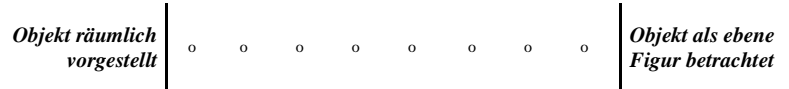
**Das gesamte Objekt betrachtet:** Du hast dir das gesamte Objekt vorgestellt. Du hast dich nicht nur auf einzelne kleine Teile des Objektes konzentriert, sondern hast auf „einen Blick“ das Gesamtobjekt erfasst und die Lösung erarbeitet.

**Nur Teile des Objektes betrachtet:** Du hast dich bei der Lösung auf die Betrachtung einzelner Teile des Gesamtobjektes konzentriert und musstest nicht das gesamte Objekt für den Lösevorgang verwenden.



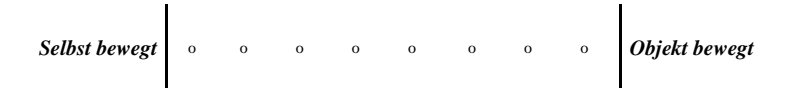
**Objekt räumlich vorgestellt:** Du hast dir das gegebene Objekt als **räumliches und damit 3-dimensionales Objekt** vorgestellt.

**Objekt eben vorgestellt:** Du hast dir das gegebene Objekt als **ebenes und damit 2-dimensionales Objekt** vorgestellt.



**Selbst bewegt:** Du hast dich selbst in die Szene hineinversetzt, deine Perspektive verändert und dich selbst bewegt.

**Objekt bewegt:** Du hast das Bild des gezeigten **Objekts** (vielleicht auch die Verbindungslinien) **bewegt**, z. B. verschoben oder gedreht und hast die Objekte als Betrachter von außen gesehen.



***Falsche Lösungen zuerst ausgeschlossen (falsifizierend):***

Du hast alle möglichen Lösungen betrachtet und hast vorerst die erkennbar falschen ausgeschlossen und hast dich Stück für Stück zur richtigen Lösung vorgearbeitet.

***Direkt richtige Lösung gesucht (verifizierend):***

Du hast beim Lösevorgang direkt versucht, die richtige Lösung zu finden.

*Falsche Lösungen  
zuerst ausge-  
schlossen*

o o o o o o o o

*Direkt richtige  
Lösung gesucht*

**Ergebnisse**

An den Testungen nahmen 903 SchülerInnen in 46 Testklassen teil. Von diesen 903 SchülerInnen waren 786 bei beiden Tests anwesend. Es gab keine Hinweise auf systematische Ausfälle, wodurch auf Fallebene MCAR (missing completely at random) angenommen wurde. Von den 786 bei beiden Tests anwesenden SchülerInnen gaben 771 auswertbare Testbögen ab. Diese 771 SchülerInnen (413 männliche und 358 weibliche) bildeten die Basis der Datenanalysen.

Sämtliche 46 Testklassen wurden in 4 Untergruppen eingeteilt, sodass einerseits der globale Effekt aller Treatmentklassen (Untergruppen A, B und C) im Vergleich zur Kontrollgruppe (Untergruppe D) analysiert werden konnte und zudem auch Hinweise zu speziellen unterschiedlichen Entwicklungen der einzelnen Untergruppen (A, B, C und D) erhoben werden konnten.

*Die vier Projektuntergruppen A, B, C (Treatmentgruppen) und D (Kontrollgruppe):*

- Gruppe A (163 SchülerInnen mit gültigen Datensätzen, Treatmentgruppe): Die Lernenden der Gruppe A-Klassen erhielten von Ihren Lehrenden während der Interventionsphase (12 Lernwochen) kontinuierlich Informationen über unterschiedliche Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben und sie arbeiteten wöchentlich im Rahmen des Unterrichts zwischen 25 bis 35 Minuten mit den entwickelten Lernmaterialien.

- Gruppe B (267 SchülerInnen mit gültigen Datensätzen, Treatmentgruppe): Die Lernenden der Gruppe B-Klassen arbeiteten wöchentlich für 25 bis 35 Minuten mit den entwickelten Lernmaterialien (und erhielten keinerlei Informationen zu Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben).
- Gruppe C (189 SchülerInnen mit gültigen Datensätzen, Treatmentgruppe): Die Lernenden der Gruppe C-Klassen hatten den Gegenstand „Geometrisches Zeichnen“ in ihrem Fächerkanon, welcher im Allgemeinen für eine (in wenigen Ausnahmefällen für zwei) Unterrichtsstunden pro Woche angeboten wurde. Sie arbeiteten mit ihren gewohnten Unterrichtsmaterialien, erhielten keine speziellen Lernmaterialien und keinerlei Strategieinformationen.
- Gruppe D (152 SchülerInnen mit gültigen Datensätzen, Kontrollgruppe): Die Lernenden der Gruppe D-Klassen bildeten die Kontrollgruppen, hatten kein „Geometrisches Zeichnen“ in ihrem Fächerkanon und erhielten weder Strategie-Informationen noch die entwickelten Lernmaterialien.

Die Leistungen der SchülerInnen in den vier Gruppen (Treatmentgruppen A, B und C und die Kontrollgruppe D) beim Pretest und beim Posttest werden in Abbildung 8 grafisch dargestellt. Diese Darstellung lässt bereits vermuten, dass die drei Treatmentgruppen A, B und C Leistungssteigerungen in ähnlichem Umfang aufzuweisen haben und zeigt anschaulich, dass ausnahmslos bei jedem Test die Kontrollgruppe D eine geringere Leistungssteigerung hat als die Treatmentgruppen.

Die statistische Überprüfung dieser Annahme zeigt, dass der simultane Vergleich der Versuchs-/Kontrollgruppenzugehörigkeit insgesamt (Testschülerinnen und -schüler zusammen) bei allen vier Tests keinerlei Effekt ergeben (3DW-Test:  $F_{3;36,36}=0,661$ ;  $p=0,582$ ; DAT:  $F_{3;44,04}=1,40$ ;  $p=0,257$ ; MRT:  $F_{3;42,09}=1,49$ ;  $p=0,231$ ; SOT:  $F_{3;41,39}=0,46$ ;  $p=0,715$ ) (Svecnik, 2014). Viele der Ergebnisse werden in diesem Beitrag in der obigen Form ausgewiesen. „F“ meint dabei einen statistischen Prüfwert einer Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, die zwei Freiheitsgrade erfordert. Diese zwei Freiheitsgrade sind links direkt neben dem „F“ tiefgestellt angeführt, zuerst der Zählerfreiheitsgrad und dann der Nennerfreiheitsgrad. Der Wert „p“ ist die aus dieser Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (F-Verteilung) ermittelte Wahrscheinlichkeit für ein zufälliges Überschreiten des Prüfwerts „F“. „p“ kann

somit folgendermaßen „gelesen“ werden: „Wenn ich die (Alternativ-)Hypothese, dass es einen systematischen Unterschied zwischen den drei Testgruppen A, B und C gibt, annehme, dann irre ich mich mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p$  (=Irrtumswahrscheinlichkeit)“. Mathematisch gesehen ist „ $p$ “ eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Unterschied zwischen den drei Gruppen angenommen wird (=H1) unter der Bedingung, dass „in Wirklichkeit“ kein Unterschied besteht (=H0), also  $p(H1|H0)$ . Wenn diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,05 ist, dann gilt das als signifikant.

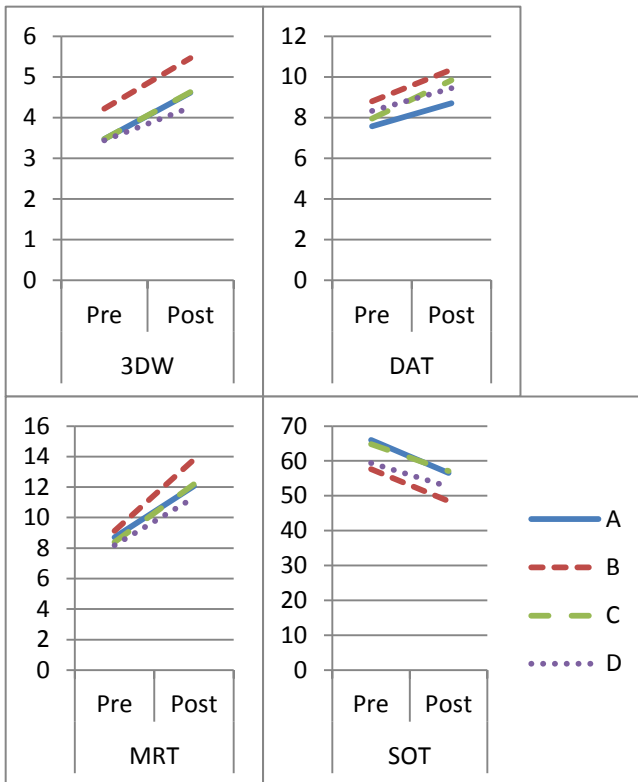


Abb. 8: Leistungssteigerungen der Gruppen A, B, C und D (Pretest – Posttest)  
(vgl. Svecnik, 2014)

Es muss somit festgehalten werden, dass eine einfache und direkte Bestätigung der beiden Forschungshypothesen (siehe den obigen Abschnitt „Die Forschungshypothesen“) nicht möglich ist. Zahlreiche Auswertungen von

Detailaspekten wie die im Folgenden vorgestellten Befunde zur Peilgenauigkeit und zum Beitrag des Geometrieunterrichts zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens liefern eine Vielzahl von Hinweisen und Erkenntnissen.

### Beiträge des Geometrie-Unterricht zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens

Aufgrund der Beobachtung der „ähnlichen“ Verläufe der Leistungssteigerungen der drei Treatmentgruppen A, B und C (Abbildung 8) wurden diese drei Gruppen zu einer Gruppe zusammengefasst. Dies ermöglicht die Untersuchung, ob der Unterricht im Gegenstand Geometrisches Zeichnen (GZ) erkennbare Auswirkungen auf die Förderung des Raumvorstellungsvermögens aufweist. Abbildung 9 visualisiert die Entwicklung der beiden Gruppen (mit GZ und ohne GZ; Gruppe „ohne GZ“ = Kontrollgruppe D) grafisch.

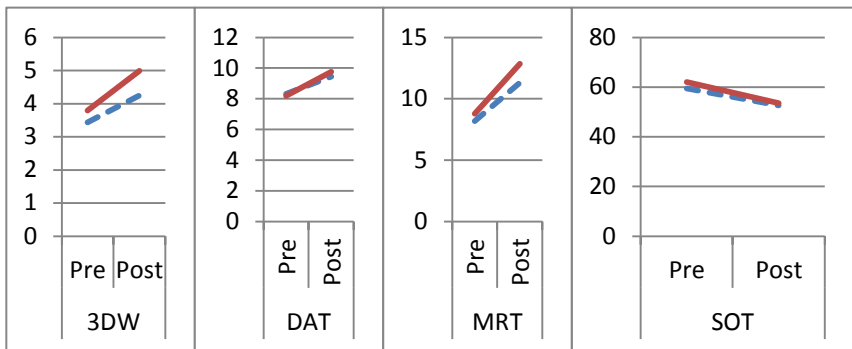


Abb. 9: Leistungssteigerungen (Pretest – Posttest) der beiden Gruppen „mit GZ“ (durchgezogen) und „ohne GZ“ (gestrichelt) (Svecnik, 2014)

Im Rahmen der inferenzstatistischen Prüfung in Bezug auf den Aspekt des Einflusses des Unterrichts in Geometrisches Zeichnen auf das Raumvorstellungsvermögen werden zwei Fragestellungen untersucht:

- Effekt GZ: Erbringen SchülerInnen, die GZ-Unterricht haben, bereits zu Beginn des Treatments (Pretests) bessere Leistungen bei den vier verwendeten Raumvorstellungstests?



- Effekt *Grundpotential GZ*: Erzielen SchülerInnen mit GZ-Unterricht während der zwölf Wochen des Versuchszeitraums einen größeren Lernzuwachs gegenüber den SchülerInnen der Kontrollgruppe, also SchülerInnen ohne GZ-Unterricht?

In Tabelle 1 werden die beiden Effekte GZ und Grundpotential GZ in Bezug auf die vier verwendeten Raumvorstellungstests ausgewiesen. Zudem wird in der letzten Zeile der Tabelle die allgemeine Entwicklung aller SchülerInnen insgesamt (d.h. ohne Differenzierung in Untergruppen) dargestellt. Die statistisch signifikanten Effekte werden farblich grau hinterlegt und fett gedruckt.

Deutlich erkennbar zeigt sich bei allen vier Tests ein hochsignifikanter allgemeiner Leistungszuwachs während des Interventionszeitraums. Für diesen unspezifischen Trend können Lern- bzw. Übungseffekte durch die Testwiederholung, Effekte zwischenzeitlicher Reifungs- und Entwicklungsprozesse, Treatment-Effekte sowie Kombinationen dieser Effekte verantwortlich sein (Gittler, 2014; Svecnik, 2014).

Effekt	3DW	DAT	MRT	SOT
GZ	<b><math>F_{1;764}=5,502</math> <math>p=0,019</math></b>	$F_{1;784}=0,096$ $p=0,757$	<b><math>F_{1;784}=6,929</math> <math>p=0,009</math></b>	$F_{1;771}=0,419$ $p=0,518$
Grundpotential GZ	$F_{1;764}=2,944$ $p=0,087$	$F_{1;784}=2,683$ $p=0,102$	<b><math>F_{1;784}=5,606</math> <math>p=0,018</math></b>	$F_{1;771}=0,941$ $p=0,332$
Leistungssteigerung allgemein	<b><math>F_{1;764}=83,901</math> <math>p&lt;0,001</math></b>	<b><math>F_{1;784}=101,968</math> <math>p&lt;0,001</math></b>	<b><math>F_{1;784}=323,937</math> <math>p&lt;0,001</math></b>	<b><math>F_{1;771}=59,191</math> <math>p&lt;0,001</math></b>

Tabelle 1: Arithmetische Mittel (AM) der Leistungssteigerungen (vgl. Svecnik, 2014)

SchülerInnen, die GZ-Unterricht haben, zeigen signifikant höhere Leistungen (bereits zu Beginn des Versuchszeitraums) beim 3DW-Test ( $F_{1;764}=5,502$ ;  $p=0,019$ ) und beim MRT ( $F_{1;784}=6,929$ ;  $p=0,009$ ). Dieser Effekt zeigt sich nicht beim DAT ( $F_{1;784}=0,096$ ;  $p=0,757$ ) und beim SOT ( $F_{1;771}=0,419$ ;  $p=0,518$ ).

Der Effekt Grundpotential GZ, welcher Hinweise darauf liefert, ob SchülerInnen alleine wegen des Unterrichts im Gegenstand Geometrisches Zeichnen ein höheres Grundpotential an Raumvorstellungsvermögen mitbringen

und dadurch während der Interventionsphase höhere Leistungszuwächse erzielen können als ihre KollegInnen ohne GZ, zeigt bei allen vier durchgeführten Tests eine höhere Leistungssteigerung als die Kontrollgruppe D. Beim MRT ist die übermäßige Steigerung der Leistung zudem signifikant ( $F_{1;784}=5,606$ ;  $p=0,018$ ).

### **Ergebnisse beim Spatial Orientation Test (SOT)**

#### *Durchschnittliche Abweichung*

Die durchschnittliche Abweichung der SchülerInnen vom korrekten Ergebniswinkel lag bei den Pretests bei  $59,04^\circ$  (Svecnik, 2013) und bei den Posttests bei  $50,64^0$ . Damit war dieser beim Pretest und Posttest nahezu doppelt so groß wie bei Tests bei 17- und 18-jährigen SchülerInnen, wo die durchschnittliche Ungenauigkeit bei den Pretests bei  $30^\circ$  lag und bei den Posttests bei  $27^\circ$  (Dünser, 2005). Ein derart großer Unterschied bei den Testergebnissen lässt sich bei den anderen drei durchgeführten Tests (3DW-Test, DAT und MRT) im Vergleich der beiden Altersgruppen nicht machen. Dies gibt einen Hinweis darauf, dass der Faktor räumliche Orientierung sich hinsichtlich des Lebensalters später entwickelt als die weiteren Faktoren der Raumintelligenz.

#### *Richtungsanzeigefehler und Positionswechselwinkel*

Bei den Analysen wurde untersucht, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Winkel gibt, um welchen sich die Probanden von der aktuellen Position aus mental in die Ausgangsposition der jeweiligen Aufgaben drehen müssen (Positionswechselwinkel) und der Abweichung vom korrekten Ergebnis der entsprechenden Aufgabe (Richtungsanzeigefehler).

In Abbildung 10 wird eine mögliche Aufgabe des SOT dargestellt und der entsprechende Positionswechselwinkel visualisiert, welche mit den Worten „Stellen Sie sich vor, Sie stehen beim Stoppschild und blicken zur Katze....“ beginnen würde: Die/Der BetrachterIn müsste sich mental um  $145^\circ$  nach rechts drehen, um in die Ausgangsposition für das entsprechende Beispiel zu kommen, der Positionswechselwinkel ist in diesem Fall demnach  $145^\circ$ .

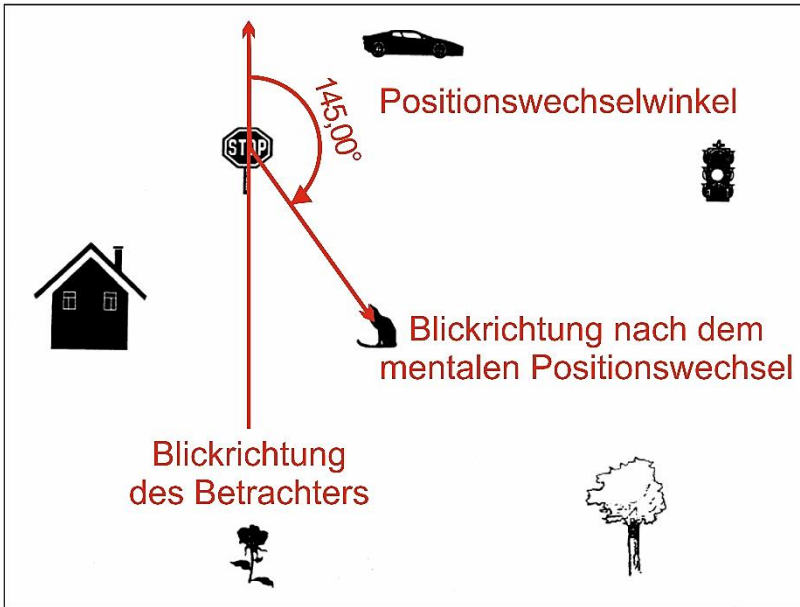


Abb. 10: Positionswinkel: Winkel, um den sich die BetrachterInnen mental zur Ausgangsposition der jeweiligen Aufgabe drehen müssen. Hier: Die Standposition ist beim Stoppschild mit Blickrichtung zur Katze.

Bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Positionswinkel und dem durchschnittlichen Winkel-Fehler, welchen die Probanden beim Lösen der jeweiligen Aufgabe machen (= Richtungsanzeigefehler), zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang (Abbildung 11). Der Richtungsanzeigefehler ist umso größer, je größer der Positionswinkel der Aufgabe ist.

Abbildung 11 stellt zudem deutlich dar, dass im SOT lediglich Aufgaben beinhaltet sind, welche einen Positionswinkel von mindestens  $90^\circ$  bis maximal  $180^\circ$  erfordern. Kozhevnikov u. Hegarty (2001) zeigen auf, dass ProbandInnen erst ab einem Positionswinkel von mindestens  $90^\circ$  sich tendenziell selbst in die Szene versetzen und damit die Strategie „BetrachterIn bewegt sich“ bzw. „move self“ (Barratt, 1953) verwenden, welche ein Indikator für einen Test ist, der den Faktor Räumliche Orientierung der Raumintelligenz misst. Bei einem Positionswinkel unter  $90^\circ$  verwenden die Testpersonen überwiegend die Strategie „Objekte wer-

den bewegt“ bzw. „move object“ (Barratt, 1953) und damit eine Strategie, die nicht den Faktor Räumliche Orientierung anspricht.

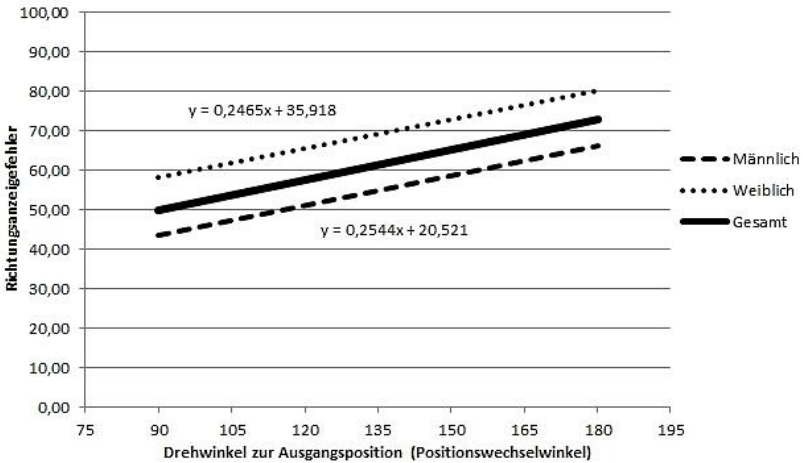


Abb. 11: Darstellung der Anhängigkeit des Richtungsanzeigefehlers vom Positionswinkel

Der Guilford-Zimmermann Spatial Orientation Test (Guilford-Zimmermann, 1948), der oftmals als Marker (Hegarty u. Waller, 2005) für den Faktor Räumliche Orientierung erachtet wird, verlangt von den ProbandInnen im Allgemeinen Positionswinkel von durchschnittlich 30° (Kozhevnikov u. Hegarty, 2001). Kozhevnikov und Hegarty (2001) schließen daraus, dass dieser Test als Indikator für den Faktor Räumliche Orientierung nicht geeignet ist.

### *Richtungsanzeigefehler und Lösungswinkel*

Bei der Untersuchung des Zusammenhangs des Richtungsanzeigefehlers und des Lösungswinkels der jeweiligen Aufgabe des SOT zeigt sich deutlich, dass der Richtungsanzeigefehler bei Lösungswinkeln nahe 0° (= Blick nach vorne) und 180° (= Blick nach hinten) deutlich geringer ist als bei Lösungswinkeln, die nahe 90° (= Blick nach rechts) und 270° (= Blick nach links) sind (Abb. 12). Diese Resultate bestätigen die Forschungsergebnisse von Kozhevnikov u. Hegarty (2001), Hintzmann et al. (1981) und Bryant u. Tversky (1999). Abb. 12 veranschaulicht zudem, dass sämtliche Aufgaben des SOT von Burschen (durchschnittlicher Richtungsanzeigefehler: 52,6°) deutlich besser gelöst wurden als von Mädchen (durchschnittlicher Rich-

tungsanzeigefehler:  $67^\circ$ ), wobei der durchschnittliche Richtungsanzeigefehler beider Geschlechter insgesamt  $59.04^\circ$  beträgt.

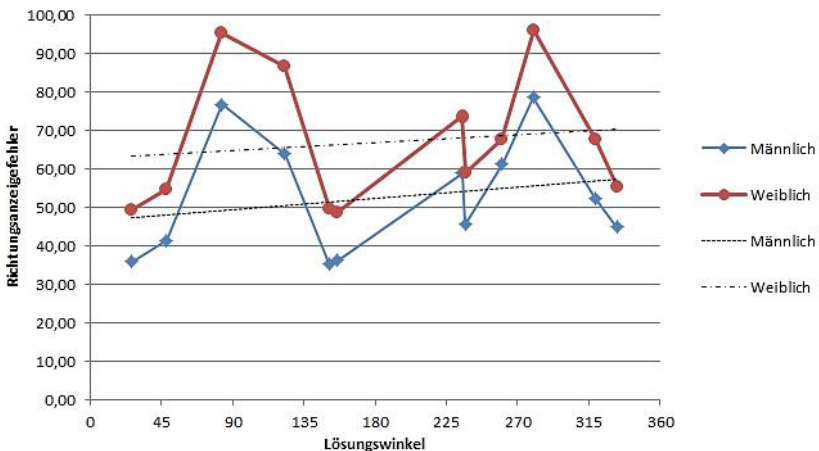


Abb. 12: Zusammenhang: Richtungsanzeigefehler und Lösungswinkel

Die mittlere (balancierte) Reduzierung des Abweichungswinkels von der Pre- zur Posttestung beträgt über alle Klassen und Gruppen hochsignifikante  $8,40^\circ$  ( $F_{1;44,99}=80,56$ ;  $p<0,001$ ). Die Abweichung vom korrekten Winkel ist bei Schülern beim Pretest um  $14,4^\circ$  und beim Posttest um  $13,5^\circ$  geringer als bei Schülerinnen. Dies zeigt, dass der Geschlechtsunterschied nahezu gleich bleibt und dass kein statistisch signifikanter Treatmenteffekt ( $F_{1;757}=0,28$ ;  $p=0,597$ ), der Hinweise auf unterschiedliche Entwicklungen der Mädchen und Burschen geben würde, bemerkbar ist. Die Analysen bestätigen die wissenschaftliche Literatur, die berichtet, dass Geschlechterunterschiede bei der Raumvorstellung weit geringer sind als in früheren Jahren vermutet und dass sich die Unterschiede konkret auf die beiden Faktoren Mentale Rotation (nur bei Aufgaben unter Zeitdruck) und Räumliche Orientierung (bei GeodiKon erhoben durch den SOT) festmachen lassen (Glück et al., 2005).

## Diskussion und Ausblick

Die im Rahmen von GeodiKon beim Pretest und Posttest (2013 und 2014) an insgesamt 903 SchülerInnen im Alter zwischen 12 und 14 Jahren erhobenen Daten ermöglichen eine Vielzahl von Analysen und daran anschlie-

ßend das Formulieren von Hinweisen über die Entwicklung und Förderung der Raumintelligenz bei Jugendlichen. Die beiden zentralen Forschungshypothesen (- Das Training jedes einzelnen der Faktoren der Raumintelligenz und die Schulung eines Strategierepertoires zur Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben bewirken eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens -) können nicht direkt und undifferenziert beantwortet werden, da die Leistungssteigerung der drei Interventionsgruppen A, B und C „nahezu“ identisch ist. Gründe dafür könnten die große Zahl von Einflussfaktoren außerhalb des Treatments in der Schule und dem allgemeinen Umfeld der Testpersonen, möglicherweise auch der kurze Interventionszeitraum (12 reine Unterrichts-Wochen, d.h. ca. ein Semester) und die zeitlich kompakte Intensität (durchschnittlich 25 Minuten pro Woche im Rahmen des GZ-Unterrichts) des Treatments sein. Denkbar wäre es, eine weitere Nachtestung bei den teilnehmenden SchülerInnen nach ein bis zwei Jahren durchzuführen. Hierbei könnten mögliche Langzeiteffekte sichtbar und messbar werden.

Bemerkenswert ist, dass selbst innerhalb der „kurzen“ Interventionsphase von 12 Wochen die Testpersonen insgesamt bei allen vier Tests hochsignifikante Leistungssteigerungen vorzuweisen hatten. Gründe dafür könnten ein unspezifischer Übungseffekt sein (Svecnik, 2014), könnten Lern- bzw. Übungseffekte durch die Testwiederholung, Effekte zwischenzeitlicher Reifungs- und Entwicklungsprozesse sowie Effekte der Maßnahmen (Treatments) in speziellen Gruppen sein. Natürlich sind auch Kombinationen dieser Effekte in Betracht zu ziehen (Gittler, 2014). Diese hochsignifikante Leistungssteigerung aller Gruppen könnte darauf hinweisen, dass die Untersuchungen von Bloom (1971) und Thurstone (1955) partiell hinsichtlich des Faktors Raumintelligenz bestätigt werden können, die gerade für die Altersphase von Kindern zwischen ca. 5 und 14 Jahren ein überdurchschnittliches Potential für die Entwicklung und Förderung des Raumvorstellungsvermögens festhalten. Daraus würde wiederum folgen, dass vermehrt gerade in dieser Altersphase der kindlichen Entwicklung strukturierte Impulse für die Forderung und Förderung des Raumvorstellungsvermögens im Unterricht zu integrieren sind.

Durch die Zusammenfassung der drei Treatmentgruppen A, B und C zu einer Gruppe, die als Gemeinsamkeit hat, dass sie Geometrisches Zeichnen als Unterrichtsgegenstand hat, konnten Untersuchungen durchgeführt wer-

den, die unterschiedliche Effekte dieser Gruppe gegenüber der Kontrollgruppe ausweist. Es zeigt sich, dass die zusammengefasste GZ-Gruppe sich bei jedem der vier Tests deutlich mehr steigert als die SchülerInnen der Kontrollgruppe. Bei zwei Tests (3DW-Test und MRT) verfügen die GZ-SchülerInnen bereits zu Beginn des Treatments über ein signifikant höheres Leistungsniveau (siehe Tabelle 1) und steigern sich speziell beim MRT während der Treatmentphase signifikant mehr als die ProbandInnen der Kontrollgruppe. Der MRT erweist sich somit als besonders sensitiver Test. Das enge Verhältnis von GZ zum MRT könnte darin begründet sein, dass im GZ-Unterricht gerade jene Fähigkeiten im Besonderen gefördert werden, die im MRT erhoben werden (- schnelles mentales Rotieren eher einfacher Objekte -). Dies öffnet die Frage, inwiefern im Geometrieunterricht auch die zahlreichen weiteren räumlichen Fähigkeiten (z.B. small scale/ large scale, dynamische, working memory) geschult und trainiert werden. Eine Analyse von Unterrichtsbeispielen, Schulbüchern und Unterrichtsplanungen von LehrerInnen könnten aufschlussreiche Hinweise dazu liefern.

Die durchschnittliche Abweichung der 12- bis 14-jährigen SchülerInnen vom korrekten Ergebnis (=Richtungsanzeigefehler) lag bei den Pretests beim SOT bei  $59,04^\circ$ , bei den Posttests  $50,64^0$ . Der durchschnittliche Richtungsanzeigefehler war damit bei den Pretests und Posttests nahezu doppelt so groß wie beim gleichen Test mit 17-jährigen SchülerInnen (Dünser, 2005). Da kein vergleichbar großer Unterschied bei den Testergebnissen der anderen drei durchgeführten Tests (3DW-Test, DAT und MRT) erkennbar ist, wird die Vermutung formuliert, dass der Faktor räumliche Orientierung sich hinsichtlich des Lebensalters später entwickelt als die weiteren Faktoren der Raumintelligenz. Kann diese Vermutung aufrechterhalten bzw. erhärtet oder widerlegt werden? Weitere Untersuchungen werden hier Antworten liefern.

Ein Zusammenhang wurde zwischen der Größe des Positionswechselwinkels und der Größe des Richtungsanzeigefehlers gefunden. Je größer der Winkel ist, um den sich die BetrachterInnen mental zur Ausgangsposition der jeweiligen Aufgabe drehen müssen (= Positionswechselwinkel), desto größer ist auch der Abweichung der ProbandInnen vom korrekten Winkel (= Richtungsanzeigefehler).

Die Untersuchungen des Zusammenhangs des Richtungsanzeigefehlers und des Lösungswinkels bei den Aufgaben des SOT zeigen auf, dass der Rich-

tungsanzeigefehler beim Blick nach vorne und hinten deutlich geringer ist als beim Blick nach rechts oder links (Abb. 12). Diese beiden Resultate bestätigen die Forschungsergebnisse von Kozhevnikov u. Hegarty (2001), Hintzmann et al. (1981) und Bryant u. Tversky (1999). Dies liefert Hinweise in zumindest zwei Richtungen. Zum einen könnten im Rahmen weiterer Projekte die notwendigen Peilwinkel im Alltag (beim Straßenverkehr, in der Industrie/Technik, in virtuellen Welten u.v.m.) untersucht werden. Speziell bei der Beantwortung von Sicherheitsfragen könnten diese Ergebnisse hilfreich sein. Zum anderen sollten im Geometrie-Unterricht Szenarien entwickelt werden, bei denen SchülerInnen bewusst das Anpeilen von Objekten, die ziemlich genau links oder rechts positioniert sind, trainieren.

### Literatur

- Barratt, B. S. (1953). An analysis of verbal reports of solving problems as an aid in defining spatial factors. In *The Journal of Psychology*, 36.
- Bennett, G. K., Seashore, H. G., Wesman, A. G. (1973). *Differential aptitude tests, forms S and T*. New York: The Psychological Corporation.
- Bifie (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens) (o.J.). *Kompetenzen und Modelle*. Unter <https://www.bifie.at/node/49>. Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Bloom, B. S. (1971). *Stabilität und Veränderung menschlicher Merkmale*. Übers.: Eggert, D. / Eggert, G. Weinheim, Berlin und Basel: Beltz.
- Bryant, D., Tversky, B. (1999). Mental representations of perspective and spatial relations from diagrams and models. In: *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 25, 137-156.
- Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities. A survey of factor-analytical studies*. New York: Cambridge University Press.
- Cattell, R. B. (1963). Theory of Fluid and Crystallized Intelligence: A Critical Experiment. In *Journal of Educational Psychology* 54.
- Dünser, A. (2005). *Trainierbarkeit der Raumvorstellung mit Augmented Reality*. Universität Wien, Fakultät für Psychologie, Dissertation.
- El Koussy, A. A. H. (1935). The visual perception of space. In *British Journal of Psychology*, 20, 1-80.
- French, J. W. (1951). *The description of aptitude and achievement tests in terms of rotated factors*. Chicago: University of Chicago Press.



- Gardner, H. (1991). *The Unschooled Mind: How Children Think and How Schools Should Teach*. New York: Basic Books.
- Gittler, G. (2014). GeodiKon: Analysen und Ergebnisse der 3DW-Daten. Unter <http://www.geotic.at/docs/Gittler-Auswertung-3DW-GEODIKON.pdf>.  
Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Gittler, G. (1984). Entwicklung und Erprobung eines neuen Testinstruments zur Messung des räumlichen Vorstellungsvermögens. In *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie*, 2, 141-165.
- Glück, J., Vitouch, O. (2008). *Psychologie*, S. 325-326.
- Glück, J., Kaufmann, H., Duenser, A., Steinbuegl, K. (2005). Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven. In *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)* 24/1, 4-11.
- Grüßing, M. (2002). Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen. In *ZDM*, Vol. 34 (2).
- Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.
- Guilford, J. P. (1956). The structure of intellect. In *Psychological Bulletin*, Vol 53(4), S. 267-293.
- Guilford, J. P., Zimmerman, W. S. (1948). The Guilford-Zimmerman Aptitude Survey. In *Journal of Applied Psychology*, 32, 24-34.
- Hegarty, M., Waller, D. (2005). Individual differences in spatial abilities. In Shah, P., Miyake, A. (eds.): *The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking*, Cambridge: Cambridge University Press, 121-169.
- Hegarty, M., Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. In *Intelligence*, 32, 175-191.
- Hintzman, D. L., O'Dell, C. S., Arndt, D. R. (1981). Orientation in cognitive maps. In *Cognitive Psychology*, 13, 149-206.
- Just, M. A., Carpenter, P. A. (1985). Cognitive Coordinate Systems: Accounts of Mental Rotation and Individual Differences in Spatial Ability. In *Psychological Review*, 92.
- Kaufmann, H. (2008). Lösungs- und Bearbeitungsstrategien bei Raumvorstellungsaufgaben. In *Raumgeometrie – intuitive und konstruktiv* (CD).
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M. (2001). A dissociation between object-manipulation spatial ability and spatial orientation abilities. In *Memory and Cognition* 29, 745-756.
- Kraker, M., Asperl, A., Forstner, M., Hochhauser, D., Husty, M., Liebscher, M., Maresch, G., Miestinger, D., Röschel, O., Wurm, E. (2012). *Die kompetenzorientierte Reifeproofung. Darstellende Geometrie. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben*. Wien: bmukk.

- Liebscher, M., Breyer, G., Fürst S., Heugl H., Kraker, M., Preis, C., Svecnik, E., Liegl, I., Plattner, G. (2013). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1.* [https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp\\_ma\\_praxishandbuch\\_mathematik\\_2013-11-05.pdf](https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_2013-11-05.pdf). Wien: Bifie (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens). Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Linn, M. C., Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences on spatial ability: a meta-analysis. In *Child Development*, 56, S. 1479-1498.
- Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 40, pp. 181-248). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial abilities: A review and re-analysis of the correlational literature* (Technical Report No. 8). Aptitude Research project. Stanford, CA: Stanford University.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, genetic, hormonal and neurological influences. In *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
- Maier, H.P. (1994). Räumliches Vorstellungsvermögen: Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. In *Europäische Hochschulschriften: Reihe 6, Psychologie, Band 493*.
- Maresch, G. (2013). Raumintelligenz – Die Phasen der Raumintelligenzforschung. In *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)*, Jahrgang 32, Heft 1. Innsbruck.
- Maresch, G. (2014a). Strategies for Assessing Spatial Ability Tasks. In *Journal for Geometry and Graphics*, Lemgo: Helderermann.
- Maresch, G. (2014b). Spatial Ability – The Phases of Spatial Ability Research. In *Journal for Geometry and Graphics*, Lemgo: Helderermann, <http://www.helderermann.de/JGG/JGG17/JGG172/jgg17020.htm>  
Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Maresch, G., Müller, Th., Scheiber, K. (Hrsg.) (2014). *GeodiKon. Die Lernmaterialien. Praktische Raumvorstellungsübungen für den Geometrie- und Mathematikunterricht mit Lösungen*. Innsbruck: Studienverlag.
- Mick, S., Eibl, S., Gabl, J., Hochhauser, D., Ranger, S., Schmied, J. (o.J.). *Arbeitsunterlagen zu einem kompetenzorientierten Unterricht aus Geometrischem Zeichnen*. Unter [http://www.geometriekompetenzen.at/gz/pdf/Handreichung\\_GZ\\_Kompetenzen.pdf](http://www.geometriekompetenzen.at/gz/pdf/Handreichung_GZ_Kompetenzen.pdf).  
Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Peters, M., Laeng, B., Latham, K., Jackson, M., Zaiyouna, R., Richardson, C. (1995). A Redrawn Vandenberg & Kuse Mental Rotations Test: Different Versions and Factors that affect Performance. In *Brain and Cognition*, 28, 39-58.
- Rost, D. H. (1977). Raumvorstellung. In *Psychologische und pädagogische Aspekte*, Weinheim: Beltz.

- Schultz, K. (1991). The contribution of solution strategy to spatial performance. In *Canadian Journal of Psychology*, 45.
- Souvignier, E. (2000). Förderung räumlicher Fähigkeiten - Trainingsstudien mit lernbeeinträchtigten Schülern. In *Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie*, Band 22.
- Spearman, C. (1904). General Intelligence, objectively determined and measured. In *American Journal of Psychology*, 15, 201-293.
- Svecnik, E. (2014). *GeodiKon Posttest – Ergebnisse der Datenanalysen*. Statistische Gesamtauswertung des Projekts GeodiKon. Unter <http://www.geotic.at/docs/Posttest-Analysen-GeodiKon-Svecnik-140703.pdf>.  
Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Svecnik, E. (2013). *GeodiKon Pretest – Ergebnisse der Datenanalysen*. Statistische Auswertung der Pretests. Unter <http://www.geotic.at/docs/Pretest-Analysen-GeodiKon-Svecnik-2013-12.pdf>.  
Letzter Aufruf: 04.06.2015.
- Thurstone, L. L., (1955). *The differential growth of mental abilities*. Chapel Hill, North Carolina: Univ. of North Carolina, Psychometrie Laboratory, No. 14.
- Thurstone, L. L. (1950). Some primary abilities in visual thinking. In: *Psychometric Laboratory Research Report*. 59, Chicago: University of Chicago Press.
- Thurstone, L.L. (1938). *primary mental abilities*, Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.
- Vernon, P. E. (1961). *The structure of human abilities* (Rev. ed.). London: Methuen.



# Raumgeometrie in der Sekundarstufe I – Basics? Eine aktuelle Aufgabenschau

Katharina Gaab

Zusammenfassung. Vor nunmehr einem Jahrzehnt legte die KMK in ihren Bildungsstandards fest, über welche „Kompetenzen“ Schülerinnen und Schüler am Ende der Pflichtschulzeit von neun Jahren verfügen sollen. Zur Erlangung des Hauptschulabschlusses werden in den Bundesländern am Ende der Schulzeit Abschlussprüfungen u. a. in den Hauptfächern Mathematik und Deutsch abgelegt, mit denen die Schülerinnen und Schüler formal die Ausbildungsreife erlangen. Welche Inhalte spiegeln sich dort wider und inwieweit werden die Forderungen von den Ministerien und Schulen der Länder umgesetzt? Inwieweit wird also die Bildungsadministration ihren selbstgegebenen Ansprüchen tatsächlich gerecht?

Die Unternehmen, in denen die Schulabsolventen anschließend ausgebildet werden und später arbeiten, haben ihrerseits Erwartungen an die Bewerber. Voraussetzungen, die die Kandidaten erfüllen müssen, zeigen sich u. a. in entsprechenden schriftlichen Einstellungstests. Die Rahmung dieser (teils psychologischen) Tests ist jedoch eine andere als die der schulischen mathematischen Inhalte. Passen diese unterschiedlichen Ansprüche zusammen?

Im Beitrag wird diesen Fragen in Bezug auf die Raumgeometrie nachgegangen – die sowohl in den Vorgaben als auch in der Schulwirklichkeit vernachlässigt wird. Die exemplarische Untersuchung wirft weitere interessante Fragen auf und es werden aktuelle Ideen und Anregungen skizziert, die versuchen eine Brücke zwischen den auseinandergehenden Anforderungen sowie schulischen und außerschulischen Realisierungsversuchen zu schlagen.

## Die Bildungsstandards

Die inhaltsbezogenen Bildungsstandards, die „Leitideen“ wurden neben den allgemeinen „Kompetenzen“ jeweils für die Schulabschlüsse Hauptschulabschluss, Realschulabschluss und Allgemeine Hochschulreife festgelegt. In den fünf Leitideen (*Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang* sowie *Daten und Zufall*) sind die mathematischen Inhalte vereinigt, über welche die Schülerinnen und Schüler bei Erreichung des jeweiligen Bildungsziels überprüfbar verfügen sollen, und jene sollen daher, neben den allgemeinen Kompetenzen, als Grundlagen der fachspezifischen Anforderungen für den jeweiligen Schulabschluss übernommen werden.

Für die Raumgeometrie ist dabei vorrangig die Leitidee L3 *Raum und Form* neben L2 *Messen* von Bedeutung.

Die Mindestschulzeit von neun (bzw. in NRW zehn) Jahren in Deutschland soll mit dem Hauptschulabschluss abschließen. Für diesen Schulabschluss sind die inhaltsbezogenen Kompetenzen geordnet nach den Leitideen *Raum und Form* sowie *Messen* die folgenden:

### L3 Raum und Form

Die Schülerinnen und Schüler

- L3.1 erkennen und beschreiben **geometrische Objekte und Beziehungen** in der Umwelt,
- L3.2 **operieren gedanklich** mit Strecken, Flächen und Körpern,
- L3.3 stellen geometrische Figuren und elementare geometrische **Abbildungen** im ebenen kartesischen **Koordinatensystem** dar,
- L3.4 fertigen **Netze, Schrägbilder** und **Modelle** von ausgewählten Körpern an und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen,
- L3.5 **klassifizieren** Winkel, Dreiecke, Vierecke und Körper,
- L3.6 erkennen und erzeugen **Symmetrien**,
- L3.7 wenden **Sätze der ebenen Geometrie** bei Konstruktionen und Berechnungen an, insbesondere den Satz des Pythagoras,
- L3.8 **zeichnen und konstruieren** geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel, wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometrie-Software.

### L2 Messen

Die Schülerinnen und Schüler

- L2.1 nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der **Längen-, Flächen- und Volumenmessung**, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,
- L2.2 wählen **Einheiten von Größen** situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel) und wandeln sie ggf. um,
- L2.3 **schätzen Größen** mit Hilfe von Vorstellungen über alltagsbezogene Repräsentanten,
- L2.4 ermitteln **Flächeninhalt und Umfang** von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,
- L2.5 ermitteln **Volumen und Oberflächeninhalt** von Prisma, Pyramide und Zylinder sowie daraus zusammengesetzten Körpern,
- L2.6 nehmen in ihrer **Umwelt** gezielt **Messungen** vor oder entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.

Für den Themenkomplex *Raumgeometrie* sind die Kompetenzen unter *Raum und Form* zunächst zu unterteilen: die Hälfte der acht Untergliederungspunkte - 3, 6, 7 und 8 - sind ausschließlich auf Aspekte der ebenen Geometrie bezogen. Besonders wichtig für Aspekte der Raumgeometrie sind hingegen nur die beiden Gliederungspunkte 2 und 4. Bei der Leitidee *Messen* sind die Volumen- und Oberflächenberechnungen von Körpern vorrangig (sowie Längenmaße) und die Einheiten dieser Größen.

Durch inhaltliche Zuordnung von einzelnen Prüfungsaufgaben zu den Gliederungspunkten wird versucht zu untersuchen, welche Teilaspekte besonders häufig auftauchen und welche nur sehr wenig zum Tragen kommen, und ob dadurch die Bedeutsamkeit der einzelnen Aspekte angemessen repräsentiert wird. Viele Aufgaben können auch Teilaspekte mehrerer Leitideen beinhalten. Da hier allerdings das Augenmerk auf der Raumgeometrie liegt, werden die Aufgaben nur den Untergliederungspunkten der Leitideen L3 und L2 zugeordnet.

Die Aspekte *Raumvorstellung* und *räumliches Denken* können an einigen Stellen bereits erwähnt werden, werden allerdings nicht konsequent mit einbezogen. Eine explizite Untersuchung diesbezüglich wird aber an einer anderen Stelle von der Autorin ausführlich geführt und steht in der vorliegenden Arbeit der rein inhaltlichen Betrachtung nach.

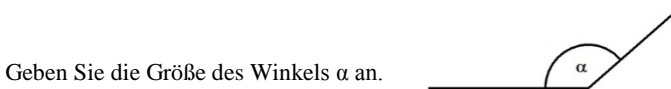
### **Zahlen zu Hauptschulabschlussprüfungen**

In fast allen deutschen Bundesländern gibt es eine zentrale Abschlussprüfung am Ende der allgemeinen Schulpflicht. Mit Hilfe der zugänglichen Prüfungsaufgaben lässt sich ein inhaltlicher Abgleich der darin abgeprüften Kompetenzen vornehmen. Dazu wurden vier Bundesländer quer über Deutschland verteilt ausgewählt (Bayern, NRW, das Saarland und Sachsen) und ein Zeitraum von fünf Jahren (2009 – 2013) betrachtet.

Die Prüfungen in Mathematik setzen sich in der Regel aus mehreren Teilen zusammen. Ein allgemeiner Teil zu „Basiskompetenzen“ bzw. „mathematischen Grundfertigkeiten“ zum Stoff aller Schuljahre ist einem zweiten spezifischeren Teil mit komplexeren Aufgaben über die Inhalte des Abschlussjahres vorangestellt. Der erste Teil ist in einigen Bundesländern hilfsmittelfrei zu bearbeiten (in Bayern beispielsweise sind auch hier Hilfsmittel zuge-

lassen), der zweite Teil kann wieder in verschiedene Teile gegliedert sein, wobei nicht in allen Ländern eine Wahlmöglichkeit besteht.

Die Zuordnung zu den Konkretisierungen der Leitideen erfolgte hier nicht nur zu einem Teilaspekt, der vorrangig angesprochen wird, sondern eine Aufgabe wurde allen Aspekten der hier betrachteten Leitideen zugeordnet, die in der Aufgabe gesehen wurden; dieses Vorgehen deckt insbesondere Auslassungen auf, sagt aber nichts über Schwerpunkte. Dass Zuordnungen schwierig sein können, zeigen die folgenden Beispiele (Abb.1 und 2).

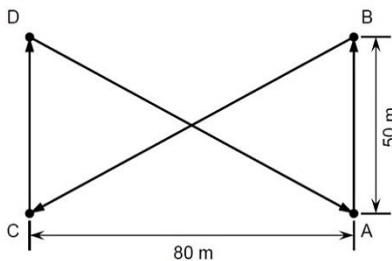


**Abb. 1:** nach: Freitag (2014). Qualifizierender Hauptschulabschluss Mathematik. Mittelschule. Sachsen 2011 Teil A

Bei dieser Aufgabe fällt die Zuordnung zu einer Leitidee schwer. Der Begriff ‚Winkel‘ wird in den Standards nur bei der *situationsgerechten Auswahl von geeigneten Größen* (L2.2) explizit genannt. Das *Grundprinzip des Messens* (L2.1) nennt konkret nur die Längen-, Flächen- und Volumenmessung. Oder ist hiermit eine *Messung in der „Umwelt“* (L2.6) gemeint?

Im Sportunterricht trainiert die Klasse 9 ihre Ausdauer auf dem Sportplatz. Nach Anweisungen ihrer Sportlehrerin laufen sie nach folgendem Plan:

Eine „Runde“ geht von A nach B, dann nach C und D und wieder zurück nach A.



- Fertige eine maßstabsgerechte Zeichnung an.
- Bernd meint nach zehn Runden: „Jetzt bin ich mindestens 3 km gelaufen.“ Überprüfe rechnerisch Bernds Aussage.



**Abb. 2:** Ministerium für Bildung und Kultur Saarland. Hauptschulabschlussprüfung Mathematik. Saarland 2013 Pflicht Teil 2



Diese eingekleidete Aufgabe b) aus dem Saarland von 2013 (Abb. 2), die ein ideales Modell geometrischer Gegebenheiten ohne Realitätsbezug darstellt, wird im Lösungs- und Bewertungsmaßstab für die Lehrperson (Abb. 3) lediglich der Leitidee L2 *Messen* zugeordnet. Obwohl der *Satz des Pythagoras* hier offensichtlich ist und dieser bei der *Anwendung von Sätzen der ebenen Geometrie zu Berechnungen* (L3.7) als einziger sogar explizit genannt wird, scheint das hier kein vorrangiger Aspekt zu sein.

a) Maßstabsgerechte Zeichnung	2		K5/L3
b) $d^2 = 80^2 + 50^2$			
$d \approx 94,34 \text{ m}$	2		K3/L2
1 Runde $\approx 2 \cdot 94,34 + 2 \cdot 50$			
$\approx 288,68 \text{ m}$	1		K3/L2
10 Runden $\approx 2887 \text{ m}$			
Bernds Aussage ist nicht richtig.	1		K1/L2

**Abb. 3:** Ministerium für Bildung und Kultur Saarland.  
Hauptschulabschlussprüfung Mathematik, Saarland 2013. Lösungsvorschlag

Die folgenden Diagramme zeigen die absoluten Häufigkeiten der durchgeführten Zählung bezogen auf die Leitideen. Sie sagen nichts über Teilaufgaben und deren Gewichtung, über den Teil der Prüfung (Wahl- oder Pflichtteil), in dem sie auftauchen, oder über das Verhältnis des Anteils *Geometrie* zur Gesamtprüfung aus. Lediglich innerhalb des Gebiets *Geometrie* wird untersucht, welche Aspekte davon in welcher Form vorkommen.

### Raum und Form

Bereits für die vier hier gewählten Bundesländer lassen sich sehr deutliche Unterschiede erkennen. Während in Bayern und Sachsen (fast) alle Aspekte von *Raum und Form* (L3) vertreten sind, kommen im Saarland und in NRW drei von acht Aspekten über einen Zeitraum von fünf Jahren (!) gar nicht vor. So ist z. B. das dort fehlende *Darstellen von geometrischen Abbildungen im Koordinatensystem* (L3.3) in Bayern der dritthäufigste Aspekt und scheint daher dort wichtiger zu sein.

Das *Fertigen und Erkennen von Netzen, Schrägbildern und Modellen von Körpern* (L3.4) geht in NRW mit nur einer entsprechenden Aufgabenstellung unter, während es in den drei anderen Ländern zu den zwei (mit Abstand) wichtigsten Punkten zählt.

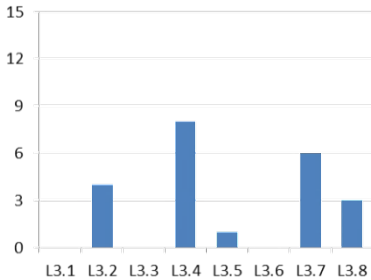


Abb. 4a: Saarland

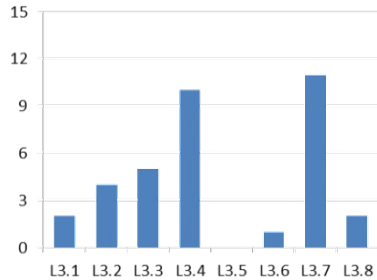


Abb. 4b: Bayern

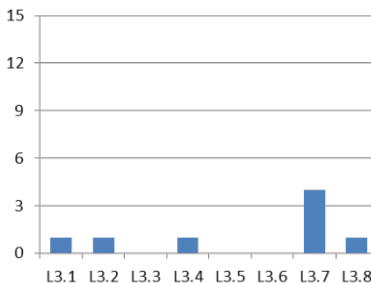


Abb. 4c: NRW

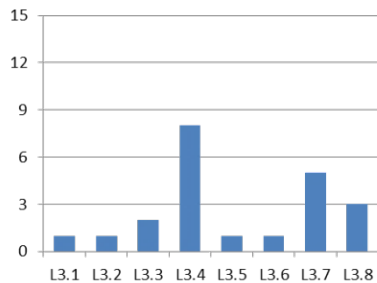


Abb. 4d: Sachsen

Auch ist die Anzahl der überhaupt vorkommenden Aspekte in Bayern um ein vielfaches höher als in NRW (35 vs. 8), während sie im Saarland und Sachsen gleich hoch ist (22) und zwischen den beiden Extremen liegt.

## Messen

Anders als bei *Raum und Form* treten in der Leitidee L2 *Messen* (bis auf das Saarland) fast alle Aspekte auf (Abb. 5). Nur das *Berechnen mit in der Umwelt ermittelten oder aus Quellen entnommenen Maßangaben und die Bewertung der Ergebnisse* (L2.6) findet sich lediglich zweimal in Sachsen, das unter den vier Bundesländern die gleichmäßigste Verteilung hat. Allerdings zeigt sich hier, wie auch das Gesamtergebnis in Abb. 6b bestätigt, sehr deutlich die herausragende Bedeutung des Kalküls durch die unverhältnismäßig hohe Zahl von Aufgaben zur *Ermittlung von Flächeninhalt und Umfang bzw. Volumen und Oberflächeninhalt von geometrischen Objekten* (L2.4, L2.5). Dabei ist das Niveau der hier zusammen betrachteten Aufgaben sehr

unterschiedlich, was aus den Zahlen in Abbildung 6 allerdings nicht unmittelbar hervorgeht: während z. B. in NRW immer ausschließlich die fertige Formel angewendet werden muss, gibt es in Bayern auch entsprechende Umkehraufgaben, bei denen statt Volumen oder Oberflächeninhalt eine Seitenlänge gesucht ist, und daher die Formel erst umgeformt werden muss.

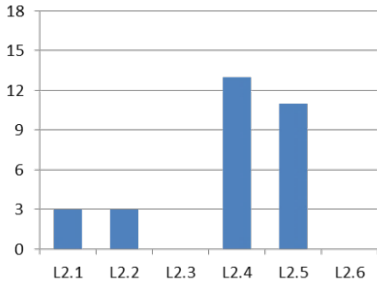


Abb. 5a: Saarland

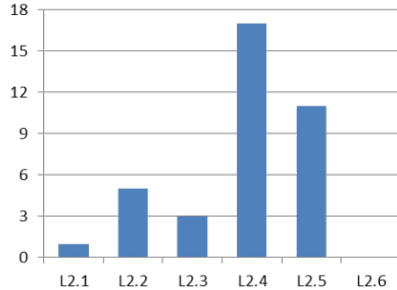


Abb. 5b: Bayern

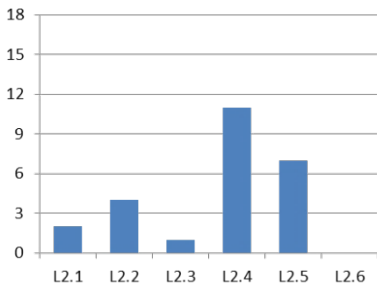


Abb. 5c: NRW

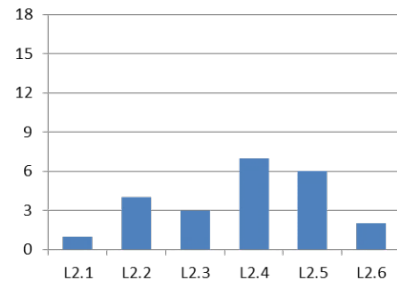
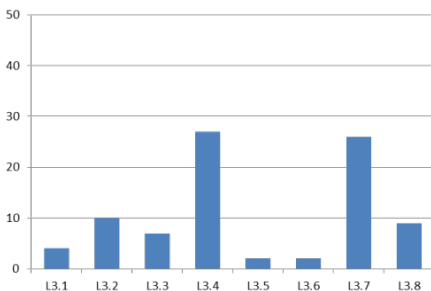
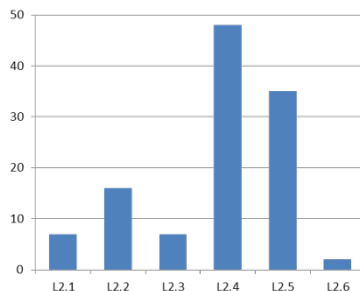


Abb. 5d: Sachsen

Wie viele dieser „Rechenaufgaben“ zu L2.4 und L2.5 sich ausschließlich auf Sachverhalte der ebenen Geometrie beziehen und wie viele hiervon Fragen zu Problemstellungen der räumlichen Geometrie beinhalten, wäre eine weitere, interessant ihr nachzugehende, Frage.

**Insgesamt**

Die folgende Abbildung 6 zeigt die kumulativen Häufigkeiten für die vier betrachteten Bundesländer.

**Abb. 6a:** Raum und Form**Abb. 6b:** Messen

Hinsichtlich der Leitidee *Raum und Form* gibt es eine deutliche Höhergewichtung der Punkte L3.4 und L3.7. Das Arbeiten mit *Netzen und Schrägbildern von Körpern* (L3.4) ist für die Förderung und den Ausbau von Raumvorstellung und -anschauung sehr entscheidend, was das häufige Auftreten angemessen erscheinen lässt. Das sehr häufige *Anwenden von Sätzen zur Konstruktion und Berechnung* (L3.7) ist allerdings ausschließlich auf Sachverhalte der ebenen Geometrie bezogen. So findet sich nur selten eine Aufgabe, bei der z. B. der explizit genannte *Satz des Pythagoras* auf eine räumliche Situation angewendet werden muss. Die Betonung dieser beiden angegebenen Aspekte erfolgt auf Kosten von anderen sehr vernachlässigten Aspekten, wie die *Symmetrie* (L3.6) (die, wenn überhaupt, nur bei Aufgabenstellungen der ebenen Geometrie vorkommt) oder die *Eigenschaften (Klassifikation) von und Beziehungen zwischen geometrischen Objekten* (L3.1 und L3.5).

In der Leitidee *Messen* liegt, wie bereits oben erwähnt, der Schwerpunkt auf kalkülorientiertem Arbeiten, es wird vorwiegend gerechnet, nicht gemessen, wohingegen Aspekte zum Vorstellungsvermögen, bei denen die Schülerinnen und Schüler *Schätzungen* und *Bewertungen* vornehmen müssen (L2.3 und L2.6) zurücktreten.

## Beispielaufgaben

Im Folgenden sollen einige ausgewählte Beispielaufgaben aus den Originalprüfungen dieser Länder aus dem entsprechenden Zeitraum obige Sachverhalte illustrieren und ebenso Besonderheiten aufzeigen.

Die erste Aufgabe (Abb. 7) ist aus Sachsen (2009 B Pflicht). Hier kommen in nur einer Aufgabe sehr viele Teilaspekte der Leitidee *Raum und Form* zum Tragen (L3.3, L3.5, L3.6, L3.7, L3.8). Allerdings bezieht sich diese Aufgabe nur auf die ebene Geometrie und lässt die Raumgeometrie außen vor.

### Aufgabe 3

Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  mit den Punkten  $A(-3; -1)$ ,  $B(1; -1)$  und  $C(-1; 3)$ .

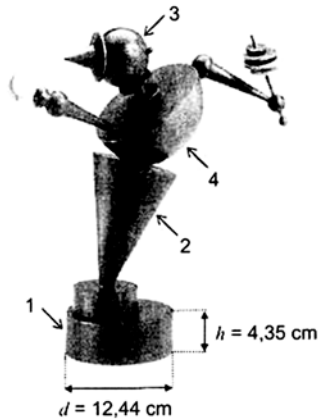
- Zeichnen Sie das Dreieck  $ABC$  in ein Koordinatensystem. (Längeneinheit im Koordinatensystem 1 cm)
- Geben Sie eine Eigenschaft des Dreiecks  $ABC$  an.
- Berechnen Sie die Länge der Seite  $\overline{AC}$ .
- Konstruieren Sie das Bild  $A_1B_1C_1$  des Dreiecks  $ABC$  bei der Verschiebung  $\overline{AB}$ .

**Abb. 7:** Nach: Staatsministerium für Kultus Sachsen.  
Qualifizierender Hauptschulabschluss Mathematik.  
Mittelschule. Sachsen 2009 B Pflicht

Die Aufgabe „Maskottchen“ (Abb. 8) aus NRW (2012 Teil 2) beinhaltet ebenfalls sehr viele Aspekte (diesmal hauptsächlich der Leitidee *Messen*: L2.2, L2.3, L2.4, L2.5, sowie L3.1), dennoch geht es eigentlich nicht um eine Frage zu räumlichen Sachverhalten. Positiv ist, dass hier eine der wenig vertretenen *Schätzungen* (L2.3) zu machen ist. Teil c) ist hingegen eine Einkleidung, die nur Kalkül abprüft. Auch wenn Teil d) einen Bezug zwischen räumlicher Figur und ebener Querschnittsfläche herstellt, braucht es zur Lösung dieses Teils allerdings wieder nur rechnerische Fähigkeiten und Formelanwendung und durch die Zeichnung kein echtes räumliches Vorstellungsvermögen.

### Aufgabe 4

Auf dem Foto siehst du das Kunstwerk „Maskottchen“, das aus vielen geometrischen Körpern besteht.



- a) Gib die mathematischen Fachbegriffe für die mit Ziffern markierten Körper 1 bis 3 an.

1 \_\_\_\_\_

2 \_\_\_\_\_

3 \_\_\_\_\_

- b) Die Höhe der abgebildeten Figur beträgt 37 cm. Schätze den Durchmesser der Halbkugel (Körper 4).  
Beschreibe, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist.

- c) Die gesamte Figur wurde aus einer Holzsorte hergestellt, die  $0,69 \text{ g pro cm}^3$  wiegt.

c<sub>1</sub>) Berechne das Gewicht des Körpers 1.

c<sub>2</sub>) Das Kunstwerk wiegt insgesamt 1,64 kg.  
Welches Volumen hat das „Maskottchen“ insgesamt?  
Notiere deine Rechnung.

- d) Der Sockel der Figur besteht aus zwei Körpern.  
Eine Draufsicht auf den Sockel ergibt folgendes Bild:  
Die Radien der beiden Kreise sind  $r_1 = 3,73 \text{ cm}$  bzw.  $r_2 = 6,22 \text{ cm}$  lang.  
Berechne den Flächeninhalt der grau gefärbten Fläche.

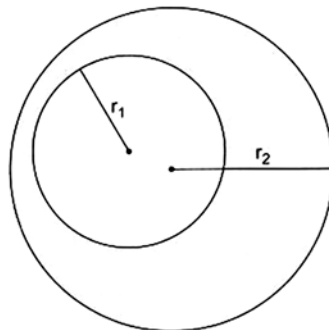
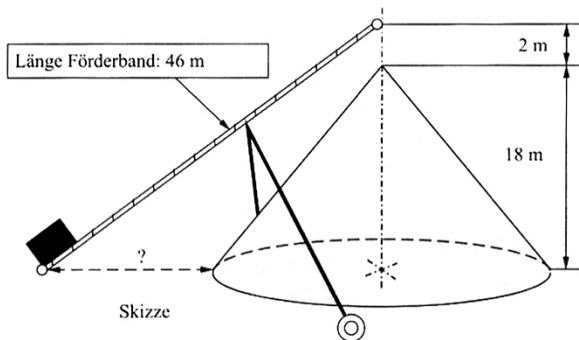


Abb. 8: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen.  
Zentrale Prüfung Mathematik. Hauptschule Typ A.  
Nordrhein-Westfalen 2012 Teil 2

Eine Aufgabe aus Bayern (2009 B II), die zwar nicht noch mehr Aspekte anspricht, aber dafür gezielt und durchdacht inhaltsbezogenen Kompetenzen abprüft, und bei deren Lösung auch räumliche Vorstellung eine Rolle spielt, ist die folgende in Abbildung 9 (L2.4, L2.5 und L3.4, L3.5, L3.7): Zunächst muss die teils nur schematische Zeichnung hier räumlich gelesen werden können, dann muss man das entsprechende rechtwinklige Dreieck sehen, um dann den *Pythagoras* auf eine räumliche (!) Situation anzuwenden. Anschließend wird zwar „nur gerechnet“, aber dazu ist die Volumenformel vorher umzuformen und anschließend muss das Ergebnis noch weiterverwendet werden.

4. Sand wird mit einem Förderband zu einem kegelförmigen Berg aufgeschüttet (siehe Skizze). Sein Volumen beträgt  $4\,200\text{ m}^3$ . Wie groß ist der Abstand zwischen dem Kegelrand und dem unteren Ende des Förderbands?

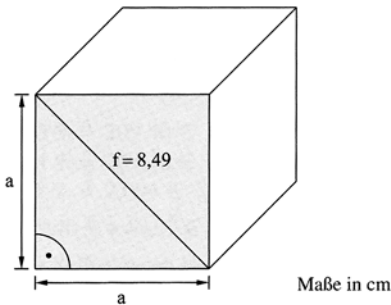


**Abb. 9:** Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst.  
Quali 2014 Mathematik. Bayern 2009 B II

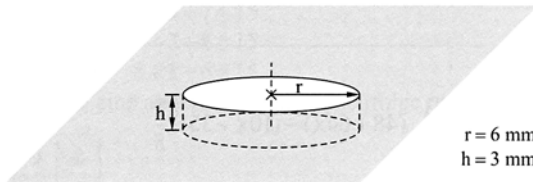
Insgesamt ist diese Aufgabe im Vergleich zu vielen anderen betrachteten Aufgaben sehr anspruchsvoll. Das gilt für viele Aufgaben aus Bayern, u. a. im direkten Vergleich zu NRW, wo die Aufgaben eher basal und oft nach dem gleichen Muster sind. Die Anzahl der auftauchenden Aspekte in einer Aufgabe sagt nichts über deren Qualität und Tiefe aus.

Abbildung 10 zeigt eine weitere vielversprechende Aufgabe aus Bayern (2010 B I).

3. Im praktischen Unterricht wird zunächst ein massiver Würfel gefertigt (siehe Skizze).



Dann werden genau so viele zylinderförmige Vertiefungen (siehe Skizze) ausgefräst, wie es Punkte auf einem üblichen Spielwürfel gibt.



Berechne das Volumen des fertigen Werkstücks.  
Runde alle Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen.

Abb. 10: Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst.  
Quali 2014 Mathematik. Bayern 2010 B I

In den Standards wird (unter L3.4), neben dem *Fertigen von Netzen und Schrägbildern*, auch das *Fertigen von konkreten Modellen* gefordert. In der schriftlichen Prüfung ist diese Kompetenz durch Schreiben oder Zeichnen nicht abprüfbar. Diese Aufgabe stellt allerdings einen Bezug zu dem praktischen Vorgehen her, das im Unterricht stattgefunden hat oder zumindest haben könnte. Für die Schulung der Raumvorstellung ist zunächst das Fertigen von und anschließende Operieren mit realen Modellen von geometrischen Körpern von enormer Bedeutung. Dazu zählen sowohl Vollkörper als auch Flächen- und Kantenmodelle, da alle drei Arten unterschiedliche Gesichtspunkte ansprechen. Ob und inwieweit die Herstellung tatsächlich geschieht, lässt sich leider nicht überprüfen. Eine praktische Unterrichtskonzeption, in der gerade auch das Handeln im Raum zentral ist, lässt sich



durch ein Papier-Bleistift-Prüfverfahren, wie es üblich ist, generell nicht abprüfen.

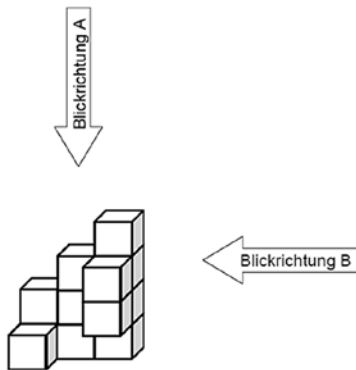
In den verschiedenen Bundesländern gibt es auch unterschiedliche Traditionen, was die fächerübergreifende Zusammenarbeit betrifft. So kann an solchen Punkten die Geometrie z. B. mit dem „Werks- oder Arbeitslehreunterricht“, aber auch mit „Bildende Kunst“ verbunden werden.

Die letzte hier ausgewählte Beispielaufgabe (Abb. 11), die 2013 im Saarland in der HSA-Prüfung gestellt wurde, erfordert noch einmal den wichtigen Aspekt des *gedanklichen Operierens* in Verbindung mit dem Arbeiten mit *Darstellungen (Schrägbild und Netz) von Körpern* (L3.2 und L3.4).

### Aufgabe 9

2 Punkte

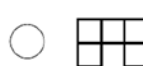
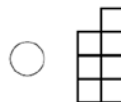
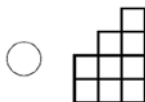
Der abgebildete Körper besteht aus 12 gleich großen Würfeln.



Welche Figur siehst du, wenn du diesen Körper von oben (Blickrichtung A) betrachtest?

Welche Figur siehst du, wenn du diesen Körper von rechts (Blickrichtung B) betrachtest?

Schreibe A und B an die dazugehörige Figur.



**Abb. 11:** Ministerium für Bildung und Kultur Saarland.  
Hauptschulabschlussprüfung Mathematik. Saarland 2013 Pflicht Teil 1

Nach der Untersuchung dieser Aufgaben stellen sich weitere Fragen, die näher zu untersuchen sind und deren Ergebnisse entsprechend tiefergehende Einsichten liefern können:

- Wie groß ist der Anteil von *Geometrie* bzw. geometrischen Fragestellungen an der Gesamtprüfung (gemessen an der Punktzahl, an der Zahl der Aufgaben oder an der Anzahl der Operatoren)?
- Welche Rolle spielen innerhalb des Anteils *Geometrie* an der Gesamtprüfung raumgeometrische Aufgabenstellungen (im Verhältnis zu ebengeometrischen)?
- Wieviel ist dabei im Einzelnen als (reine) Rechenaufgabe einzustufen und bei welchen raum- und ebengeometrischen Aufgabenstellungen braucht man zur Lösung wirklich ein räumliches Vorstellungsvermögen?

Noch außer Acht gelassen wurden bisher die jeweiligen Lehrpläne, die dem Unterricht zugrunde liegen. In manchen Bundesländern gehen die für den Hauptschulunterricht vorgeschriebenen Inhalte fast so weit wie die des gymnasialen Lehrplans. Wenn es beispielsweise Aufgaben zum Mittelpunktswinkel gibt, der in den meisten Bundesländern im HSA-Lehrplan nicht enthalten ist (und in einigen selbst nicht in den Plänen fürs Gymnasium!), drängen sich weitere Fragen auf:

- Verdrängen zu anspruchsvolle ebengeometrische Aufgaben sinnvollere Aufgaben zu räumlichen Problemen? Bzw. welche Aufgabenstellungen werden zugunsten von welchen verdrängt oder vernachlässigt?
- Welche Aufgabenstellungen werden in der Sekundarstufe I und welche aus Sicht der Arbeitswelt für Qualifizierungs-/Prüfungszwecke als wichtig angesehen?

## **Einstellungs-/ Eignungs-/ Auswahltests**

Bei der Auswahl geeigneter Kandidaten für die Vergabe von Ausbildungsplätzen führen viele Unternehmen mit den Bewerbern einen schriftlichen Einstellungstest durch. Diese Tests sind je nach Beruf entsprechend konzipiert, beinhalten aber immer gleiche Grundaufgaben z. B. zur Allgemeinbildung, die für alle Berufsgruppen gleich sind. Zur Vorbereitung auf diese Tests gibt es Orientierungshilfen, die einen Eindruck über die Anforderungen liefern. Zum einen gibt es Bücher zur allgemeinen Vorbereitung auf die Tests für viele Berufe, aber verschiedene Unternehmen stellen auch Probestests gezielt für ihre Berufe (online) zur Verfügung. Gerade im Handwerk gibt es viele Bewerberinnen und Bewerber, die lediglich einen Hauptschulabschluss als Qualifikation mitbringen.

Zwei dieser Vorbereitungsbücher sowie einige online zugängliche Tests zu Berufen, die sich 2007 unter den zehn häufigsten Ausbildungsberufen (von männlichen Jugendlichen), 2012 unter den zwanzig häufigsten fanden (Quelle: BIBB), wurden exemplarisch auf ihre Aufgaben zur Raumgeometrie untersucht. Ergänzt wird die Auswahl noch durch eine allgemeine Orientierungshilfe für Jugendliche, die sich um einen Ausbildungsplatz in einem Betrieb oder einer Behörde bewerben. Diese Orientierungshilfe aus dem Jahr 2014 wird von der Bundesagentur für Arbeit zur Verfügung gestellt.

In vielen Tests sind die Aufgaben in verschiedene Kategorien gruppiert: z. B. Wissen – Intelligenz – Konzentration – Persönlichkeit, oder Schul-/Allgemeinwissen – Psychologische Fähigkeitstests – Technische Vorgänge. Bemerkenswert ist, dass die Aufgaben zur Raumgeometrie stets in Kategorien der Intelligenz eingeordnet werden, getrennt von denen zur ‚Praktischen Mathematik‘ (Rechenaufgaben), die sich bei Schulwissen finden. Außerdem verlangen viele ‚Technische Vorgänge‘ ebenfalls ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen.

Sehr verbreitet sind ‚Würfel-kipp-Aufgaben‘ (Abb. 12 und 13). In dem Schrägbild eines Würfels sind die drei sichtbaren Seiten durch ein unsymmetrisch angebrachtes Merkmal unterscheidbar gemacht. Weitere Würfel müssen entsprechend zugeordnet werden, wenn sie nach Kippvorgängen mit dem vorgegebenen Würfel in den Merkmalen übereinstimmen.

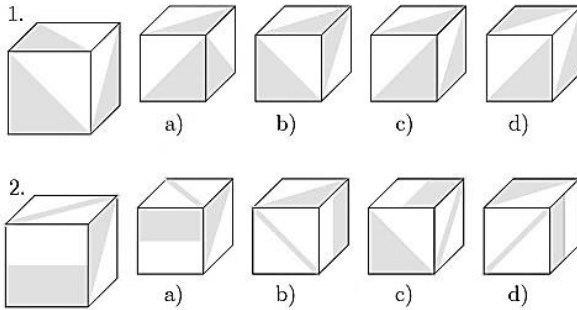


Abb. 12: Abbildung selbst erzeugt mit GeoGebra, nach (Schneider 2010, S. 376).

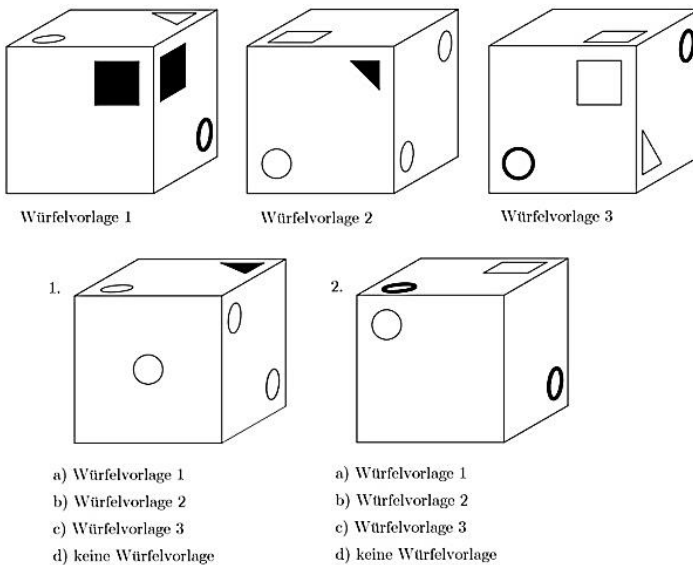
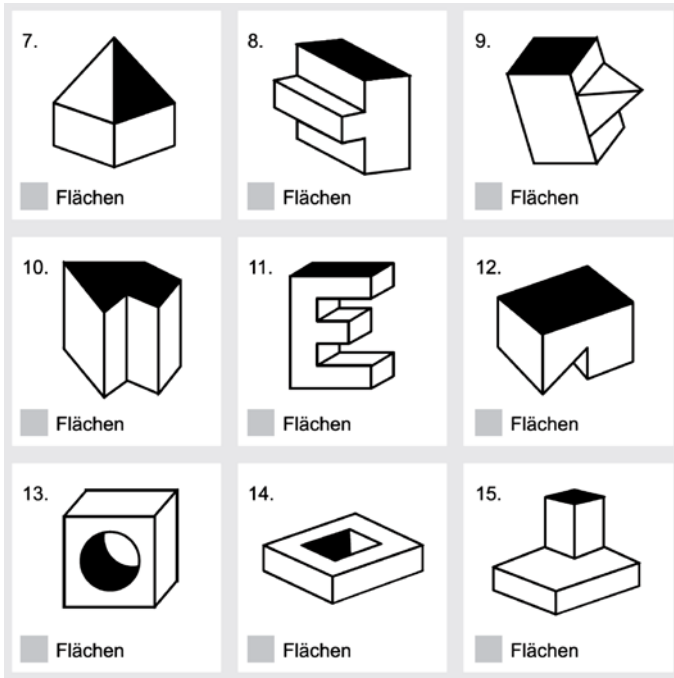


Abb. 13: Abbildung selbst erzeugt mit GeoGebra, nach (Püttjer & Schnierda 2008, S. 207)

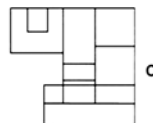
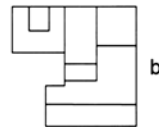
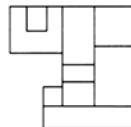
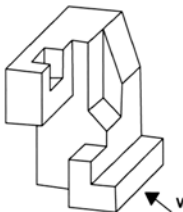
Hier hilft bei der Lösung gedankliches Operieren: Die Bewegungen des Würfels müssen mental, also nur in der Vorstellung durchgeführt werden. Auch beim ‚Zählen von Flächen‘ (Abb. 14) muss man sich vorstellen können, wie der Körper von hinten oder von den Seiten aussieht, ohne dass man den realen Körper hat und ihn umdrehen kann.



**Abb. 14:** Bundesagentur für Arbeit (2014): Orientierungshilfe zu Auswahltests – Training, Tipps und Taktik, S. 42

Eine wichtige Rolle spielen auch Schnitte oder Draufsichten von komplexen Körpern, wie z. B. Werkstücken. Auch wenn solche Anforderungen in der Schule vorkommen, sind reale Exemplare oft vielschichtiger (s. Abb. 15) als elementare Beispiele wie in Abbildung 11, wo der Körper nur aus gleichen Teilen (Würfeln) zusammengesetzt ist.

d) Welche Abbildung zeigt die richtige Vorderansicht?



**Abb. 15:** Tischler Schreiner Deutschland - Bundesinnungsverband im Bundesverband Holz und Kunststoff (2011). Eignungstest. S. 14

Gleiches lässt sich für das Zuordnen (und Fertigen) von Abwicklungen von Werkstücken (Abb. 16 und 17) feststellen, die viel weiter gehen als die Netze von *ausgewählten Körpern* wie in den Standards (L3.4) gefordert – die Sprache der Test, in denen schon mal Figuren abgewickelt werden (Abb. 16), lasse ich hier mal außen vor.

4.4 Wie wird diese Figur richtig abgewickelt?

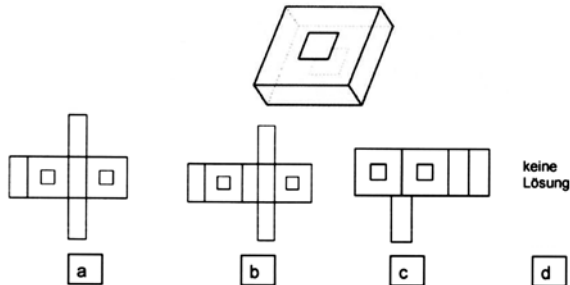


Abb. 16: Ausbildungszentrum AGV Bau Saar gGmbH (2013). Eignungstest – Theorie. S. 11

392. Diese Faltvorlage ist die Außenseite eines Körpers.



Welcher der Körper A bis E kann aus der Faltvorlage gebildet werden?

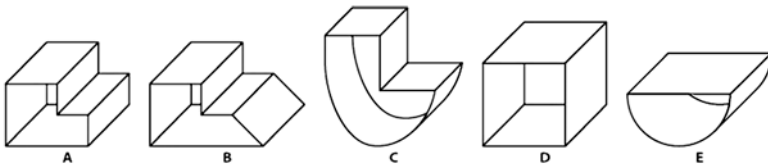
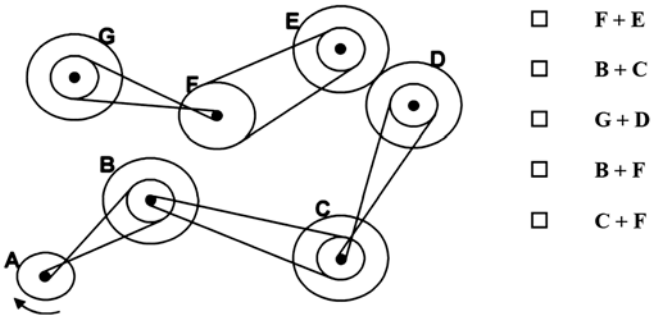


Abb. 17: Grut, K. & Mery, M. (2013). Der Einstellungstest/Eignungstest zur Ausbildung zum Maler und Lackierer, Fahrzeuglackierer S. 228

Aufgaben zu technischen Vorgängen wie (ebene oder räumliche) Antriebskonstruktionen (Abb. 18 und 19) können eine Verbindung von *Geometrieaspekten* mit *Aspekten funktionaler Zusammenhänge* herstellen. Problematisch kann hier allerdings die graphische Darstellung sein, wenn die räumliche Ansicht, wie z. B. in Abb. 19 zu sehen, nicht korrekt gezeichnet ist.

Welche zwei Räder drehen sich in derselben Richtung wie das Antriebsrad A?



- F + E
- B + C
- G + D
- B + F
- C + F

Abb. 18: Ausbildungszentrum AGV Bau Saar gmbH (2013). Eignungstest – Theorie. S. 13

125. In welche Richtung dreht sich das obere Rad, wenn das Antriebsrad A in Pfeilrichtung gedreht wird?



- A. In Richtung 1
- B. In Richtung 2
- C. Hin und her
- D. Gar nicht
- E. Keine Antwort ist richtig.

Abb. 19: Grut, K. & Mery, M. (2013). Der Einstellungstest/Eignungstest zur Ausbildung zum Anlagenmechaniker für Sanitär-, Heizungs- und Klimatechnik. S. 88

## Aktuelle Anregungen

Die Schülerinnen und Schüler sollen mit dem immer noch so genannten Hauptschulabschluss die *Ausbildungsreife* erlangen. Erst in letzter Zeit wird

versucht, diesen viel diskutierten Begriff allgemeiner zu definieren und ihn nicht nur an Zahlen festzumachen, wie viele Jugendliche nach Verlassen der Schule keinen Abschluss haben oder vor einer Ausbildung in berufsvorbereitende Maßnahmen vermittelt werden (müssen), vgl. (BIBB 2011, S. 3).

So ist z. B. aus Sicht der Empirischen Bildungsforschung

Ausbildungsreife [...] ein Set von ‚Basiskompetenzen‘ und ‚Mindest-Bildungsstandards‘, die mit Ausbildungserfolg, mit erfolgreicher beruflicher Einmündung oder mit späterem Berufserfolg korrelieren und daher mindestens vorhanden sein müssen, um eine Person als ‚ausbildungsreif‘ zu bezeichnen.

(BIBB 2011, S. 4)

Für die Bundesagentur für Arbeit ist ein Kriterienkatalog entscheidend. Dieser beinhaltet allgemeine Merkmale der Bildungs- und Arbeitsfähigkeit und generelle Voraussetzungen für Ausbildungsberufe mit weniger komplexen Anforderungen. Die fünf unterschiedenen Kriterien sind schulische Basiskenntnisse, psychologische Leistungsmerkmale, physische Merkmale, psychologische Merkmale des Arbeitsverhaltens und der Persönlichkeit, sowie Berufswahlreife. Das räumliche Denken wird als ein psychologisches Leistungsmerkmal explizit genannt.

Im Folgenden sollen nun noch einige aktuelle Anregungen vorgestellt werden, die versuchen einem solchen Kriterienkatalog – hier in Bezug auf Raumgeometrie und räumliches Vorstellungsvermögen – nachzukommen und die bestehende Lücke zwischen schulischen Inhalten und beruflichen Anforderungen zu schließen.

### **Basiskompetenzen**

In der Publikation *Basiskompetenzen Mathematik* von Drüke-Noe et al. aus dem Jahr 2011 werden eben diese als „Voraussetzung für einen Erfolg versprechenden Beginn einer Berufsausbildung und die Ausübung beruflicher Tätigkeiten“ definiert (Drüke-Noe et al. 2011, S. 8). Sie sind an den Leitideen der KMK orientiert, reichen aber an einigen Stellen etwas weiter. So fordern sie zu *Raum und Form* von den Schülerinnen und Schülern beispielsweise die *Nutzung von Darstellungen, um sich im Raum zu orientieren* oder die *Zerlegung „komplexer“ Objekte (Körper)*. Die *Zuordnung von Körpern und Netzen/Schrägbildern* wird hier „allgemein“ verlangt, während die KMK dies nur für *ausgewählte Körper* tut (vgl. den obigen Text zu Abb. 14–17).



Die sich anschließenden jeweils exemplarisch vorgestellten entsprechenden Aufgaben zu den Basiskompetenzen sind allerdings wieder ziemlich einfach gehalten. Hier wäre eine tiefergehende Betrachtung räumlicher Probleme wünschenswert.

### Raumvorstellung und Geometrieverständnis

Bereits aus dem Jahr 1999 stammt eine Zusammenstellung von Aufgaben von Heinrich Besuden, die helfen soll „die erstrebenswerte Qualifikation“ Raumvorstellung als „Teil der Intelligenz“ im Geometrieunterricht zu fördern, vgl. (Besuden 1999, S. 3). Exemplarisch werden daraus zwei Beispiele vorgestellt.

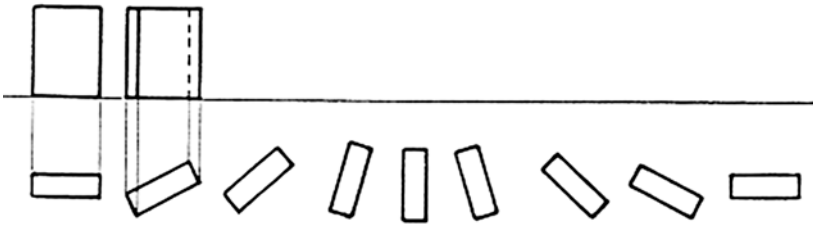
Die Übertragung von bildlichen Darstellungen in die räumliche Realität, also das räumliche Interpretieren einer Zeichnung, kann z. B. an der Thematik Knoten geübt werden, wobei Beziehungen wie *über/unter*, *vor/hinter*, und *rechts/links* eine wichtige Rolle spielen. Das anfängliche Nachlegen soll schließlich zu reinen Vorstellungen werden.



**Abb. 20:** „Gibt es beim Strammziehen der offenen Schnur einen Knoten oder nicht?“  
Besuden, H. (1999). Raumgeometrie und Geometrieverständnis. S. 8

Zur räumlichen Orientierung ist insbesondere die Rechts-Links-Relation wichtig. Da beide Beziehungen immer auf den eigenen Körper bezogen sind, machen sie in vielen Situationen, je nach Blickrichtung, ein Umdenken erforderlich. Bei Drehrichtungen (z. B. Zeiger einer Uhr) hat die Festlegung rechts- oder links herum erst mit Berücksichtigung der dritten Dimension Sinn, nämlich durch die Entscheidung, ob sich z. B. eine Schraube oder ein Ventil von mir weg oder auf mich zu bewegt. Interessante im Unterricht (mit Modellen) zu behandelnde Fragen der Art „Wie dreht sich mein eigener Körper, wenn ich eine ‚linkshändige‘ Wendeltreppe raufsteige? (Welche Hand liegt außen?)“ erweitern die Vorstellungen der Jugendlichen.

Indem Gegenstände zueinander in Beziehung gesetzt werden, über einfache zeichnerische Darstellungen von Körpern hinaus, kann das räumliche Denken weitergehend gefördert werden (Abb. 21).



**Abb. 21:** „Wie ändert sich der Aufriss [des Körpers], wenn er, wie im Grundriss erkennbar, gedreht wird?“ Besuden, H. (1999). Raumgeometrie und Geometrieverständnis. S. 18

## Fazit

Durch die hier nur ausschnittsweise vorgestellte Untersuchung wurde ersichtlich, wie groß die Unterschiede in den Ansprüchen der unterschiedlichen Perspektiven tatsächlich sind. Die Gewichtung der Geometrie insgesamt und dabei im Speziellen der Raumgeometrie ist in den Prüfungen verschiedener Bundesländer sehr unterschiedlich, aber insgesamt nicht zufriedenstellend. So gehen die Anforderungen in diesem Bereich, die es aus beruflicher Perspektive an die Bewerberinnen und Bewerber gibt, weit darüber hinaus. Vor allem stehen Aspekte des Kalküls und des Rechnens als (ein) zentraler Inhalt in den Abschlussprüfungen denen des räumlichen Vorstellungsvermögens in den Einstellungstests gegenüber, wozu sich in den Prüfungen nur sehr wenig finden lässt.

Obwohl es (aktuelle) Anregungen (für den Unterricht) gibt, schlägt sich eine Annäherung nur vereinzelt und ansatzweise nieder. Auch wurden viele weitere interessante Fragen aufgeworfen, die bei näherer (von der Autorin angestrebter) Betrachtung weitere Einsichten liefern können.

## Literatur

- Ausbildungszentrum AGV Bau Saar gGmbH (2013). Eignungstest – Theorie. <http://www.abz-bau-saar.de/index.php/ausbildung-informationen/243-eignungstest>. (Online: 10.01.15)
- Besuden, H. (1999). Raumgeometrie und Geometrieverständnis: Unterrichtsbeispiele. Oldenburg: ZpB.
- Bundesagentur für Arbeit (2014). Orientierungshilfe zu Auswahltests – Training, Tipps und Taktik. <http://www.arbeitsagentur.de/web/wcm/idc/groups/public/documents/webdatei/mdaw/mdk1/~edisp/16019022dstbai378483.pdf>. (Online: 10.01.15)

- Bundesinstitut für Berufsbildung (BIBB) (2011). Eignungstests und Ausbildungserfolg – Abschlussbericht zum Entwicklungsprojekt 2.2.303. [https://www2.bibb.de/bibbtools/tools/fodb/data/documents/pdf/eb\\_22303.pdf](https://www2.bibb.de/bibbtools/tools/fodb/data/documents/pdf/eb_22303.pdf). (Online: 10.01.15)
- Drüke-Noe, C. & Möller, G. & Pallack, A. et al. (2011). Basiskompetenzen Mathematik. Für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht. Berlin: Cornelsen.
- Grut, K. & Mery, M. (2013). Der Einstellungstest/Eignungstest zur Ausbildung zum Anlagenmechaniker für Sanitär-, Heizungs- und Klimatechnik, Tischler, Zimmerer, Dachdecker, Maler und Lackierer, Fahrzeuglackierer, Maurer. Offenbach: Ausbildungspark Verlag.
- Kultusministerkonferenz (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9). In: Beschlüsse der Kultusministerkonferenz.
- Püttjer, C. & Schnierda, U. (2008). Handbuch Einstellungstest. Frankfurt: Campus Verlag.
- Schneider, P. et. al. (2010). Den Einstellungstest bestehen: Das erfolgreiche Test-training. Berlin: Ullstein Taschenbuch.
- Tischler Schreiner Deutschland – Bundesinnungsverband im Bundesverband Holz und Kunststoff (2011). Eignungstest. [http://www.schreiner.de/fileadmin/tsd-pokal/Downloads\\_Lehrer/1\\_3-2\\_Eignungstest\\_separat.pdf](http://www.schreiner.de/fileadmin/tsd-pokal/Downloads_Lehrer/1_3-2_Eignungstest_separat.pdf). (Online: 10.01.15)

### **Prüfungsaufgaben:**

- Fetzer, M. (2014). Zentrale Prüfung 2014. Abschluss-Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik 10. Klasse. Hauptschule Typ A, Gesamtschule GK Nordrhein-Westfalen. Freising: Stark Verlag.
- Freitag, K. (2014). Qualifizierender Hauptschulabschluss. Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik, Deutsch. Mittelschule Sachsen. Freising: Stark Verlag.
- Ministerium für Bildung und Kultur Saarland. Hauptschulabschlussprüfung. Mathematik. Unveröffentlicht.
- Modschiedler, W. & Modschiedler, W. (jun.) (2014). Quali 2014. Abschluss-Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Mathematik. Bayern. Freising: Stark Verlag.



# **Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie – Aspekte zur Förderung der Vorstellung im Raum –**

**Günter Graumann**

Zusammenfassung. Analogiebetrachtungen liefern einen wichtigen Beitrag zu heuristischen Methoden und allgemeinen Kompetenzen. Bei der Behandlung von Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie wird dabei insbesondere auch die Vorstellung im Raum geschult. Analoge Begriffe, Aufgabenstellungen und Sätze, die sich dafür anbieten, werden in sieben Themengebieten („Gerade Linien und ebene Flächen“, „Senkrecht und Parallel“, „Kongruente Abbildungen und Symmetrie“, „Dreiecke und Dreieckspyramiden“, „Haus der Parallelogramme und Parallelepipede“, „Kreis und Kugel“, „Regelmäßige Vielecke und Platonische Körper“) erläutert.

## **Einleitung**

Schon George Polya (1949/1967<sup>II</sup> S. 156) hat das Auffinden von Analogien als heuristische Strategie hervorgehoben und vor etwas mehr als vierzig Jahren hat Heinrich Winter (1972, S. 11/12) auf die Bedeutung von Analogiebetrachtungen für die Bildung im Mathematikunterricht hingewiesen. Aufgrund seines Einflusses wurde dann 1985 dieser Aspekt in die Richtlinien Mathematik für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen als wichtiger allgemeinbildender Aspekt aufgenommen. Seit dieser Zeit findet man Hinweise auf die Bedeutung von Analogiebetrachtungen immer wieder.

Im Geometrieunterricht nun wird durch Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen Figuren sowie deren Begriffen und Sätzen das räumliche Vorstellungsvermögen angeregt und vertieft. Dabei ist ein Vorteil, dass man an die üblichen Themen des Geometrieunterrichts anknüpfen kann. Darüber hinaus können verschiedenartige Zusammenhänge entdeckt werden, so dass einerseits die Geometrie nicht in einzelne voneinander unabhängige Themen zerfällt und andererseits Problemorientierung gefördert werden kann. Außerdem regt die Beschäftigung von Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie dazu an, sich von der weit verbreiteten Beschäftigung mit nur ebener Geometrie zu lösen.

Ein systematischer Kurs bezüglich der Analogie zwischen ebener und räumlicher Geometrie ist jedoch nicht angebracht. Vielmehr sollte die Einbeziehung räumlicher Geometrie in kleinen Schritten zu verschiedenen Zeiten geschehen. Immer wieder im Zusammenhang mit der Behandlung der übli-

chen Themen kann auch auf Analogien zu räumlichen Aspekten eingegangen werden. Dabei wird – wie gesagt – die Vorstellung im Raum und das Entdecken von Zusammenhängen geschult, es wird aber auch gleichzeitig das Wissen über die ebene Geometrie gefestigt und vertieft.

Eine ausführliche Unterrichtsplanung für das gesamte Themenfeld kann im Rahmen dieses Beitrags nicht erfolgen, vielmehr ist es die Absicht, Anregungen und Hinweise auf solche Analogiebetrachtungen für verschiedene Themengebiete des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I zu geben. Dieses geschieht in dem Sinne von Ruppert (2010, S. 719), der sagt, dass es *zunächst* notwendig ist, Inhaltsbereiche zu identifizieren, in denen Analogiebildungsprozesse sinnvoll möglich sind. In einem zweiten Schritt muss dann ein einzelnes Themengebiet genauer analysiert und für den Unterricht aufgearbeitet werden.

Im Folgenden werden für verschiedene Schuljahre – ohne dass damit eine Vollständigkeit gemeint ist – aus sieben verschiedenen Themengebieten analoge Begriffe, Aufgabenstellungen und Sätze in ebener und räumlicher Geometrie beschrieben.

### **Gerade Linien und ebene Flächen**

Man unterscheidet bei den geraden Linien zwischen den *Geraden*, *Halbgeraden* und *Strecken*, je nachdem ob die gerade Linie in beide Richtungen unbegrenzt, in eine Richtung unbegrenzt oder in beide Richtungen begrenzt ist. Analoge Begriffe gibt es nun bei ebenen Flächen (*Ebenen*, *Halbebenen* und *Vielecke*) oder sogar im Raum (*Raum*, *Halbraum* und *endliche Körper*). Allerdings gibt es wegen der größeren Freiheitsgrade auch noch zusätzliche Zwischenbegriffe (wie etwa „Winkelfeld“ oder „Parallelstreifen“ bzw. „Winkelkeil“, „Parallelschicht“ oder „Raumwinkel“) oder nicht eindeutige Begrifflichkeiten (wie etwa „halber Parallelstreifen“ oder „unendlicher Körper“). Dieses Phänomen tritt aber grundsätzlich immer bei Analogien auf, die ja keine bijektiven Zuordnungen sein müssen.

Neben dem oben genannten Kriterium der Ausdehnung kann man auch die *Festlegung durch eine minimale Anzahl von Punkten* (von denen dann die geometrische Hülle gebildet wird) betrachten. Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt, eine Ebene durch drei nicht-kollineare Punkte und der Raum durch vier nicht-planare Punkte. [In der

Sekundarstufe II oder der Universität kann dieses Ergebnis auch auf mehrdimensionale Geometrien und Vektorräume erweitert werden.]

Ein Aufgabenfeld für dieses Themengebiet, welches sich vielfach in Schulbüchern findet und wegen des Trainings zum systematischen Überblicken wichtig ist, beschäftigt sich mit *kombinatorischen Problemen* wie der Anzahl von Verbindungsgeraden bzw. Verbindungsstrecken bei einer vorgegebenen Anzahl von Punkten sowie der Anzahl von Schnittpunkten bei einer vorgegebenen Anzahl von Geraden. Dieser Typ von Aufgaben lässt sich einfach auf die räumliche Geometrie erweitern, indem man z. B. vier oder fünf Punkte im Raum (sowohl in allgemeiner als auch in besonderer Lage) vorgibt und nach der Anzahl der Verbindungsebenen fragt oder drei oder vier Ebenen vorgibt und nach der Anzahl der Schnittgeraden und Schnittpunkte fragt. Dabei wird das Raumvorstellungsvermögen gefordert und gefördert sowie zeichnerische und haptisch-konstruktive Fähigkeiten trainiert. Es wird aber auch das Klären von Begriffen wie etwa „Schnittgerade“ und „Schnittpunkt“ zu diskutieren sein. Außerdem werden wie schon im ebenen Fall Fähigkeiten des Erstellens von einer Systematik zum Erfassen aller möglichen Fälle trainiert und es können Zusammenhänge mit kombinatorischen Formeln (wie etwa „ $n$  über 2“ und „ $n$  über 3“) hergestellt werden.

### **Senkrecht und Parallel**

In der Sekundarstufe I sollte neben dem praktischen Umgang (mittels Geodreieck etc.) mit den Begriffen „senkrecht zu“ und „parallel zu“ die Begrifflichkeit auch auf abstrakter Ebene geklärt werden. Wegen der verschiedenen Erscheinungsformen bei Problemen und in der Umwelt sollte dabei nicht – wie in einer axiomatischen Theorie – nur eine Definition behandelt werden, sondern es sollten *verschiedene Charakterisierungen* diskutiert werden. (Der Beweis der logischen Äquivalenz solcher Charakterisierungen wird dabei in der Regel erst zu einem späteren Zeitpunkt geschehen.)

In der ebenen Geometrie sind zwei verschiedene, sich schneidende Geraden  $g$ ,  $h$  *senkrecht zueinander*, etwa wenn sie eine der folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Alle vier von  $g$  und  $h$  gebildeten Winkelfelder sind gleichgroß, d. h. kongruent zueinander.

- Bei der Spiegelung von  $h$  an  $g$  geht  $h$  in sich über und bei der Spiegelung von  $g$  an  $h$  geht  $g$  in sich über.
- Für jeden Punkt  $P$  von  $g$  ist die kürzeste Verbindung mit  $h$  die Verbindungsstrecke von  $P$  mit dem Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Und Entsprechendes gilt für die Verbindung eines Punktes von  $h$  mit  $g$ .

In der räumlichen Geometrie haben wir neben der Orthogonalität von zwei Geraden (die wie oben festgelegt werden kann) noch die Orthogonalität einer Geraden mit einer Ebene und zwischen zwei Ebenen. Diese Relationen sollten auf jeden Fall auch behandelt werden. Zunächst wird man hierbei mit Hilfe von entsprechenden Materialien und an beispielhaften Körpern eine anschauliche, praktische Vorstellung aufbauen müssen. Bei der Behandlung von abstrakteren Charakterisierungen kann man dann feststellen, dass teilweise in der ebenen Geometrie gültige Charakterisierungen für den Raum analogisiert werden können.

So sind etwa zwei verschiedene, sich schneidende Ebenen  $E$ ,  $F$  senkrecht zueinander, wenn sie eine der folgenden Eigenschaften erfüllen.

- Alle vier von  $E$  und  $F$  gebildeten Winkelkeile sind kongruent zueinander.
- Bei Spiegelung von  $F$  an  $E$  geht  $F$  in sich über und bei Spiegelung von  $E$  an  $F$  geht  $E$  in sich über.
- Es gibt eine dritte Ebene, so dass die aus den drei Ebenen gebildeten Schnittgeraden paarweise zueinander senkrecht sind.

Die Orthogonalität zwischen einer Geraden und einer Ebene lässt sich beschreiben über die Spiegelung oder den kürzesten Abstand oder über die Orthogonalität der Geraden mit allen Geraden, die in der Ebene liegen und durch den Schnittpunkt gehen.

Ergänzend zu den Analogien bei der Begriffscharakterisierung kann man auch analoge Eigenschaften feststellen. So existiert in der Ebene zu jedem Punkt und jeder Geraden genau eine senkrechte Gerade durch den Punkt und es existiert im Raum zu jedem Punkt und jeder Ebene ebenfalls genau eine senkrechte Gerade durch den Punkt. Außerdem ist die Orthogonalität sowohl in der Geradenmenge als auch in der Ebenenmenge eine irreflexive und symmetrische Relation.



Die Aufgabenstellung „Finde drei Geraden  $a, b, c$  mit  $a \perp b \perp c$ “ ist in der ebenen Geometrie einfach und nicht besonders interessant, außer dass  $a$  parallel zu  $c$  ist. In der räumlichen Geometrie ist diese Aufgabenstellung sehr viel interessanter und hat im Prinzip drei verschiedene Lösungen, nämlich die Lösung in einer Ebene, die Lösung von zwei windschiefen Geraden mit ihrer gemeinsamen Senkrechten und die Lösung von drei Geraden durch einen Punkt, wobei es noch den Sonderfall gibt, dass alle drei paarweise zueinander senkrecht sind. Ersetzt man in der Aufgabenstellung eine, zwei oder alle drei Geraden durch Ebenen, so ergeben sich wiederum weitere Fälle, die man systematisch finden und diskutieren muss.

Für die *Parallelität* kann man ganz entsprechende Überlegungen anstellen. Erwähnt sei hierbei, dass sehr viele SchülerInnen und Studierende sagen, „zwei Geraden sind parallel, wenn sie sich nicht schneiden“. Diese Definition ist in der räumlichen Geometrie natürlich nicht korrekt, denn sonst wären windschiefe Geraden auch parallel. Es sollte also von Beginn an gelernt werden, dass zur Definition paralleler Geraden auch dazu gehört, dass sie in einer Ebene liegen. Für die Schulpraxis ist die Definition „in einer Ebene liegend und keinen Schnittpunkt habend“ darüber hinaus noch sehr unpraktisch, man müsste die beiden Geraden ja über alle Grenzen hinaus verlängern (oder im Rahmen der Messgenauigkeit zumindest über das Blatt Papier bzw. die Wandtafel hinaus), um festzustellen, ob sie parallel zueinander sind. Darüber hinaus bezeichnet man heutzutage auch zwei identische Geraden als parallel (damit Äquivalenzklassen gebildet werden können).

Es ist also aus mehreren Gründen sinnvoll verschiedene Charakterisierungen der Parallelität zu diskutieren. Im Raum können wir dabei entsprechend wie bei der Orthogonalität die Parallelität zweier Geraden, die Parallelität zweier Ebenen und die Parallelität einer Geraden und einer Ebene betrachten.

Zwei Geraden bzw. zwei Ebenen bzw. eine Gerade und eine Ebene sind genau dann zueinander parallel, wenn

- sie identisch sind bzw. koinzidieren oder keinen gemeinsamen Punkt aber eine gemeinsame Ebene haben,
- sie eine Ebene und eine Senkrechte gemeinsam haben,
- sie überall gleichen Abstand haben,
- sie durch eine Verschiebung ineinander überführt werden können.

## Kongruente Abbildungen und Symmetrie

Im 5. Schuljahr wird in der Regel die Achsensymmetrie einschließlich der punktweisen Konstruktion von Bildern behandelt. Im 6. Schuljahr kommen dann die Drehungen und Verschiebungen einschließlich drehsymmetrischer Figuren und Bandornamenten (endliche Ausschnitte verschiebungssymmetrischer Figuren) hinzu. Hierbei beschränkt man sich meist auf die ebene Geometrie, obgleich symmetrische Figuren im Raum Kindern schon früh bekannt sind und die Vorstellungen über Symmetrie prägen. Spätestens im 6. Schuljahr *sollten deshalb auch die Analogien zu kongruenten Abbildungen im Raum, insbesondere bezüglich der Konstruktion eines Bildpunktes, dem Feststellen von Fixpunkten und Fixgeraden bzw. Fixebenen und der Symmetrie erörtert werden.*

Als analoge Abbildung zur Achsenspiegelung in der Ebene finden wir im Raum die *Ebenenspiegelung*, aber auch die *Achsenpiegelung* ( $180^\circ$ -*Achsendrehung*) kann als analoge Abbildung angesehen werden. Die Konstruktion des Bildpunktes z. B. geschieht jeweils durch Konstruktion der Senkrechten durch den Ausgangspunkt und Abtragen der Länge vom Punkt bis zur Spiegelebene bzw. Spiegelachse zur anderen Seite auf der Senkrechten. Fixpunkte sind dabei die Punkte auf der Spiegelebene bzw. Spiegelachse. Eine beliebige *Achsendrehung im Raum* ist zu der entsprechenden Drehung in der Ebene analog und sogar in jeder zur Drehachse senkrechten Ebene damit identisch. Eine *Verschiebung im Raum* ist natürlich zur Verschiebung in der Ebene analog, denn in beiden Fällen wird der Bildpunkt durch Antragen des Verschiebungsvektors konstruiert. Als analoge Abbildung zur Gleitspiegelung in der Ebene kann man im Raum sowohl die *Gleitspiegelung an einer Ebene* (Ebenenspiegelung verknüpft mit einer Verschiebung parallel zur Spiegelebene) als auch die *Schraubung* (Achsenspiegelung im Raum verknüpft mit einer Verschiebung parallel zur Drehachse) ansehen.

Falls die Zusammensetzung von kongruenten Abbildungen auch thematisiert wird, so kann man z. B. feststellen, dass Zweifachspiegelungen von Achsenspiegelungen bzw. Ebenenspiegelungen Drehungen und Verschiebungen ergeben und dass in der Ebene wie auch im Raum ein Dreispiegelungssatz gilt. Außerdem kann man feststellen, dass in der Ebene jede kongruente Abbildung als Einfach-, Zweifach- oder Dreifachspiegelung dargestellt werden kann, während im Raum jede kongruente Abbildung als Ein-

fach-, Zweifach-, Dreifach- oder Vierfachspiegelung beschrieben werden kann.

Eine Symmetrie einer Figur liegt bekanntlich dann vor, wenn es eine Kongruenzabbildung ungleich der Identität gibt, die die Figur auf sich abbildet. Analoge Aufgaben zum Aufsuchen von Symmetrien gibt es etwa bei Rechteck und Quader bzw. Quadrat und Würfel oder regelmäßigem Achteck (vgl. Stoppschild) und einem Kirchturm mit regelmäßigem Achteck als Grundfläche und achteckiger Pyramide als Turmspitze. Auch der Vergleich aller Symmetrien eines Kreises und mit denen eines Zylinders oder einer Kugel liefert interessante Ergebnisse. Dass in fast allen genannten Fällen die Anzahl der Symmetrien bei den räumlichen Analoga größer ist als bei den entsprechenden ebenen Figuren ist dabei nicht verwunderlich. Wir hatten oben schon auf die Rolle der größeren Freiheitsgrade im Raum hingewiesen.

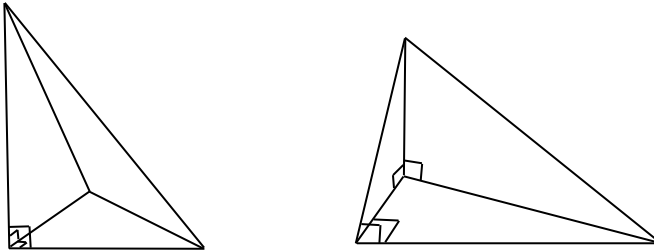
### **Dreiecke und Dreieckspyramiden**

In dem sehr umfangreichen Themenfeld der Dreieckslehre im 7. und 8. Schuljahr finden sich an verschiedensten Stellen Analogien zur räumlichen Geometrie. Es liegt dabei nahe, die *Dreieckspyramiden (allgemeine Tetraeder) als analoge Figuren zum Dreieck* zu nehmen, denn Dreiecke werden von jeweils drei nicht-kollinearen Punkten erzeugt, während Dreieckspyramiden durch jeweils vier nicht-planare Punkte bestimmt sind. Damit ist die Dreieckspyramide der einfachste Körper (Simplex), so wie das Dreieck die einfachste ebene Figur ist. Außerdem kann in der Ebene jedes Polygon in Dreiecke und im Raum jedes Polyeder in Dreieckspyramiden zerlegt werden. Darüber hinaus sind alle vier Seitenflächen einer Dreieckspyramide auch Dreiecke.

Bezüglich weiterer Analogiebetrachtungen wollen wir uns hier nur auf die Sonderformen der Dreiecke, wie wir sie aus dem Haus der Dreiecke kennen, beschränken.

Eine erste Frage wäre dabei etwa: *Wie könnte die zum rechtwinkligen Dreieck analoge Dreieckspyramide aussehen?* Eine Möglichkeit wäre, dass in der Dreieckspyramide ein rechter Raumwinkel (d. h. bei geeigneter Koordinatisierung der Raumwinkel im Koordinatenursprung, wenn die drei anderen Eckpunkte auf der  $x$ - bzw.  $y$ - bzw.  $z$ -Achse liegen) vorkommt. Eine solche Dreieckspyramide hat dann drei rechtwinklige Seitenflächen, von denen

sogar zwei zum analogen ebenen rechtwinkligen Dreieck kongruent sein können, aber die vierte Seite (Verbindung der Punkte auf der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse) kann niemals ein rechtwinkliges Dreieck sein, weil eine Gerade mit einem rechten Winkel zu einer Achse parallel zur Ebene der beiden anderen Achsen ist und diese daher nicht treffen kann.



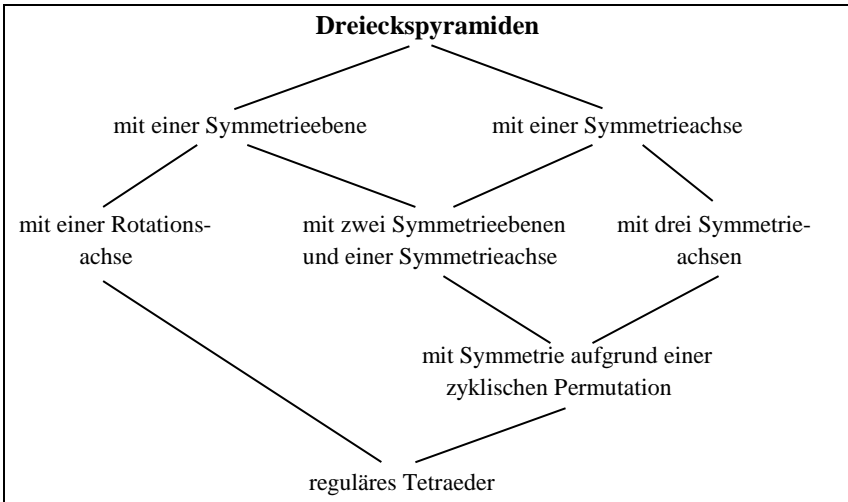
**Abb. 1:** Analoge Körper zum rechtwinkligen Dreieck

Eine andere Möglichkeit eine analoge Dreieckspyramide zum rechtwinkligen Dreieck zu finden, wäre eine solche mit vier rechtwinkligen Seitenflächen. Mittels einer umfangreichen Fallanalyse bezüglich der Lage der vier rechten Winkel kommt man zu dem Ergebnis, dass es ungeachtet von Längenbeziehungen genau einen solchen Typus von Dreieckspyramiden gibt, nämlich einen solchen, bei dem in zwei Ecken jeweils zwei rechte Winkel zusammenstoßen. Hierbei können alle vier Seitenflächen nicht zueinander kongruent sein. [Seien  $a$ ,  $b$  die Seitenlängen von zwei zueinander senkrechten Kanten (im Bild etwa die „waagerechten“) und sei  $c$  die Seitenlänge der zu  $b$  senkrechten Kante, so haben die übrigen Kanten die Seitenlängen  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{b^2 + c^2}$  und  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Wäre nun das Dreieck mit den Längen  $a$ ,  $\sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  kongruent zum Dreieck mit den Längen  $a$ ,  $b$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , so müsste  $b = \sqrt{b^2 + c^2}$  und  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  sein, was nur für  $c = 0$  möglich ist. Dann hätten wir aber keine Pyramide.]

Suchen wir in diesem Rahmen nun nach dem Sonderfall der *Analoga zum rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck*, so erhalten wir im Fall der Dreieckspyramide mit einem rechten Raumwinkel drei zueinander kongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke, die in einer Ecke zusammenstoßen, und als vierte Seite ein gleichseitiges Dreieck. Im Fall der Dreieckspyramide mit vier rechtwinkligen Seitenflächen können nur zwei davon gleichschenkelig sein. [Mit den obigen Kantenlängen etwa für  $a = b = c$ , wobei

die anderen beiden Seitenflächen zwar kongruent zueinander sind, aber die Seitenlängen  $a$ ,  $a\sqrt{2}$ ,  $a\sqrt{3}$  haben.]

*Analoga zum gleichschenkligen Dreieck sind symmetrische Dreieckspyramiden. Unter ihnen finden sich verschiedene Sondertypen (vgl. Abb. 2), wobei das reguläre Tetraeder sicherlich als Analogon zum gleichseitigen Dreieck anzusehen ist.*



**Abb. 2:** Symmetrische Dreieckspyramiden

Eine Aufgabenstellung zur Vertiefung der Vorstellungen über Dreiecke und Dreieckspyramiden wäre etwa die folgende: Finde alle Dreiecksformen bzw. Formen von Dreieckspyramiden, deren Seitenlängen bzw. Kantenlängen eine vorgegebene Anzahl von ganzzahligen Längenmaßen haben. Zur Verdeutlichung wählen wir hier nur die Maße 1 und 2. Damit man alle Lösungen findet, muss man (nach ersten unsystematischen Erkundungen) sich eine Methode der systematischen Suche ausdenken. Wir können z. B. die Bezeichnungen der Seiten- bzw. Kantenlängen so wählen, dass sie der Größe nach geordnet sind. Dann gehen wir systematisch alle derartigen Tripel bzw. 6-Tupel mit den gegebenen Maßen durch. In unserem Fall sind das für das Dreieck  $(1/1/1)$ ,  $(1/1/2)$ ,  $(1/2/2)$  und  $(2/2/2)$ . Dabei liefert  $(1/1/2)$  wegen der Dreiecksungleichung keine Lösung.  $(1/1/1)$  und  $(2/2/2)$  liefern als Typ das gleichseitige Dreieck, während  $(1/2/2)$  ein spitzes gleichschenkliges Dreieck liefert. Im Falle der Dreieckspyramiden müssen wir die folgenden

6-Tupel betrachten:  $(1/1/1/1/1/1)$ ,  $(1/1/1/1/1/2)$ ,  $(1/1/1/1/2/2)$ ,  $(1/1/1/2/2/2)$ ,  $(1/1/2/2/2/2)$ ,  $(1/2/2/2/2/2)$ ,  $(2/2/2/2/2/2)$ . Das erste und das letzte Tupel beschreiben offensichtlich ein regelmäßiges Tetraeder (in Analogie zum gleichseitigen Dreieck). Das zweite und dritte Tupel ergeben keine Dreieckspyramide, denn mindestens eine Seitenfläche müsste aus den Längen  $(1/1/2)$  bestehen, was ja nicht möglich ist.

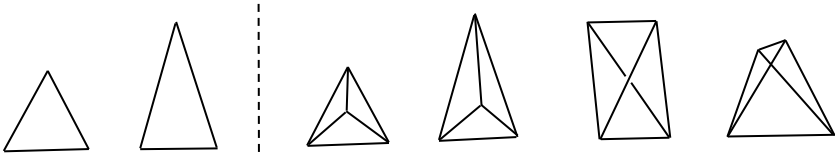


Abb. 3: Dreieck und Dreieckspyramiden mit Längen 1 und 2

Das vierte Tupel  $(1/1/1/2/2/2)$  liefert eine symmetrische Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche und darüber jeweils Kanten mit der Länge 2. Beim fünften Tupel  $(1/1/2/2/2/2)$  dürfen die beiden Kanten der Länge 1 nicht zusammen in einer Seitenfläche liegen, es gibt deshalb dafür nur eine Dreieckspyramide, die man bilden kann, indem man zwei Seiten der Form  $(1/2/2)$  an den Seiten mit der Länge 1 zusammenfügt und dann die Spitzen mit einer Kante der Länge 1 verbindet. Beim sechsten Tupel  $(1/2/2/2/2/2)$  gehen wir genauso wie beim fünften Tupel vor, nur dass wir die Spitzen mit einer Kante der Länge 2 verbinden. Das ist möglich, da die Entfernung der Spitzen, wenn sie in einer Ebene liegen, gleich  $\sqrt{15}$  ( $>2$ ) ist.

### Haus der Parallelegramme und Parallelepipede

Wir wollen diese Analogiebildung von Vielecken kurz ergänzen mit Analogia zu Vierecken. Ausgehend vom Würfel als Analogon zum Quadrat kann man zu den Sechsfächlern mit 8 Eckpunkten kommen. Man könnte hierbei einerseits nach Sechsfächlern mit einer Symmetrieebene durch Seitenmitten (analog zum symmetrischen Trapez) oder mit einer Symmetrieebene durch Kanten oder Diagonalen (analog zum Drachen) suchen oder nach Sechsfächlern mit einer Symmetrieachse etc. Man kann auch Sechsfächler mit einer Umkugel (analog zu Sehnenvierecken) untersuchen etc.

Wir beschränken uns hier auf die *Parallelepipede* (auch Spate genannt), die man als Analoga von Parallelegrammen ansehen kann, da jeweils die ge-

genüberliegenden Seitenflächen parallel und kongruent zueinander sind und alle Seitenflächen Parallelogramme sind. Außer diesen analogen Eigenschaften kann man noch weitere finden: Etwa solche über Winkelmaße und Raumwinkelgrößen, die Punktsymmetrie und die Erzeugung durch zwei bzw. drei linear unabhängige Vektoren. Im Rahmen der Übersicht über Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie sei hier nur auf Sondertypen von Parallelepipeden hingewiesen.

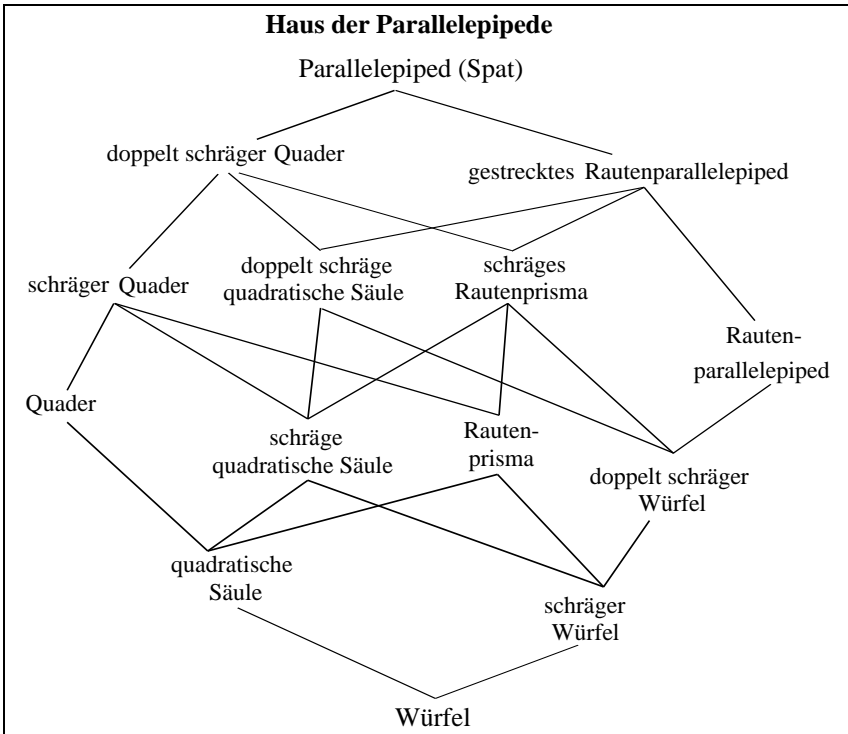


Abb. 4: Haus der Parallelepipede (Spat)

## Kreis und Kugel

Der Kreis in einer Ebene und die Kugel im Raum haben die gleiche Definition und mehrere gleiche oder analoge Eigenschaften. Hier sei nur ein Überblick mit einer Auswahl grundlegender Eigenschaft vorgestellt.

***Kreis mit Mittelpunkt  $M$   
und Radius  $r$***

Kreislinie =  $\{ P \mid |PM|=r \}$

Kreisfläche =  $\{ P \mid |PM|\leq r \}$

Ein Kreis ist durch drei  
nicht-kollineare Punkte bestimmt.

Alle Kreise sind zueinander ähnlich.

Ein Kreis und eine Gerade haben  
keinen oder einen oder zwei Punkte  
(Passante / Tangente / Sekante)  
gemeinsam.

Tangente und zugehöriger Halbmesser  
sind zueinander senkrecht.

***Kugel mit Mittelpunkt  $M$   
und Radius  $r$***

Kugeloberfläche =  $\{ P \mid |PM|=r \}$

Vollkugel =  $\{ P \mid |PM|\leq r \}$

Eine Kugel ist durch vier  
nicht-planare Punkte bestimmt.

Alle Kugeln sind zueinander ähnlich.

Eine Kugel und eine Gerade haben  
keinen oder einen oder zwei Punkte  
(Passante / Tangente / Sekante)  
gemeinsam.

Tangente und zugehöriger Halbmesser  
sind zueinander senkrecht.

## **Regelmäßige Vielecke und Platonische Körper**

Wenn man analoge Körper zu den regelmäßigen Vielecken sucht, so wird man vermutlich auf die regelmäßigen Körper kommen, wobei man auch Analogien zwischen Sternvielecken und Keplerschen Körpern betrachten kann. Die wichtigsten regelmäßigen Vielecke sind aber die konvexen und ihre Analoga sind dann offensichtlich die Platonischen Körper. Ohne auf diese Analogien näher einzugehen möchte ich hiermit schließen – in „Analogie“ zu Euklid, der seine Elemente mit den Platonischen Körpern beschlossen hat.

## **Literatur**

- Becker, G. (1982). Integration ebener und räumlicher Geometrie durch Bildung von Analogien. In: *Mathematica didactica* 15(1), S. 5-14.
- Graumann, G. (2004). Das Haus der Parallelepipede – ein Problemfeld für Raumerkundungen in Klasse 8 bis 12. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004*, Hildesheim: Franzbecker, S. 201-204.
- Graumann, G. (2009). Spate in drei und mehr Dimensionen. In: *MU – Der Mathematikunterricht* Jg. 55, Heft 1, S. 16-25.
- Graumann, G. (2011). *Grundbegriffe der Elementaren Geometrie*. EAGLE-Starthilfe, Leipzig: Edition am Gutenbergplatz.



- Graumann, G. (2012). Symmetrische Dreieckspyramiden – ein Problemfeld für Systematisierungsübungen und Förderung der Raumschauung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Münster: WTM, S. 305-308.
- Graumann, G. (2013). Abbildungen der elementaren und analytischen Geometrie, Hildesheim: Franzbecker.
- Kultusministerium NRW (1985), Richtlinien und Lehrplan Mathematik.
- Polya, G. (1949). Schule des Denkens, Bern: Francke.
- Ruppert, M. (2010). Analogiebildung – eine grundlegende mathematische Denkweise. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Münster: WTM, S. 717-720.
- Schumann, H. (2006). Interaktives Analogisieren ebener Geometrie im virtuellen Raum. In: MU – Der Mathematikunterricht Jg. 52, Heft 6, S. 37-60.
- Winter, H. (1972). Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen: A. Henn Verlag.



# Anmerkungen zum Aufbau eines dynamischen Grundverständnisses von Symmetrie und Spiegelungen

Hans-Jürgen Elschenbroich

Zusammenfassung. Es wird an Schulbuch-Beispielen gezeigt, wie Fehlvorstellungen zur Symmetrie insbesondere durch die begriffliche Vermischung von Abbildung und Symmetrie erzeugt werden. Abschließend werden dynamische DGS-Arbeitsblätter vorgestellt, mit denen diese Fehlvorstellungen vermieden werden können.

## Zur Vorgeschichte

Achsenspiegelungen und Achsensymmetrie bzw. Punktspiegelungen und Punktsymmetrie sind Standardthemen in den Klassen 5 und 6. In Lehrerfortbildungen habe ich zu diesem Thema immer wieder Fehlvorstellungen vorgefunden. Wenn ich diese angesprochen hatte, bin ich oft auf Unverständnis gestoßen und sogar auf die Äußerung „Das steht aber so bei uns im Lehrbuch!“. Meist ging es dabei um den oft unklaren Unterschied zwischen Spiegelachse und Symmetrieachse. Nachdem dies wiederholt auftrat, habe ich mir diverse Lehrbücher<sup>1</sup> der Klassen 5 und 6 angesehen.

## Zur Begriffsklärung Symmetrie

*Mit dem geometrischen Begriff **Symmetrie** (altgriechisch *συμμετρία* symmetria „Ebenmaß, Gleichmaß“, aus *σύν* syn „zusammen“ und *μέτρον* metron „Maß“) bezeichnet man die Eigenschaft, dass ein geometrisches Objekt durch Bewegungen auf sich selbst abgebildet werden kann, also unverändert erscheint. Eine Umwandlung, die ein Objekt auf sich selbst abbildet, heißt Symmetrieabbildung oder **Symmetrioperation**.*

*Manchmal werden auch zwei (oder mehr) verschiedene geometrische Objekte als zueinander<sup>2</sup> symmetrisch bezeichnet, wenn sie, zusammen betrachtet, eine symmetrische Figur bilden.*

[http://de.wikipedia.org/wiki/Symmetrie\\_\(Geometrie\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Symmetrie_(Geometrie))

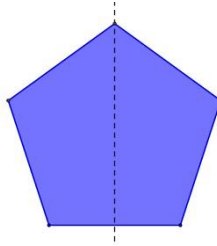
---

<sup>1</sup> Es sei noch angemerkt, dass die Auswahl der Lehrbücher eher zufällig erfolgte, aber nicht untypisch ist. Auch findet man manche Probleme immer wieder.

<sup>2</sup> Das entscheidende Wort *zueinander* wird in der Praxis dann aber übergangen! An dieser Stelle sollte man besser ‚zueinander *spiegelbildlich*‘ sagen.

Es geht also um eine (nichttriviale) *Abbildung*, „die ein Objekt *auf sich selbst* abbildet“. Dann heißt das Objekt *symmetrisch*.

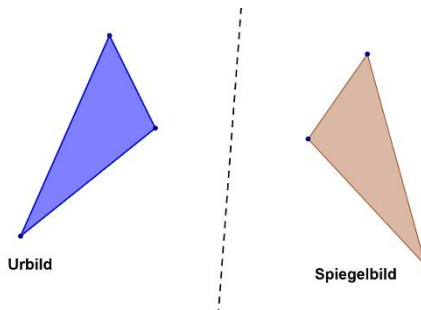
Ein regelmäßiges Fünfeck ist z. B. achsensymmetrisch. Es wird durch eine Achsenspiegelung an der gestrichelten Geraden auf sich selbst abgebildet.



**Abb. 1:** Symmetrisches Fünfeck

Natürlich gibt es hier noch vier weitere Symmetrieachsen.

In der folgenden Figur ist das linke Dreieck, die Urbild-Figur, offensichtlich nicht symmetrisch. Wenn es an der Geraden gespiegelt wird erhält man als Bild-Figur ein Dreieck, das ebenfalls nicht symmetrisch ist.



**Abb. 2:** Urbild und Spiegelbild

Wenn man jetzt aber beide Figuren zusammen als *ein* neues Objekt auffasst, erhält man eine symmetrische Figur und die Spiegelachse ist dabei die Symmetrieachse. Das ist mathematisch eigentlich trivial. Problematisch wird es, wenn die Rollen von Urbild, Spiegelbild, zusammengesetzter Figur sowie Spiegelachse und Symmetrieachse durcheinander geworfen werden. Dann werden leicht Fehlverständnisse erzeugt.

## Symmetrie, Falten und Spiegeln

Häufig wird Symmetrie anschaulich oder handlungsorientiert eingeführt, indem man Klecksbilder erzeugt oder Schmetterlingsbilder etc. betrachtet.

**4** Falte ein Blatt Papier in der Mitte und tropfe auf eine Seite oder die Faltlinie Tinte oder Wasserfarbe. Drücke dann beide Seiten fest zusammen. Falte das Blatt wieder auseinander und beschreibe dein Arbeitsergebnis.  
 Versuche mit diesem Verfahren, bestimmte Bilder herzustellen, die du der Klasse präsentierst. Welche Probleme treten hierbei auf?

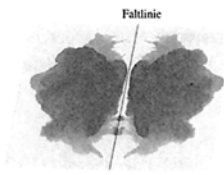


Abb. 3: Zahlen und Größen 6 (2009), S. 199

Dieser Zugang ist schön und beliebt, aber auch Quell späterer Fehlverständnisse, weil hier eine nicht-zusammenhängende Figur mit zwei Teilen und einer Faltlinie erzeugt wird und dies zum Prototypen für Symmetrie wird. Damit wird der Grundstein gelegt, bei einer Achsenspiegelung nicht Urbild und Spiegelbild als Objekte auseinander zu halten, sondern stets an das zusammengesetzte Bild als Objekt höherer Ordnung zu denken. Anders formuliert: Dieser Zugang ist für das Verstehen der Achsenspiegelung gut geeignet, für das Verstehen von Achsensymmetrie bräuchte man aber eher etwas wie in Abb. 1.

Die Problematik sieht man auch bei folgendem Zugang:

**2** Spiegelungen in der Zeichenebene erzeugen achsensymmetrische Bilder.  
 Die grüne Vogelschablone wurde auf das Zeichenpapier gelegt und die Figur hellblau ausgemalt. Dann wurde die Schablone entlang der roten Linie umgeklappt.  
 Die neue Figur wurde dunkelblau ausgemalt. Die dunkelblaue Figur ist das Bild, das bei der **Achsenspiegelung** der hellblauen Figur an der **Spiegelachse s** entsteht.

Achsenspiegelung

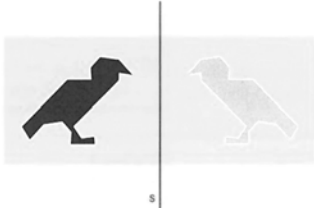


Abb. 4: MatheNetz 6 (2006), S. 120

Am Rand ist von Achsenspiegelung die Rede, d. h. es geht um ein Urbild (hellblauer Vogel) und ein daraus erzeugtes Spiegelbild (dunkelblauer Vogel). Laut Überschrift geht es aber um die Erzeugung achsensymmetrischer Bilder, d.h. um die Komposition der hellblauen und dunkelblauen Vogelfigur zu einer neuen Figur.

Solche zusammengesetzten Figuren sind zwangsläufig symmetrisch und dabei sind Spiegelachse und Symmetrieachse untrennbar eins. Was natürlich erschwert, diese später auseinander zu halten.

Die Nachhilfe-Plattform bettermarks greift statt zu falten zur Veranschaulichung auf einem aufgestellten Spiegel zurück:



The screenshot shows a web browser window with the URL [de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/symmetrie-und-bewegungen.html](https://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/symmetrie-und-bewegungen.html). The page header includes the bettermarks logo with the tagline 'ERFOLGREICH MATHE LERNEN' and navigation links for 'START', 'LERNEN', 'LEHREN', and 'PREISE'. The main heading is 'Achsenspiegelung'. The text explains that an axial reflection (Achsenspiegelung) is a movement where a figure is 'folded' across a line called the 'Spiegelachse' (mirror axis). It notes that points on the axis are fixed points and that a mirror can be used to create the reflection of a figure.

Abb. 5: bettermarks

Stellen wir uns vor, es wird tatsächlich ein Spiegel aufgestellt und eine Figur gespiegelt. Mal abgesehen von der perspektivischen Verzerrung: Wo und wie soll sie dann ‚nachgezeichnet‘ werden? Auf dem (zur Urbild-Ebene *senkrecht* stehenden) Spiegel? Oder dahinter?

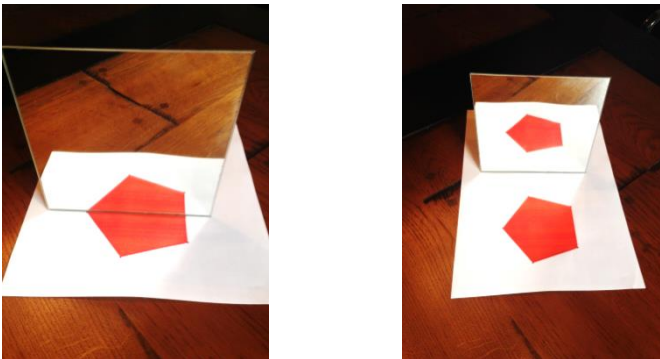


Abb. 6a, b: Spiegeln (Foto: H.-J. Elschenbroich)

Die Abb. 6b eignet sich – ähnlich wie beim Falten – für einen Zugang zur Achsenspiegelung. Für einen Zugang zur Achsensymmetrie bräuchte man aber eher eine Spiegelung wie in Abb. 6a.

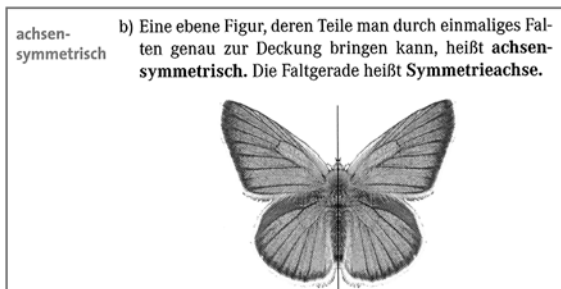
Für einen Einstieg ins Thema Symmetrie sind auch Bilder von Spiegelungen am Wasser beliebt.



**Abb. 7:** Zahlen und Größen 6 (2009), S. 199

Hier haben wir eine versteckte Problematik, die auch von vielen Lehrkräften nicht gesehen wird: Die Wasseroberfläche dient hier als Spiegel. Das Urbild (Gebirge oder Skyline) ist dabei 3D, das Bild ist aber 2D und das ganze wird in einem 2D-Foto abgebildet. Und die Symmetrieachse ist eine in der Regel nicht gerade verlaufende Uferlinie.

Eine ebenfalls etwas versteckte Problematik, die Fehlvorstellungen begünstigen kann, besteht darin, dass eine *ebene* symmetrische Figur durch ein Operieren im Raum (Falten) erzeugt wird:



**Abb. 8:** MatheNetz 6 (2006), S. 20

Die Symmetrieachse wäre hier die Falllinie. Wenn man aber das Bild des Schmetterlings längs der eingezeichneten Geraden faltet – wie will man

dann noch überprüfen, ob die Teile der Figur genau zur Deckung kommen? Wer dies einmal versucht, wird feststellen, dass man nach dem Falten nur noch die äußere weiße Seite des Papiers sieht.

### Spiegelachse oder Symmetrieachse?

Dies geht oft durcheinander, wie man hier exemplarisch sieht:

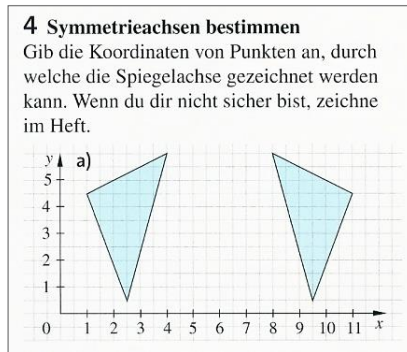


Abb. 9: Mathematik real 6 (2012), S. 104

Im Aufgabentext geht es um eine *Spiegelachse* (was eine sinnvolle Frage ist), in der Überschrift um *Symmetrieachsen*. So werden Achsenspiegelung als Abbildung einer Figur *auf eine andere* und Achsensymmetrie als Eigenschaft *einer* Figur vermenget. In einer früheren Ausgabe des Buches von 2007 heißt es sogar explizit: „Bei Spiegelbildern nennt man die Symmetrieachse auch Spiegelachse“ (S. 99). Damit wird der Zusammenhang zwischen Spiegelung und Symmetrie geradezu auf den Kopf gestellt.

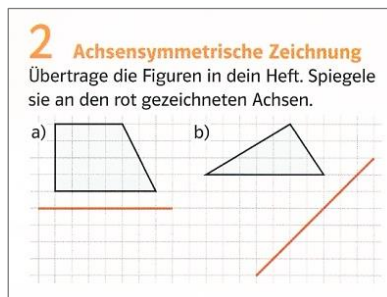


Abb. 10: Mathe live 5 (2014), S. 169



In dieser Aufgabe (Abb. 10) haben wir eine vergleichbare Problematik. Dass den Autoren dabei doch unwohl gewesen sein könnte, sieht man daran, dass klammheimlich als neuer Begriff achsensymmetrische *Zeichnung* für die Komposition von Urbild und Bild eingeführt wird.

Auch in der folgenden Aufgabe findet man ein begriffliches Durcheinander von Spiegelung und Symmetrie:

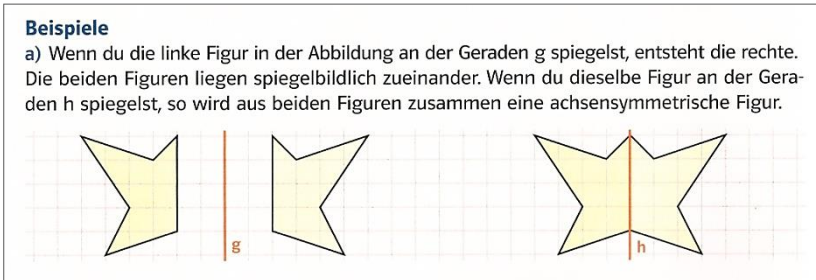


Abb. 11: Schnittpunkt 6 (2011), S. 84

Wenn man den linken halben Stern an  $g$  spiegelt, erhält man den rechten halben Stern und beide Halbsterne liegen spiegelbildlich zueinander. Das ist korrekt, von Symmetrie ist keine Rede. Dann wird aber suggeriert, Achsensymmetrie entstünde dadurch, dass die Spiegelachse  $h$  die Figur berührt!

Endgültig geht es mit Achsenspiegelung und Symmetrieachse im Fokus 6 (2006) durcheinander. Dort findet man auf S. 56:

*Eine Figur, die durch eine **Achsenspiegelung** entstanden ist oder bereits eine **Symmetrieachse** hat, ist **achsensymmetrisch**.*

In aktuellen Schulbüchern wird gerne unter dem Druck der Stundenkürzungen und Themen'verschlangung' nur noch die Achsensymmetrie in den Vordergrund gestellt. So heißt es im Schnittpunkt Plus 5 (2013) auf S. 71:

*Eine Figur, die aus spiegelbildlichen Hälften besteht, ist **achsensymmetrisch**. Die Linie, an der gespiegelt wird, heißt **Symmetrieachse** oder **Faltachse**.*


Das ist so ja nicht falsch. Das Problem liegt darin, dass es vorab keine Thematisierung von Spiegelung gibt, der Begriff *spiegelbildlich* ist hier rein anschaulich. Es wird auch anschließend nicht die Achsenspiegelung als geometrische Abbildung mittels Geodreieck behandelt. Es geht nur um die Ergänzung zu einer achsensymmetrischen Figur, was durch Kästchenaus zählen auf kariertem Papier mit Achsen durch diese Karos umgesetzt wird.

Bemerkenswerterweise tauchen die Begriffe Spiegelachse und Achsenspiegelung noch im Register auf. Sie verweisen aber auf Seiten, in denen von Symmetrie und Symmetrieachse die Rede ist! Auch später ist im gesamten Buch von Achsenspiegelungen als Abbildungen keine Rede. Dann ist es auch nicht verwunderlich, wenn Spiegelachsen und Symmetrieachsen nicht mehr auseinander gehalten werden können.

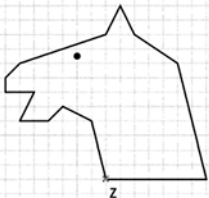
### Punktspiegelung und Punktsymmetrie

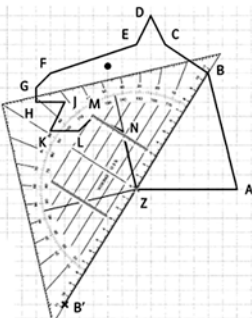
Im Lambacher-Schweizer von 2013 kommt (wie in vielen aktuellen Schulbüchern) die Punktspiegelung als Abbildung nicht mehr explizit vor. Es wird nur noch Punktsymmetrie angesprochen. Implizit ist die Punktspiegelung noch dadurch Thema, dass gezeigt wird, wie man punktsymmetrische Figuren herstellen könne.

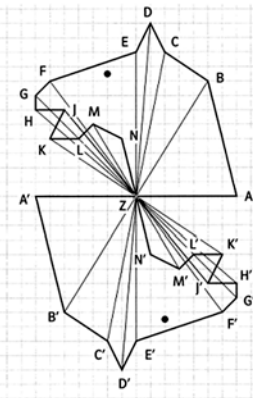
Hier wird wieder eine nicht symmetrische Figur (Pferdekopf) punktgespiegelt. Das gespiegelte Bild ist natürlich auch nicht punktsymmetrisch. Die zentrale Idee, dass man eine Figur durch eine Halbdrehung um einen Punkt auf sich selbst abbilden kann, kann dabei nicht aufkommen.



Obwohl die Windmühlenflügel regelmäßig angeordnet sind, ist keine Symmetrieachse zu finden. Verbindet man je zwei gegenüberliegende Punkte, so schneiden sich die Verbindungslinien alle in einem Punkt. Eine solche Figur ist **punktsymmetrisch**. Der Schnittpunkt ist das **Symmetriezentrum**.  
Auch punktsymmetrische Figuren kann man durch Zeichnen herstellen. Diesen Vorgang nennt man Punktspiegelung.







Dabei geht man so vor:

1. Man legt ein Spiegelzentrum Z fest.
2. Man verbindet einen Punkt der Figur (z. B. B) mit dem Spiegelzentrum Z und verlängert die Strecke über den Punkt Z hinaus.
3. Man legt den Spiegelpunkt B' so auf der Hilfslinie fest, dass der Punkt B und der Spiegelpunkt B' den **gleichen Abstand** vom Spiegelzentrum Z haben.
4. Man wiederholt die Schritte 2 und 3 mit allen Eckpunkten der Figur.
5. Zum Schluss verbindet man die Punkte in der richtigen Reihenfolge.

Abb. 12: Lambacher-Schweizer (2013), S. 64

Zur Punktspiegelung findet man im Schulbuch Zahlen und Größen 6:

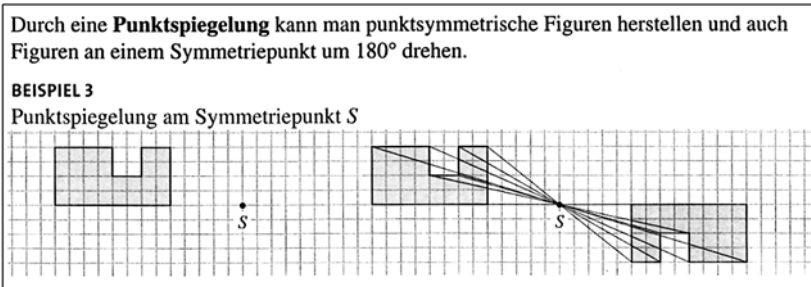


Abb. 13: Zahlen und Größen 6 (2009), S. 204

Durch eine Punktspiegelung wird aber eine *punktgespiegelte* Figur hergestellt und keine *punktsymmetrische* Figur. Punktsymmetrisch wäre die Kombination aus Urbild und Spiegelbild.

Eindeutig den Vogel abgeschossen hat aber die Firma Texas Instruments. Im Menü des TI-Nspire™ heißt die Abbildung Achsenspiegelung auch so, aber die Abbildung Punktspiegelung heißt hier *Punktsymmetrie* (Abb. 11)!

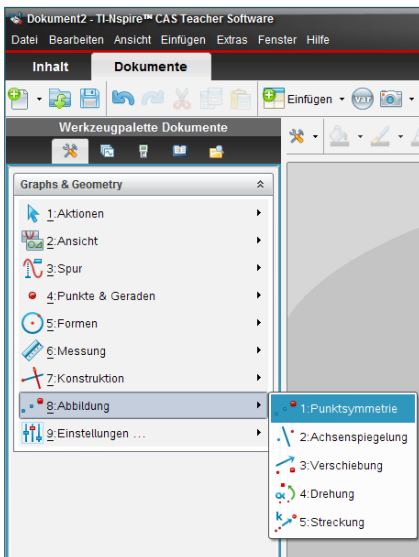


Abb. 14: Menü TI-Nspire™

## Sach(un)logische Trennung

In manchen Schulbüchern werden Achsenspiegelung und Achsensymmetrie thematisch getrennt. Im MatheNetz 6 (S. 20) heißt es beispielsweise:

*„Eine ebene Figur, deren Teile man durch einmaliges Falten genau zur Deckung bringen kann, heißt **achsensymmetrisch**. Die Faltachse heißt **Symmetrieachse**.“*

Das ist korrekt. Die Achsenspiegelung als Abbildung kommt aber erst 100 Seiten (!) später und ohne Bezug zur Achsensymmetrie.

Ähnlich im Schnittpunkt 6: Auch hier kommt die Achsensymmetrie vor der Achsenspiegelung (S. 83) und die Achsenspiegelung erst im Anschluss, ohne Bezug zur Achsensymmetrie.

## Es geht auch anders!

Im früheren Lambacher-Schweizer (Ausgabe NRW 1998) findet man (meines Erachtens mustergültig<sup>3</sup>) erst die Achsenspiegelung (S. 170) und dann die Achsensymmetrie (S. 173). Weiter wird definiert:

*„Figuren, die durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden können, nennt man **achsensymmetrisch**. Die Achse der Spiegelung nennt man auch **Symmetrieachse** der Figur.“*

Dies ist die gleiche mathematische Definition von Achsensymmetrie wie in Wikipedia. Sie führt zu einer dynamischen Sicht von Symmetrie: Es werden Spiegelungen darauf untersucht, ob dabei das Bild mit dem Urbild zur Deckung kommt. Dies ist zugegebenermaßen auf dem Papier nicht immer sonderlich gut zu untersuchen, wohl aber mit Folien auf dem OHP.

## Ein dynamischer Zugang zur Symmetrie mit DGS

Heutzutage lässt sich das hervorragend mit dynamischen Arbeitsblättern mit GeoGebra (oder einer anderen Dynamischen Geometrie-Software) umsetzen. Elschenbroich & Seebach (2014) haben dies bei Achsensymmetrie und Punktsymmetrie anhand von Flaggen und Verkehrszeichen realisiert.

---

<sup>3</sup> Was leider in der Ausgabe von 2013 nicht mehr so ist.

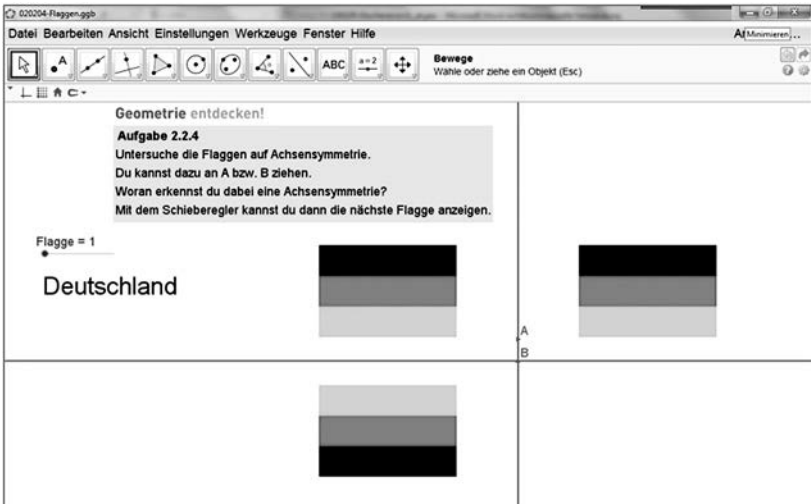


Abb. 15: Geometrie entdecken! Teil 1 (2014). Ausgangssituation

Hier werden zu einer Flagge zwei achsenspiegelte Bilder erzeugt. Die Spiegelachsen liegen parallel zu den Flaggenrändern und können bewegt werden, so dass man unmittelbar überprüfen und sehen kann, ob dabei Urbild und Bild zur Deckung kommen oder nicht.

Wenn man dann eine Situation findet, in der das der Fall ist, ist die Figur achsensymmetrisch und *diese spezielle* Spiegelachse ist dann eine Symmetrieachse der Figur.

Im Falle der Deutschland-Flagge kommt man durch Ziehen an der vertikalen Spiegelachse in diese Situation (Abb. 16a). Hingegen kann man durch Ziehen an der horizontalen Achse diesen Zustand nicht erreichen (Abb. 16b).

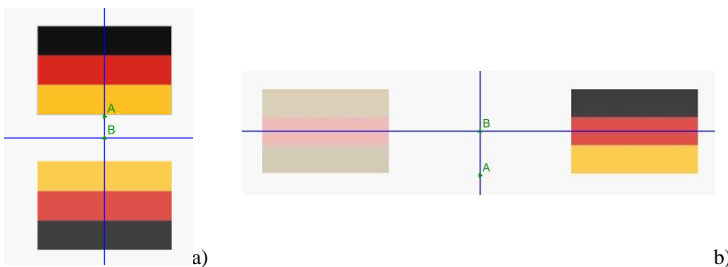


Abb. 16: Geometrie entdecken! Teil 1. Vertikal Symmetrie/ horizontal keine Symmetrie

Da die Flaggen-Bilder halbtransparent sind, kann man im GeoGebra-Arbeitsblatt beim Ziehen an den Spiegelachsen schön erkennen, ob sich die Bilder überdecken. Falls ja, bleiben die Farben, falls nein, entstehen unschöne ‚schmutzige‘ Mischfarben.

In weiteren Beispielen finden die Schüler dann andere Flaggen, die auch mehrere Symmetrieachsen haben können oder auch gar keine.

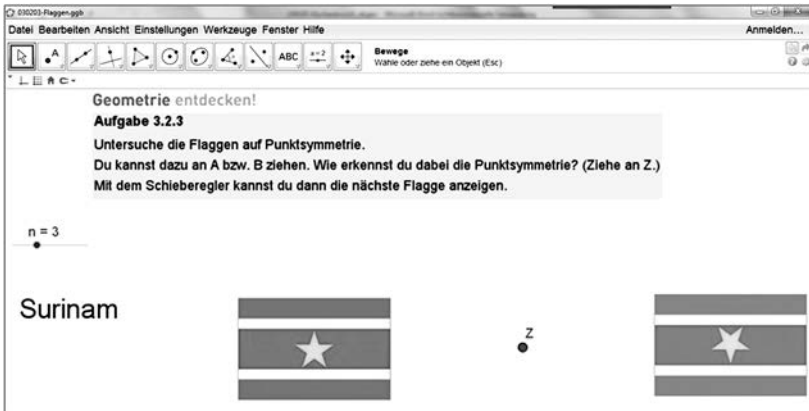


Abb. 17: Geometrie entdecken! Teil 1 (2014). Ausgangssituation

Entsprechend wird für die Suche nach einer Punktsymmetrie zu einer Flagge ein punktgespiegeltes Bild erzeugt. Der Punkt Z, an dem gespiegelt wird, kann bewegt werden, so dass man auch hier unmittelbar überprüfen kann, ob Urbild und Bild zur Deckung kommen oder nicht. Wenn man eine solche Situation findet, ist die Figur punktsymmetrisch und *dieser spezielle* Spiegelpunkt ist der Symmetriepunkt der Figur! In diesem Fall erkennt man, dass Urbild und Spiegelbild nicht zur Deckung gebracht werden können.



Abb. 18: Geometrie entdecken! Teil 1. Keine Überdeckung möglich!

## Fazit

Leider tragen viele Schulbücher beim Thema Symmetrie eher zu Verwirrung und Unklarheit bei als zum Aufbau eines sauberen Grundverständnisses. Typische Fehler sind:

- Handlungsorientierte Einstiege mit Falten und Spiegeln werden so durchgeführt, dass sie ein Verständnis für den späteren Zusammenhang zwischen Achsensymmetrie und Achsen Spiegelung behindern, weil sie so konzipiert werden, dass sie für die Hinführung zur Spiegelung geeignet sind, aber nicht für Symmetrie.
- Es werden häufig Spiegelung als (ebene) Abbildung einer Figur auf eine andere und Symmetrie als Eigenschaft einer Figur durcheinander gebracht.
- Es werden häufig nicht Urbild, Bild und die Komposition von beiden als neue ‚ergänzte Figur‘ höherer Ordnung auseinander gehalten.
- Es wird gelegentlich der Zusammenhang von (Achsen-)Spiegelung und (Achsen-)Symmetrie getrennt und die Spiegelung erst nach der Symmetrie und unabhängig davon thematisiert.
- Ein dynamisches Verständnis von Symmetrie und das Erkennen einer Symmetrieachse als einer besonderen Spiegelachse, mit der die Figur mit sich zur Deckung gebracht wird, sind nur selten zu finden.
- Die stillschweigende Vermischung von 3D- und 2D-Aspekten in den anschaulichen Beispielen kann eine zusätzliche Hürde bedeuten.

All das führt dazu, dass bei Schülern mindestens der Aufbau einer stimmigen Grundvorstellung behindert wird, wenn nicht sogar aktiv Fehlvorstellungen aufgebaut werden.

Mit dynamischen Geometrie-Arbeitsblättern kann man aber heute schüleraktiv ein tragfähiges Verständnis von Symmetrie als Ergebnis einer speziellen Achsen- oder Punktspiegelung aufbauen.

## Literatur

bettermarks: <http://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/symmetrie-und-bewegungen.html>. Zugriff am 10.9.2014.

Elschenbroich, H.- J. & Seebach, G. (2014). Geometrie entdecken! Mit GeoGebra – Teil 1. Rosenheim: co.Tec Verlag.

Fokus 6 (2006). Berlin: Cornelsen.

Lambacher-Schweizer 6, Nordrhein-Westfalen (1998). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Lambacher-Schweizer 5, Nordrhein-Westfalen (2013). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Mathe live 5 (2014). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

MatheNetz 6 (2006). Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage, Westermann.

Mathematik real 6 (2007). Berlin: Cornelsen.

Mathematik real 6 (2012). Berlin: Cornelsen.

Schnittpunkt 6 (2011). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Schnittpunkt 5 Plus (2013). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Texas Instruments (2006 - 2014): TI-Nspire™ CAS, Version 3.09.0.

Zahlen und Größen 6, Gesamtschule Nordrhein-Westfalen (2009). Berlin: Cornelsen.



# **Stempeln mit platonischen Körpern**

## **– Vom Raum in die Ebene und zurück**

**Stephan Berendonk, Marc Sauerwein, Ysette Weiss-Pidstrygach**

Bewegungen der Ebene und des Raums bieten vielfache Möglichkeiten geometrische Herangehensweisen mit algebraischen und kombinatorischen Beschreibungen in Beziehung zu setzen. Ein schöner Ansatz, ebene und räumliche Phänomene beziehungsreich darzustellen, sind Kippspuren platonischer Körper. Tiefe Konzepte, wie Gruppe, Wirkung einer Gruppe, homogener Raum und strukturerhaltende Abbildungen können durch die Untersuchung der Regelmäßigkeiten schöner Ornamente und Muster motiviert und entdeckt werden. Die Untersuchung von Kippspuren führt zur Erarbeitung lokaler Theorien, die verschiedenen Phänomenen einen gemeinsamen Rahmen geben.

### **Einleitung und Gliederung**

Die Motivation, nach anderen Zugängen zu linearen und affinen Abbildungen zu suchen als den derzeitigen, in den meisten Schulbüchern verfolgten, entstammt systematisierten Erfahrungen aus einem Seminar im Masterstudium des gymnasialen Lehramts Mathematik. Wir geben eine ausführliche Beschreibung des Kontextes dieser Lehrveranstaltung, um dem Leser<sup>1</sup> die Verortung der von uns beobachteten Probleme zu erleichtern. Darauf folgt ein kurzer Überblick zu Darstellungen linearer und affiner Abbildungen in Schulbüchern, der auf der Wahrnehmung und Analyse einer großen Gruppe Studierender beruht und von uns zusammengefasst wird. Wir stellen systematisch auftretende Probleme der Studierenden beim Verständnis der Begriffsentwicklung und der Lernziele der Schulbuchautoren in einen theoretischen Zusammenhang und entwickeln daraus die inhaltlichen und methodischen Grundlagen für eine Lernumgebung. Diese wird am Ende kurz vorgestellt. Der Beitrag ist stoffdidaktisch orientiert und widmet sich Themen der Hochschulmathematikdidaktik.

---

<sup>1</sup> Es ist immer auch gleichberechtigt die jeweilige Form des anderen Geschlechts gemeint.

## Verortung des Problems

Das Seminar ist Teil des Moduls *Ausgewählte Probleme der Sek II* und basiert auf der Auseinandersetzung der Studierenden mit Darstellungen kanonischer mathematischer Inhalte in verschiedenen Mathematikschulbüchern. Es wurde in 13 verschiedenen Gruppen mit jeweils zirka 20 Studierenden gehalten. Die Themen *Vektor als Werkzeug*, *Gleichungssysteme*, *Vektorräume und lineare Abbildungen*, *Das Skalarprodukt* sowie *Affine Räume und affine Abbildungen* sind Seminarthemen. Die entsprechenden Seminarsitzungen werden durch einen oder zwei Studierende als Workshops gestaltet. Im Vorfeld der Veranstaltung werden alle Themen der Seminarsitzungen in einer Vorlesung überblicksmäßig vorgestellt und Beispiele aus verschiedenen fachdidaktischen Perspektiven untersucht. Die Seminarsitzungen werden durch zwei Vorbesprechungen vorbereitet, die Rückmeldungen und Beurteilungen erfolgen aufgrund einer Nachbesprechung, einer Hausarbeit und einer mündlichen halbstündigen Modulprüfung zur Vorlesung und zur gehaltenen Seminarsitzung.

Die Studierenden können sich bei der von ihnen zu haltenden Seminarsitzung entscheiden, ob der Workshop zum Thema anhand von Lehrbucheinstiegen oder anhand von Lehrbuchabschnitten zum Üben, Vertiefen, Vernetzen gestaltet wird. Methoden, mit deren Hilfe in dieser Art Lehrveranstaltung der Wechsel zwischen Schüler-, Lehrer- und Autorenperspektive unterstützt werden kann, wurden in einem anderen Beitrag (Weiss-Pidstrygach, 2013) besprochen. Zu allen Themen gibt die Vorlesung ergänzende fachdidaktische Artikel, die sowohl stoffdidaktische, (Walser, 2010<sup>2</sup>, Grinberg, 2011, Kirsch & Zech, 1974, Artmann & Törner, 1984, Henn & Filler, 2015, S. 1-11), als auch diagnostische und methodische Probleme (Bürger et al, 1980, Fischer, 2006) diskutieren. Die Analyse und Systematisierung von Problemen der Studierenden mit den in den Schulbüchern vollzogenen Begriffsentwicklungen erfolgt aus tätigkeitstheoretischer Sicht (Leontjew, 1976, Chaiklin, 2007, Del Rio & Alvarez, 2007) und berücksichtigt didaktische Ansätze zur Interaktion in kleinen Gruppen (Fenstermacher, 1994, Correa Molina & Gervais, 2010, Zawojewski et al., 1998).

---

<sup>2</sup> <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:25629/eth-25629-02.pdf>

## Das arithmetische Dasein geometrischer Abbildungen in Mathematikschulbüchern

Der folgenden Beschreibung liegen die Schulbücher Lambacher Schweizer, Elemente der Mathematik und Neue Wege zugrunde. Diese Schulbücher unterscheiden sich bezüglich impliziter und expliziter Begriffsentwicklung, der Arbeit mit Beispielen und in ihrer Problemorientierung. Wir gehen im Folgenden hauptsächlich auf Aspekte ein, die bei der Schulbuchanalyse der Studierenden zum Thema *Geometrische Abbildungen* eine Rolle gespielt haben.

In der Mittelstufe werden Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen, zentrische Streckungen und Scherungen geometrischer Figuren konstruiert. Einige geometrische Eigenschaften, die für die Konstruktionen notwendig sind oder in Kongruenz- und Ähnlichkeitsbeweisen vorkommen, werden benannt. Andere geometrische Eigenschaften wie Geradentreue, Paralleltreue oder Teilverhältnistreue spielen hier noch keine Rolle.

Eine Systematisierung und Formalisierung geometrischer Abbildungen erfolgt (wenn überhaupt) in der Oberstufe bei der Behandlung linearer und affiner Abbildungen.

Bei geometrischen Abbildungen wird jedem Punkt  $P(x_1|x_2)$  ein Bildpunkt  $P'(x'_1|x'_2)$  zugeordnet. Der Zusammenhang zwischen Punkt und Bildpunkt kann häufig durch Abbildungsgleichungen beschrieben werden. Bei Verschiebungen, Spiegelungen an der  $x_1$ - oder  $x_2$ -Achse sowie bei zentrischen Streckungen lassen sich die Abbildungsgleichungen leicht bestimmen:

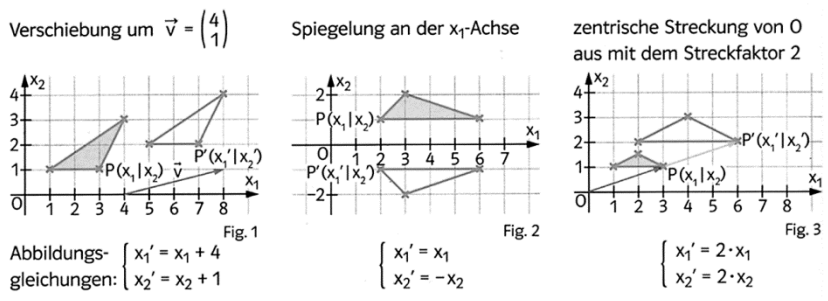


Abb. 1: Arithmetisierung geometrischer Abbildungen<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Lambacher Schweizer, Leistungskurs RLP, 2011, S. 426

Hier findet auch der Übergang von Abbildungen geometrischer Figuren zu Abbildungen der Ebene statt: Dies erfolgt durch die Einführung kartesischer Koordinaten im Urbild- und Bildraum der Abbildung. Dadurch werden Abbildungen geometrischer Figuren zu Abbildungen von Zahlen, die (im Falle linearer bzw. affiner Abbildungen) mit Hilfe linearer Gleichungssysteme beschrieben werden kann. Wir können also von einer Arithmetisierung der Abbildungen sprechen (Abb.1).

Zur Reflektion der mathematischen Grundlagen dafür, dass der Übergang von der Abbildung der Figur zur Abbildung der Ebene mithilfe des linearen Gleichungssystems gerechtfertigt ist, werden die Eigenschaften Geradentreue, Paralleltreue und Teilverhältnistreue benannt. Umkehrbarkeit, Existenz von Fixpunkten und Fixgeraden werden ebenfalls als Eigenschaften der Abbildungen eingeführt und arithmetisiert, d. h. als Eigenschaften der Lösungstupel der entsprechenden Gleichungssysteme ausgedrückt. Der Zusammenhang zwischen Geradentreue, Paralleltreue, der Existenz von Fixpunkten und der Linearität der Abbildung wird jedoch nicht explizit diskutiert. Durch die Ersetzung der Abbildungen durch Gleichungssysteme und ihre Umschreibung in Matrixform wird der Bezug zu den im Schulbuch zuvor behandelten Themen Gleichungssysteme und Matrizen hergestellt und im weiteren algebraisch gearbeitet. Einige Schulbücher beginnen mit Abbildungen von Koordinatengittern. Dabei wird Geradentreue und Paralleltreue aus dem Vergleich des quadratischen Gitters (samt der zugehörigen Geraden) des Urbilds mit dem aus Parallelogrammen gebildeten Gitter des Bildes erschlossen. Für Ergänzungen und Exaktifizierungen dieses Zugangs siehe Henn & Filler (2015).

Festzuhalten bleibt also, dass die geometrischen Eigenschaften der geometrischen Abbildungen in den Schulbüchern nur eine untergeordnete Rolle spielen. Sie dienen hauptsächlich zur Visualisierung algebraischer Zusammenhänge, im Speziellen des Matrixkalküls.

### **Konfrontation des schulischen Zugangs mit der historischen Genese**

Die Geschichte der Entwicklung von Lösungsverfahren linearer Gleichungen ist lang. Ursprünge für Lösungsverfahren kann man schon in babylonischen Verfahren zur Berechnung konkreter geometrischer Größen (2000 v. Chr.) entdecken. Das explizite Verfahren von Cramer (1704-1752) zur

Lösung linearer Gleichungssysteme wird erst über 3000 Jahre später entwickelt. Die lange implizite Entwicklung des Kalküls wird durch geometrische Problemstellungen und die Notwendigkeit umfangreicher Rechnungen motiviert und angeregt.

Die explizite Definition des Vektorraums, wie sie Studierende aus den Anfängervorlesungen kennen, ist historisch gesehen sehr modern. In dieser Form wurde sie erst im letzten Jahrhundert eingeführt (Scholz, 1990). Wie die Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme hat auch der Begriff des Vektorraums eine lange Vorgeschichte, beginnend mit der Einführung kartesischer Koordinaten (R. Descartes, 1596-1650), geometrischer und algebraischer Entwicklungen komplexer Zahlen und Quaternionen (R. Hamilton, 1805-1865) und der Untersuchung linearer Kombinationen im Rahmen der Ausdehnungslehre (H. G. Grassmann, 1809-1877). Lineare Gleichungssysteme und lineare Abbildungen wurden lange Zeit unabhängig voneinander untersucht. Ihr Zusammenhang wurde erst spät entdeckt. Im schulischen Zugang wird diese intellektuelle Leistung trivialisiert. Für eine ausführlichere historische Darstellung siehe z. B. Artmann & Törner (1981) und für einen genetisch-historischen Zugang van der Waerden (1966) und Brieskorn (1983).

Wichtig ist in unserem Zusammenhang, dass die historische Genese der Theorien linearer Räume, linearer Gleichungssysteme und linearer Abbildungen jeweils durch viele konkrete geometrische und algebraische Problemstellungen und den damit einhergehenden Rechenerfahrungen vorangetrieben wurde. Die verschiedenen Anwendungen des Kalküls, wie beispielsweise die oben beschriebene Arithmetisierung der geometrischen Abbildungen und die Nutzung geometrischer Darstellungen als Visualisierungen algebraischer Zusammenhänge gewähren nur sehr eingeschränkte Einsicht in die Entstehung des Kalküls. Die Skizzierung der langen und komplexen historischen Entwicklung der Begriffe lineare und affine Abbildung weist auch auf ein Problem der schulischen Begriffsentwicklung hin: Die notwendigen Verkürzungen und Vernachlässigungen von Prozess und historischer Entwicklung. Auch eine genetisch-historische Entwicklung der Begriffe im derzeitigen Mathematikunterricht scheint (auch aufgrund der bildungspolitischen Rahmenbedingungen) kaum umsetzbar. Sowohl die langen impliziten und ostentativen Phasen als auch die verschiedenen Ursprünge der historischen Begriffsentwicklung erschweren einen unmittelbaren Bezug.

## Rezeption der Begriffsentwicklung geometrischer Abbildungen ausgewählter Schulbücher durch Lehramtsstudierende

Die in der Vorlesung behandelten Beispiele zur Schulbuchanalyse sind aus den Schulbüchern Lambacher Schweizer, Elemente der Mathematik und Neue Wege, die Studierenden können gleichwohl auch andere Lehr- und Lernmaterialien zur Gestaltung ihres Workshops wählen.

Bei der Gestaltung der Workshops zu den Themen *Gleichungssysteme, lineare Abbildungen und affine Abbildungen* konnten wir in fast allen Vorbesprechungen die gleichen Probleme beobachten. Diese lassen sich in vier Problemfelder einordnen und zusammenfassen:

### 1. Experimentelles und Entdeckendes Lernen

- Es herrscht die Fehlvorstellung vor, dass Entdeckendes Lernen schon durch die Einbeziehung einer hinreichenden Anzahl von Anwendungen eines Sachverhalts realisiert werden könnte.
- Experimentelles und entdeckendes Lernen als bloßes Lippenbekenntnis: Authentischen Kontexten, in denen Entdeckungen stattfinden könnten, einen Platz einzuräumen, wird theoretisch begrüßt, doch im konkreten Fall aufgrund von Zeitmangel und vermeintlich zu hoher Schwierigkeit verworfen.
- Das Potential guter Einstiegsaufgaben wird nicht ausgeschöpft. Aufkeimende Fragen werden nicht weiter verfolgt.
- Die Regeldetri *so heißt das, so geht das, so ist das* (Jahnke, 2012) ist eine akzeptierte Stoffdarstellung, die als übersichtlich und strukturiert empfunden wird.

### 2. Kalkülorientierung

- Die eigene Gewöhnung an den Kalkül, die Automatisierung der Koordinatenmethode und des Tupelrechnens führt zur Annahme konzeptueller Einfachheit der zugrunde liegenden Ideen. Diese Vorstellung steht im offensichtlichen Widerspruch zur historischen Entwicklung der Begriffe.
- Große Offenheit und Interesse bestehen daran, den Matrixkalkül weiter zu systematisieren und verschiedene Begriffe (Vektorraum, affiner Raum, Euklidischer Raum) besser unterscheiden zu lernen.

Erklärungen und Aufgabenstellungen, welche die konzeptuelle Tiefe eines Begriffs sichtbar machen, stoßen gleichwohl auf wenig Interesse, in manchen Fällen sogar auf Abwehr.

- Stoffdidaktische Reflexionen bleiben auf die Schülerperspektive beschränkt. Das für das Lösen von Schulbuchaufgaben notwendige Wissen steht im Vordergrund. Der Unterschied zu den Schülerinnen und Schülern besteht hauptsächlich in der erworbenen Kalkülgewandtheit.
- Es herrscht eine gewisse Fraglosigkeit. Den Schülerinnen und Schülern werden vor allem solche Fragen zugetraut, auf welche die Studierenden eine Antwort kennen. Meist sind dies Fragen, deren Antworten in der Anwendung des Matrizenkalküls bestehen.
- Zur Struktur des Vektorraums analoge Strukturen, wie die Punktaddition und Punktmultiplikation in der Ebene (Duzhin & Chebotarevskiĭ, 2004), an welche die Studierenden jedoch nicht gewöhnt sind, werden als zu schwierig für Schülerinnen und Schüler gesehen.

### 3. Geometrie

- Ein Perspektivwechsel weg von den Gleichungen und Matrizen hin zu Abbildungen im geometrischen Kontext ohne Koordinatenmethode fällt sehr schwer. Geometrische Kontexte werden nur zum Zweck der Visualisierung von Abbildungen in kartesischen Koordinaten als Bereicherung gesehen. Die Eigenständigkeit der Geometrie ist damit verloren gegangen.
- Die geometrischen Konstruktionen der Sek I (Drehung, Spiegelung, Translation, Scherung, Streckung) werden nicht in Zusammenhang mit dem Abbildungsbegriff gebracht.

Aus diesen beobachteten Problemen lassen sich Anforderungen an einen alternativen Zugang zum Thema *geometrische Abbildungen* ableiten. Dieser sollte von einem Phänomen oder einem tief in die Sache hineinführenden Problem ausgehen und dann viel Spielraum für eigene Fragen und Erkundungen bereithalten. Die geometrischen Abbildungen sollen dabei ihren geometrischen Charakter zeigen. Zudem soll der Zugang dem gängigen Anwendungsbereichs des Standardkalküls hinreichend fremd sein, um die Studierenden aus den gewohnten Denkstrukturen herauszuführen, so dass ein dem Gegenstand angemessener Kalkül erst entwickelt und Verbindungen zu

bestehendem Wissen aus den Vorlesungen erst mühsam hergestellt werden müssen.

Die im Folgenden vorgestellten Lernmaterialien zu Kippspuren platonischer Körper sind in drei Workshops verwendet und durch Materialien zu Verkettungen von Bewegungen der Ebene ergänzt worden. Sie sind als Grundlage für Workshops oder als Arbeitsmaterialien für Seminare zur Fachdidaktik der Geometrie konzipiert.

## Workshop 1: Verkettungen von Drehungen, Spiegelungen und Translationen in der Ebene

### Teil 1

Betrachten Sie den folgenden Schulbuchauszug<sup>4</sup> (Abb.2.):

<b>1. Die Achsen sind zueinander parallel.</b>	<b>2. Die Achsen schneiden sich.</b>
Spiegelung an a, dann an b.	Spiegelung an a, dann an b.
<p>Verkettet man zwei Achsenspiegelungen, so ergibt sich</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. eine Verschiebung, wenn die Achsen zueinander parallel sind,</li><li>2. eine Drehung, wenn sich die Achsen schneiden. Der Schnittpunkt der Geraden ist zugleich das Drehzentrum.</li></ol>	

Abb. 2: Verkettungen von Achsenspiegelungen

Zu dem Schulbuchauszug werden den Studierenden die folgenden Arbeitsaufträge gegeben:

---

<sup>4</sup> Lambacher Schweizer, Klasse 6, 1994, S. 188



1. Geben Sie den Inhalt des Auszugs mit eigenen Worten wieder, was ist nach Ihrer Einschätzung die Intention des Autors?
2. Ergänzen Sie gegebenenfalls die bestehende Formulierung.
3. Beweisen Sie Ihre mathematischen Aussagen.
4. Formulieren Sie Arbeitsaufträge, deren Ziele die Konstruktionen, die Konstruktionsbeschreibungen und die Reflexion der geometrischen Eigenschaften der Konstruktion der Verkettungen von Spiegelungen sind.
5. Entwickeln Sie eine didaktische Sachanalyse zu Verkettungen von Spiegelungen.

Zu Verkettungen von Spiegelungen siehe auch Walser (2014).

Betrachten Sie den folgenden Schulbuchauszug<sup>5</sup> (Abb.3):

Will man die Verkettung von geometrischen Abbildungen untersuchen, so kann man dies durch Abbilden eines „F“ ausprobieren.

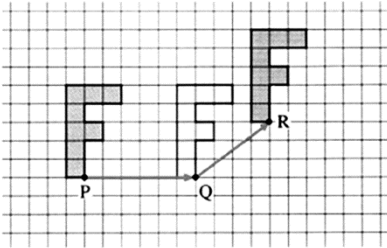
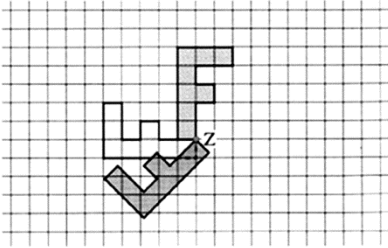
<b>Verkettung zweier Verschiebungen</b>	<b>Verkettung zweier Drehungen um dasselbe Zentrum Z</b>
	
<b>Verkettet man zwei Verschiebungen, dann erhält man wieder eine Verschiebung. Verkettet man zwei Drehungen um dasselbe Zentrum Z, dann erhält man wieder eine Drehung um dieses Zentrum Z.</b>	

Abb. 3: Verkettungen von Translationen und von Drehungen

1. Geben Sie den Inhalt des Auszugs mit eigenen Worten wieder, was ist nach Ihrer Einschätzung die Intention des Autors?
2. Ergänzen Sie gegebenenfalls die bestehende Formulierung.

<sup>5</sup> Lambacher Schweizer, Klasse 6, 1994, S. 190

3. Beweisen Sie Ihre mathematischen Aussagen.
4. Formulieren Sie analoge Sätze für alle möglichen Kombinationen von Verkettungen von Bewegungen der Ebene und beweisen Sie diese.
5. Formulieren Sie Arbeitsaufträge, deren Ziele die Konstruktionen, die Konstruktionsbeschreibungen und die Reflexion der geometrischen Eigenschaften der Konstruktion der Verkettungen von Verschiebungen und Drehungen sind.
6. Entwickeln Sie eine didaktische Sachanalyse zu Verkettungen von Verschiebungen und Drehungen.

### **Teil 2**

Präsentieren Sie die systematische Darstellung Ihrer Resultate als *Theorie der Spiegelungen, Drehungen, Translationen und ihrer Verkettungen*.

### **Teil 3**

Führen Sie das folgende Experiment durch: Kopieren Sie eine Seite mit sichtbaren Unregelmäßigkeiten (wie mehrfache Absätze) aus einem Buch, z. B. Seite 4 dieses Artikels. Kopieren Sie die Seite auf eine durchsichtige Folie. Legen Sie die Folientextkopie passgerecht auf den Text. Bewegen Sie die Folie.

1. Was beobachten Sie?
2. Erarbeiten Sie eine didaktische Sachanalyse zum Thema *Spiegelungen, Drehungen und ihre Verkettungen*, die ihren Ausgangspunkt in dem von Ihnen im Experiment beobachteten Phänomen hat.

## Workshop 2: Kippspuren platonischer Körper

Im folgenden Schulbuchauszug<sup>6</sup> (Abb. 4) wird eine Parkettierung der Ebene als Resultat der Verkettung von Drehungen einer regelmäßigen geometrischen Figur dargestellt.

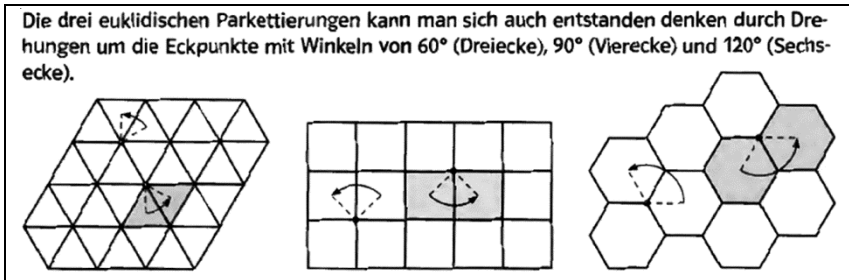


Abb. 4: Parkettierungen der Ebene mit regelmäßigen Dreiecken, Vierecken und Sechsecken

Durch welche Bewegungen (der Ebene oder des Raumes) einer ebenen Figur können Sie die gleichen Parkettierungen erzeugen?

### *Kippbewegungen platonischer Körper und Parkettierungen*

Ein platonischer Körper steht auf einer Ebene. Wir lassen ihn über eine seiner Kanten kippen. Die Hintereinanderausführung des Kippens über verschiedene Kanten lässt den Körper über die Ebene *rollen*, wir nennen die Bewegung eine Kippbewegung des platonischen Körpers. Wir färben die Kanten des Körpers und erzeugen dadurch ein Muster in der Ebene.

1. Kann die Parkettierung mit regelmäßigen Dreiecken als Resultat des Abrollens eines Tetraeders entlang seiner Kanten erzeugt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.
2. Kann die quadratische Parkettierung durch das Abrollen eines Würfels entlang seiner Kanten erzeugt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.
3. Kann die Parkettierung mit regelmäßigen Sechsecken durch das Abrollen eines platonischen Körpers erzeugt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.

<sup>6</sup>Lambacher Schweizer, Klasse 6, 2010, S. 82

4. Welches Muster wird durch die gefärbten Kanten beim Abrollen eines Dodekaeders erzeugt?
5. Lösen Sie Aufgabe 19 aus dem Schulbuch Lambacher Schweizer<sup>7</sup> (Abb. 5). Finden Sie eine handlungsorientierte Aufgabenstellung für das zu lösende Problem.

**19** In Fig. 4 sind sechs gleich große reguläre Fünfecke und eine Raute zu einem gleichseitigen Vierzehneck zusammengelegt.

- a) Lässt sich die Ebene mit weiteren regulären Fünfecken und mit weiteren gleichen Rauten parkettieren?
- b) Wie groß sind die Innenwinkel der Raute?
- c) Lässt sich das Vierzehneck nur mit weiteren Exemplaren der Raute zu einer Parkettierung der Ebene auffüllen?

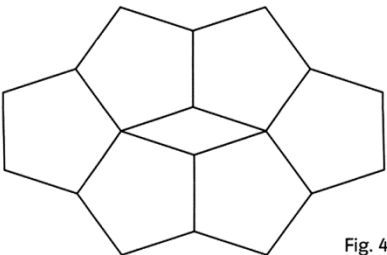


Fig. 4

Abb. 5: Parkettierung der Ebene mit regelmäßigen Fünfecken und Rauten

### Stempeln mit einem Tetraeder

Wir lassen ein Tetraeder durch Kippbewegungen über seine Kanten auf einer Ebene rollen. Die Ebene sei mit regelmäßigen Dreiecken (Seitenflächen des Tetraeders) zur Bewegung passend parkettiert (Abb.6b).

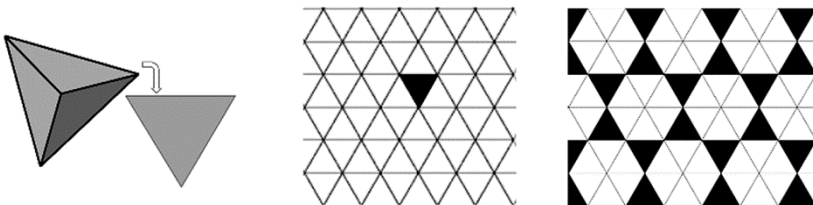


Abb. 6: a) Stempeln, b) Parkettierung der Ebene mit regelmäßigen Dreiecken  
c) Kippspur der Seitenfläche eines Tetraeders

Wir färben eine Seitenfläche des Tetraeders und erzeugen dadurch ein Muster in der Parkettierung.<sup>8</sup> Wir nennen das Erzeugen des Musters *Stempeln* (Abb.6a) und das dabei durch die Kippbewegung des Tetraeders entstehende Muster *die Kippspur der Seitenfläche des Tetraeders* (Abb.6c).

<sup>7</sup> Lambacher Schweizer, Klasse 6, 2010, S. 88

<sup>8</sup> Im Gegensatz zu den vorhergehenden Aufgaben sollen Parkettierungen jetzt nur mit *einer Seitenfläche* des Tetraeders erzeugt werden.

Handlungsorientierte Problemstellungen zum Erkunden der Kippspur eines Tetraeders sind z. B.:

1. Stempeln Sie mit einem Tetraederstempel die Parkettierung auf dem Papier ab, indem Sie die entsprechenden Dreiecke der Parkettierung einfärben (Lösung Abb. 6c).
2. Kann durch die Kippbewegung des Tetraeders die ganze Ebene abgestempelt werden?
3. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Wir ersetzen die Färbung der ganzen Seitenfläche durch einen färbenden Smiley und stempeln die Ebene erneut (Abb. 7). Das Smiley legt drei Eckpunkte des Tetraeders als Eckpunkte der Seitenfläche fest. Beim Stempeln mit der gefärbten Seitenfläche sind die Positionen des Tetraeders durch das Feld der Parkettierung und die Lage der Seitenfläche bestimmt: Ein Beobachter, der das ungefärbte Tetraeder in einer Position sieht, weggeht, zurückkehrt und das Polyeder in der gleichen Position sieht, könnte nicht unterscheiden, ob es in der Zwischenzeit gerollt wurde oder ob es nicht bewegt wurde. Ein um  $120^\circ$  „gedrehtes“ gefärbtes Tetraeder, welches auf seiner gefärbten Seitenfläche steht, wäre vom unbewegten Tetraeder nicht zu unterscheiden. Durch die nicht symmetrische Kennzeichnung der Seitenfläche könnten nun auch diese beiden Positionen des Tetraeders unterschieden werden. Ob eine Drehung durch eine geschlossene Rollbewegung erzeugt werden kann, klärt die folgende Problemstellung:

4. Stempeln Sie die Parkettierung durch die Kippbewegung des Tetraeders mit dem Smileystempel.
5. Können Felder der Parkettierung durch das Smiley des rollenden Tetraeders verschieden abgestempelt werden?
6. Begründen Sie Ihre Aussage.

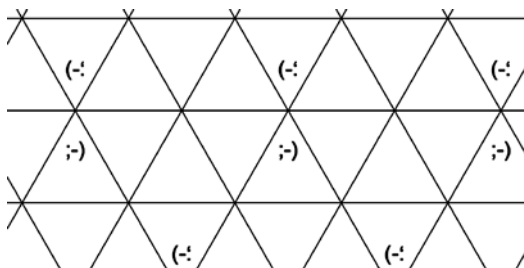


Abb. 7: Smiley-Kippspur einer Seitenfläche des Tetraeders

Wir haben die Kippspur einer Seitenfläche des Tetraeders und die Kippspur der Seitenfläche mit gekennzeichneten Eckpunkten betrachtet. Wir untersuchen nun die Kippspur einer Ecke des Tetraeders und nutzen wieder den Perspektivwechsel zwischen Kippspuren in der Ebene und der Rollbewegung des Tetraeders im Raum, um diese Bewegung besser zu verstehen (Abb. 8).

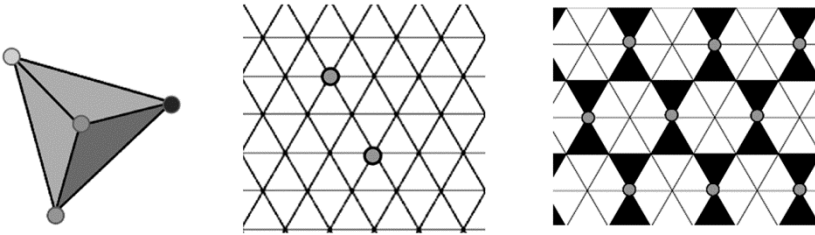


Abb. 8: Kippspuren der Eckpunkte eines Tetraeders

7. Zeichnen Sie die Kippspuren der drei Eckpunkte.
8. Beweisen Sie Ihre Aussagen zu den Fragen 2 und 5 unter Verwendung der Kippspuren der Ecken.

### *Kippspuren von Würfeln*

Wir lassen einen Würfel durch Kippbewegungen über seine Kanten auf einer Ebene rollen. Die Ebene sei mit zu den Seitenflächen des Würfels kongruenten Quadraten parkettiert (Abb.9).

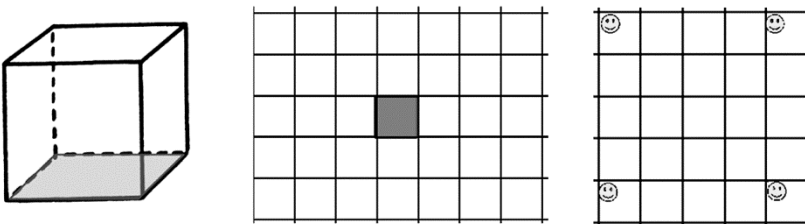


Abb. 9: Stempeln durch Kippbewegung des Würfels, Stempeln mit Smiley

Analog zu den Fragestellungen, die wir für das Tetraeder untersucht haben, stellen wir für den Würfel folgende Probleme:

1. Stempeln Sie mit einem Würfelstempel die Parkettierung auf dem Papier ab, indem Sie die entsprechenden Quadrate einfärben.

2. Kann durch die Kippbewegung des Würfels die ganze Ebene abgestempelt werden?
3. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Auch hier erfolgt die Koordinatisierung der Eckpunkte der Stempelfläche durch ein Smiley und wir fragen:

4. Können Felder der Parkettierung durch das Smiley des rollenden Würfels verschieden abgestempelt werden? (Lösung Abb. 10)
5. Begründen Sie Ihre Aussage.

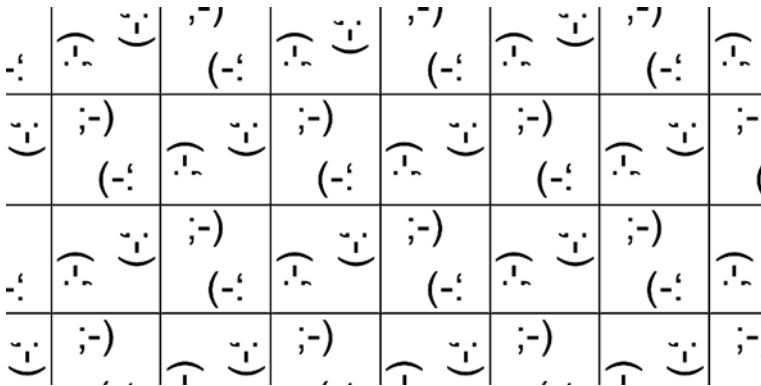


Abb.10: Smiley-Kippspur einer Seitenfläche des Würfels

Sowohl die Kippspur der Seitenflächen als auch die Spur des Smyleystempels weisen Unterschiede zur Kippspur des Tetraeders auf: Die Kippspur färbt die ganze Ebene und jedes Quadrat kann durch den Smiley zwei Mal verschieden abgestempelt werden.

Analog zum Tetraeder zeichnen wir wieder die Kippspuren der Eckpunkte des Würfels verschiedenfarbig in unsere Parkettierung ein.

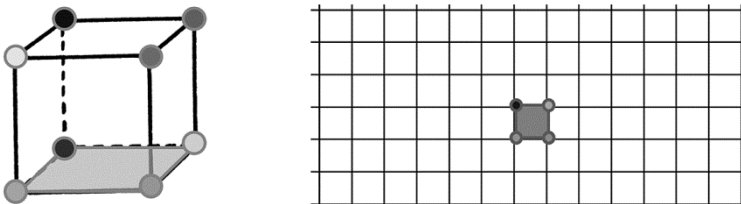
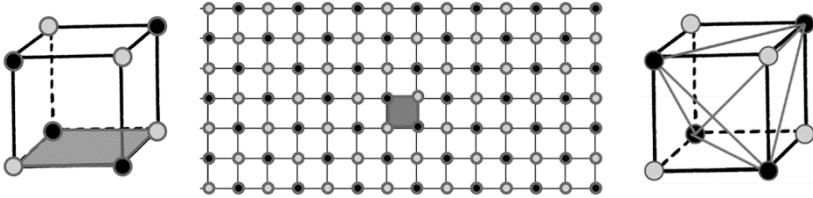


Abb.11 Kippspuren der Ecken des Würfels

Es zeigt sich, dass die Kippspuren von je vier Eckpunkten zusammenfallen:

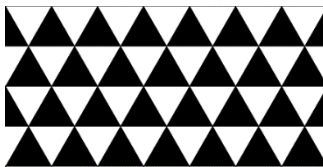
6. Beweisen Sie: Wenn die Kippspuren von zwei Eckpunkten einen gemeinsamen Punkt haben, dann fallen sie zusammen.
7. Beweisen Sie, dass die acht Eckpunkte des Würfels nur zwei Kippspuren haben.



**Abb. 12:** a) Eckpunkte mit gleicher Kippspur, b) Kippspuren der Eckpunkte eines Würfels, c) Tetraeder im Würfel

Gehen wir von dem Muster der Kippspuren in der Ebene wieder zurück in den Raum und färben die Eckpunkte mit zusammenfallenden Kippspuren gleich ein (Abb. 12a), so erkennen wir, dass die gleichfarbigen Punkte des Würfels die Eckpunkte eines in den Würfel eingeschriebenen Tetraeders bilden (Abb. 12c).

Analog zu den Aufgaben zum Tetraeder und Würfel können diese auch für die anderen Platonischen Körper formuliert werden. Dies wird hier nicht mehr explizit ausgeführt. Erwähnt sei jedoch, dass hier insbesondere ein Aspekt der Dualität von Würfel und Oktaeder herausgearbeitet werden kann. Aufbauend auf der Zweifärbung der Würfecken und der daraus resultierenden Kippspur (Abb. 12), kann der Frage nachgegangen werden, ob die Flächen eines Oktaeders mit mehr als einer Farbe so gefärbt werden können, dass bei der Parkettierung der Ebene jedes Dreieck genau eine eindeutige Farbe hat.



**Abb. 13:** Kippspur der Seitenfläche eines Oktaeders

Auch beim Oktaeder hätte man jedoch wie im Fall des Tetraeders und des Würfels kleinschrittig mit der Aufgabe begonnen: *Stempeln Sie mit einem*



*Oktaederstempel die Parkettierung auf dem Papier ab, indem Sie die entsprechenden Dreiecke einfärben (siehe Lösung Abb. 13).*

## **Resümee**

Wie wir gesehen haben, bieten Kippspuren platonischer Körper zahlreiche Möglichkeiten, ebene und räumliche Phänomene beziehungsreich darzustellen. Das Thema wurde in der Mathematikdidaktik häufiger aufgegriffen, u. a. in der Form von Knobelaufgaben (Freudenthal, 1970), als stoffdidaktischer Exkurs (Quaisser, 2000, Raffke, 1991, Raffke, 1996) oder als experimentelles Erkunden mit Dynamischer Geometrie (Schumann, 2004). Die Faszination des Themas liegt auch in seiner mathematischen Tiefe, dem Spiel zwischen Symmetriegruppen und ihren Darstellungen, Gruppenwirkungen und Parkettierungen, vom Kästchenpapier bis zum Penrose-Parkett.

Wir wollen und können mit den vorgestellten Materialien nicht alle erwähnten Probleme Studierender bei der Begriffsentwicklung geometrischer Abbildungen lösen. Die experimentelle Erschließung von Kippspuren bietet gleichwohl viele konkrete Ansätze, die begonnene geometrische Begriffsentwicklung der fünften und sechsten Klasse mit folgenden Zielstellungen fortzusetzen:

- Entwicklung instrumenteller, experimenteller und intuitiver Bewusstheit (Kaenders & Kvasz, 2011)
  - zur Beschreibung geometrischer Figuren, Körper und ihrer geometrischen Abbildungen
  - zur Bestimmung von Erhaltungsgrößen, Symmetrien
  - zur Nutzung geometrisch ausgezeichneter Längen und Größen zur Beschreibung geometrischer Abbildungen
- Perspektivwechsel zur Beschreibung eines Phänomens (Wechsel vom Raum in die Ebene und von der Ebene in den Raum)
- Erkundung der Ebene und des Raumes durch eine einfache Bewegung (Kippen) und deren Spuren
- handlungsorientierte Betrachtung der Kompositionen von Bewegungen und Entwicklung einer lokalen Theorie
- experimentelle implizite Einführung von Ideen eines wichtigen Gebietes der Mathematik – Darstellungstheorie

Die Autoren freuen sich über Anregungen zur Weiterentwicklung der Materialien und über einen Erfahrungsaustausch zu deren Nutzung in der Lehre.

*„Coming back to where you started is not the same as never leaving.”*

– Terry Pratchett, *A Hat Full of Sky*

### Literatur

- Artmann, B., & Törner, G. (1981). Bemerkungen zur Geschichte der Linearen Algebra. In: *Der Mathematikunterricht*, 27, 59-67.
- Artmann, B., & Törner, G. (1984). *Lineare Algebra und Geometrie: Grund- und Leistungskurs (Vol. 2)*. Vandenhoeck & Ruprecht.
- Brieskorn, E. (1983). *Lineare Algebra und analytische Geometrie, Bd.1*, Vieweg, Wiesbaden.
- Bürger, H., Fischer, R., Malle, G., Reichel, H.-Chr. (1980). Zur Einführung des Vektorbegriffs: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1 (3), 171-187.
- Chaiklin, S. (2003). The zone of proximal development in Vygotsky's analysis of learning and instruction. In: *Vygotsky's educational theory in cultural context*, Cambridge University Press, 1, 39-64.
- Del Rio, P., & Alvarez, A. (2007). Inside and outside the zone of proximal development: An ecofunctional reading of Vygotsky. In: *The cambridge companion to Vygotsky*. Cambridge University Press, 276-303.
- Duzhin, S. V., Chebotarevskii, B. D. (2004). *Transformation groups for beginners (Vol. 25)*. American Mathematical Soc.
- Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra (Doctoral dissertation)*.
- Freudenthal, H. (1971) Prijsvraag. In: *Pythagoras*, 10(4), 88-89.
- Grinberg, N. (2008). *Lösungsstrategien: Mathematik für Nachdenker*. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt a. M., S.85-113.
- Henn, H. W., Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Jahnke, T. (2012). Die Regeldetri des Mathematikunterrichts. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, WTM-Verlag, Münster.
- Kaenders, R., Kvasz, L. (2011). Mathematisches Bewusstsein. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., & Rathgeb, M. (Hrsg), *Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven*, Vieweg+Teubner, 71-85.
- Kirsch, A., Zech, F. (1972). *Affine Geometrie der Ebene*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

- Leontjew, A. N. (1979). Tätigkeit, Bewusstsein, Persönlichkeit. Volk und Wissen, Berlin, S.110 ff.
- Quaisser, E. (2000). Kippfolgen und Kippspuren regulärer Polyeder. In : Flachsmayer, J.& Fritsch, R. & Reichel, H.-Ch. (Hrsg). Mathematik-Interdisziplinär, Shaker Verlag, Aachen.
- Raffke, W. (1991). Würfelwälzungen. In: mathematica didactica 14:2/3, S. 62-68.
- Raffke, W. (1996). Quaderwälzungen. In: mathematica didactica 19:2, S. 92-97.
- Scholz, E. (Ed.). (1990). Geschichte der Algebra: Eine Einführung (Vol. 16). B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Schumann, H. (2004). Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel „Dreieck-Tetraeder“, math. did. 27, 63-74.
- van der Waerden, B. L. (1966). Erwachende Wissenschaft: Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, trans. from the Dutch by Helga Habicht, 2. erg. Aufl. (Vol. 8). Birkhäuser Verlag, Basel.
- Walser, H. (2014). Symmetrie in Raum und Zeit. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig.
- Weiss-Pidstrygach, Y. (2013). Begriffsbildung, Stationenlernen oder die Zone der nächsten Stationen. In A. Filler, M. Ludwig (Hrsg.). Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht Ziele und Visionen 2020. AK Geometrie 2012. Franzbecker, Hildesheim, Berlin, S.135-153.
- Zawojewski, Judith S., Lesh, Richard A., English, Lyn D. (1998). A Models and Modeling Perspective on the Role of Small Group Learning Activities. In: Lesh, Ricjard A., Doerr, Helen M. (Eds.). Beyond Constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, N. J., 337-358.



# **DIN-Format und Raum**

**Hans Walser**

Zusammenfassung. Ausgehend von didaktischen und erkenntnistheoretischen Problemen der Raumgeometrie werden zunächst einige Modelle von Polyedern vorgestellt, welche aus Papier oder Karton im DIN-Format hergestellt werden können. Anschließend wird die Grundidee des DIN-Formats auf andere Figuren übertragen, wobei wiederum der Raum eine wichtige Rolle spielt.

## **Die so genannte ebene Geometrie**

Die Geometrie in der Ebene ist nicht zweidimensional. Sie ist in den dreidimensionalen Raum eingebettet. Wir Menschen – Schüler wie Lehrer – sehen aus der dritten Dimension auf die zweidimensionale Geometrie-Ebene hinunter.

## **Raumgeometrie**

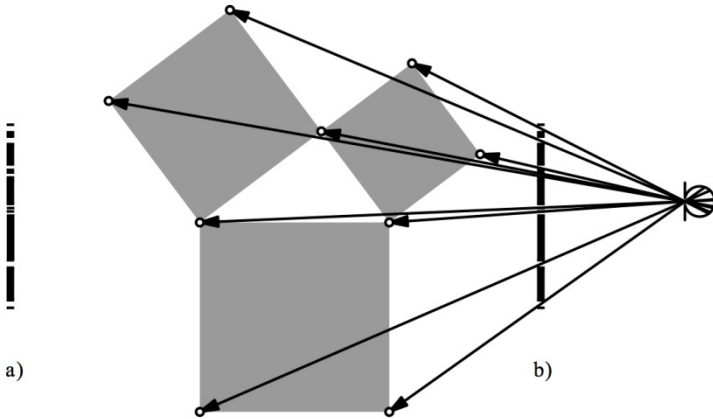
In der Raumgeometrie ist die Situation grundsätzlich anders. Wir leben selber im Raum. Wir stecken sozusagen mit dem Kopf in der Suppe, die wir auslöffeln sollten. Um eine dreidimensionale Geometrie von derselben Qualität wie die zweidimensionale Geometrie zu erhalten, müssten wir aus der vierten Dimension auf den dreidimensionalen Raum hinunterschauen können.

## **Zweidimensionale Geometrie für Bildschirmbewohner**

Unsere Probleme mit der dreidimensionalen Geometrie lassen sich illustrieren, indem wir uns die Situation von Leuten versetzen, welche in einer zweidimensionalen Welt leben. Also Leute aus Flatland (Abbott 1884, Burger 1978), Flachländer oder Screenbewohner.

### *Eine bekannte Figur*

Die Schulwandtafel der Flachländer ist eindimensional, die Flachlandlehrerin hat darauf eine recht bekannte Figur gezeichnet (Abb. 1a).



**Abb. 1:** Eine recht bekannte Figur

Wir erkennen die Figur erst in der Sicht aus der dritten Dimension (Abb. 1b). Ich frage mich, ob die Flachländer den Satz des Pythagoras je erkannt haben, und wenn ja, wie sie ihn beweisen konnten.

Vielleicht würden wir aus der 4d-Sicht auf die 3d-Raumgeometrie eine viel reichhaltigere Geometrie als die uns bekannte Raumgeometrie sehen. Das ist aber reine Spekulation und ähnlich irrelevant wie die Frage, ob es ein Leben nach dem Tod gibt oder ob das Licht im Kühlschrank wirklich ausgeht wenn wir die Tür schließen.

### *Puzzles*

Die Abbildung 2 zeigt ein scheinbar zweidimensionales Puzzle.

Um das noch fehlende Puzzle-Teil rechts oben einzufügen, müssen wir es allerdings in die dritte Dimension anheben, in der Luft verschieben und etwas drehen und dann einsenken. Diese Operation ist für Flachländer nicht machbar. Sie können zwar durch Ausmessen feststellen, dass das Puzzleteil hineinpasst (statisch), aber sie können es nicht einpassen (dynamisch). Ein 2d-Puzzle funktioniert nur im 3d-Raum.

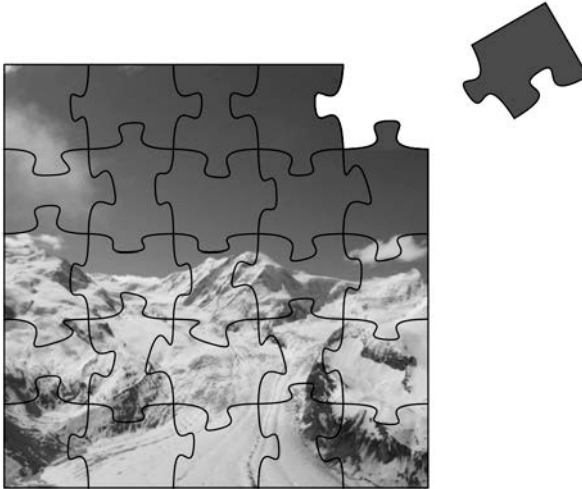


Abb. 2: Puzzle

Die Abbildung 3 zeigt ein entsprechendes Beispiel im 3d-Raum (vgl. [1], S. 13 und (Maier, 1998, S. 25)).

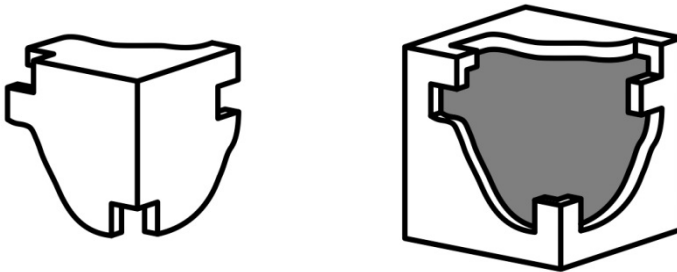


Abb. 3: „Unmögliches“ 3d-Puzzle

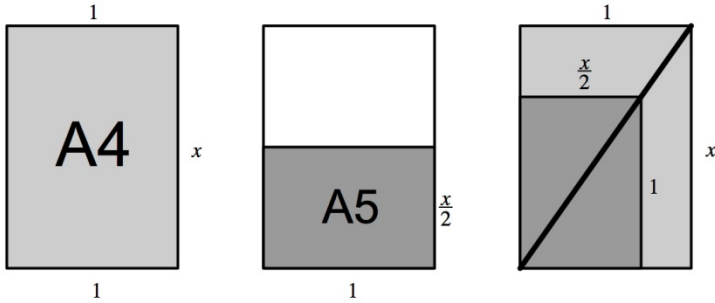
Die fehlende Ecke passt zwar hinein, lässt sich aber nicht einpassen. Auf jeder Seitenfläche des Würfels bräuchten wir eine Ausweichrichtung senkrecht zur jeweiligen Seitenfläche. Dies ist simultan nur in der vierten Dimension möglich.

### *Fazit*

„Unsere“ 3d-Geometrie ist ein Abklatsch der 2d-Geometrie.

**Das DIN-Format**

Wenn wir ein DIN A4 Papier längs der kurzen Mittellinie falten, ergibt sich ein doppellagiges DIN A5 Papier (Abb. 4). Dieses hat nun dieselbe Form (Ähnlichkeit), also dieselben Seitenverhältnisse wie das DIN A4 Papier. Dies kann durch Anlegen an eine gemeinsame Diagonale nachgeprüft werden.

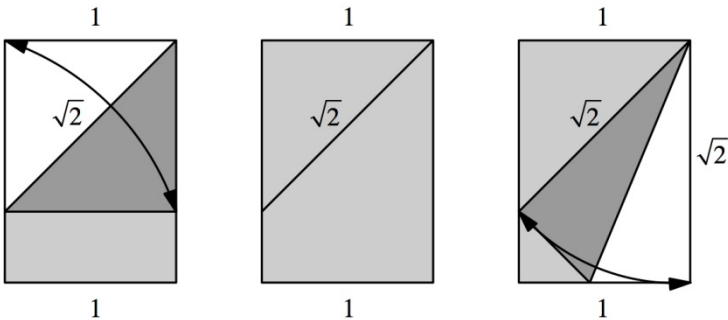


**Abb. 4:** DIN A4 und DIN A5

Mit der Schmalseite 1 und der Langseite  $x$  für das DIN A4 Rechteck erhalten wir aus der Ähnlichkeit:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{\frac{x}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Dieses Seitenverhältnis kann durch Falten nachgeprüft werden (Abb. 5). Dabei benützen wir den Sachverhalt, dass im Quadrat die Diagonallänge das  $\sqrt{2}$ -fache der Seitenlänge ist.



**Abb. 5:** Kontrolle durch Falten

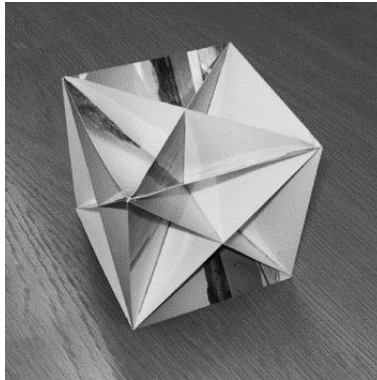


## Das DIN-Rechteck in Würfel und Tetraeder

Zwei diametrale Würfelkanten spannen ein Rechteck im DIN-Format auf. Daher können mit Papieren oder Karten im DIN-Format Würfelmodelle gebaut werden.

### *Diagonalflächen*

Die Abbildung 6 zeigt ein Modell aus sechs A6-Karten; Schnittmuster und Bauanleitung siehe (Walser, 2009) und (Walser, 2013, S. 45f).



**Abb. 6:** Würfelmodell aus sechs A6 Karten

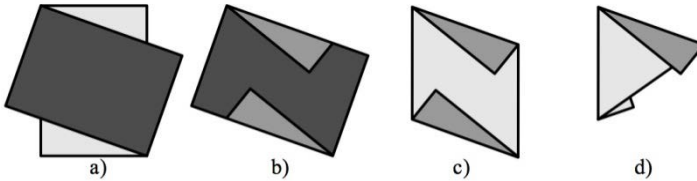
### *Kantenmodell des Würfels*

Als Baumaterial dient Papier im DIN A6-Format. Geeignet ist Papier der Stärke  $80 \text{ g/m}^2$ , das vom Format A4 auf A6 zugeschnitten wird. Für jede Kante braucht es ein Papier.

Für den Faltprozess verwenden wir eine etwas festere A6-Karte als Faltlehre. Wir legen diese Faltlehre diagonal auf ein A6-Papier und falten die vorstehenden Ecken des darunterliegenden Papiers nach vorne über die Faltlehre (Abb. 7a, 7b). Dann entfernen wir die Faltlehre. Der Umriss des Papiers ist nun ein Rhombus (Abb. 7c).

Nun falten wir die untere Spitze des Rhombus nach hinten unter die obere Spitze (Abb. 7d). Diese letzte Faltlinie wird zu einer Kante des Würfels. Was an dieser Kante noch vorsteht, kann zurückgebogen oder abgeschnitten werden. Damit haben wir unser Bauteil. Es hat die Form eines doppellagi-

gen gleichschenkligen Dreiecks mit zwei Verbindungslaschen zum Einschieben in die Nachbarbauteile.



**Abb. 7:** Faltvorgang

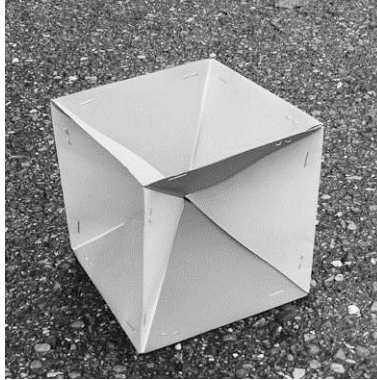
Die Abbildung 8 zeigt ein geöffnetes Bauteil von innen. Die Spitzen der beiden Rhomben-Hälften müssen vor dem Zusammenbau des Modells noch aufeinander gelegt werden. Diese Spitzen kommen alle in den Mittelpunkt des Würfels zu liegen. Die Seiten der Rhomben werden zu halben Raumdiagonalen des Würfels.

Wir benötigen 12 Bauteile. Beginnend mit drei verschiedenen farbigen A4-Papieren, die wir zu A6-Papieren vierteln, erhalten wir drei Sätze von je vier gleichfarbigen Bauteilen. Damit können wir den jeweils vier parallelen Würfelkanten dieselbe Farbe zuordnen.



**Abb. 8:** Bauteil

Und nun kommt das Interessante, der Zusammenbau. Wir schieben jeweils eine Verbindungslasche zwischen die beiden gleichschenkligen Dreiecke des Nachbarbauteils. Dabei achten wir darauf, dass an jeder halben Raumdiagonale des Würfels drei Bauteile in den drei verschiedenen Farben zusammen kommen. Parallele Würfelkanten haben dieselbe Farbe.



**Abb. 9:** Kantenmodell des Würfels

Es empfiehlt sich, den Zusammenbau schrittweise mit Büroklammern zu fixieren. An jeder Ecke des Würfels ergeben sich schließlich drei Büroklammern. Wenn alles sitzt, können die Büroklammern schrittweise entfernt und durch eine Heftklammer mit dem Tacker ersetzt werden (Abb. 9). Dabei hat man den Ehrgeiz, dass die Klammern symmetrisch eingebracht werden.

Für das Modell der Abbildung 9 wurden drei Farben verwendet und die Bauteile so angeordnet, dass parallele Kanten dieselbe Farbe haben. Wir können aber auch mit vier Farben arbeiten und die zugehörigen Kanten paarweise windschief einbauen. Dann sehen wir in jeder Seitenfläche des Würfels in eine Pyramide mit jeweils einer anderen zyklischen Anordnung der vier Farben. In unserem Würfelmodell kommen genau die sechs möglichen zyklischen Anordnungen vor.

#### *Kantenmodell des Tetraeders*

Analog zum Kantenmodell des Würfels kann ein Kantenmodell des Tetraeders gebaut werden (Abb. 10). Dazu müssen wir im Faltvorgang der Abbildung 7d längs der langen Rhombendiagonalen falten. Wir benötigen sechs Bauteile.



Abb. 10: Kantenmodell des Tetraeders

### Ausschöpfen des A0-Rechtecks

Das DIN-Format ist flächenmäßig ans metrische System angebunden. Das DIN A0 Papier hat einen Flächeninhalt von einem Quadratmeter.

*Die klassische Art*

Wir können mit einem Set von DIN-Rechtecken A1, A2, A3, ... ein A0-Rechteck ausschöpfen (Abb. 11).

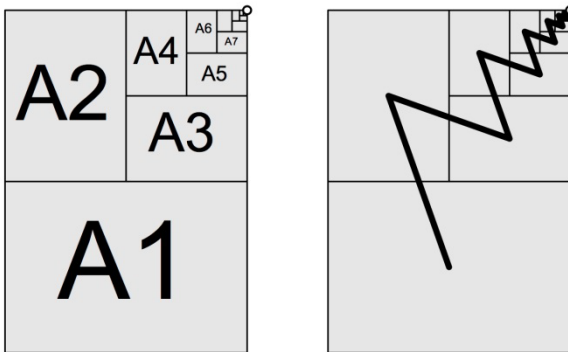


Abb. 11: Ausschöpfung des A0-Rechteckes

Wenn wir die Mitten aufeinanderfolgender Rechtecke verbinden, ergibt sich eine Zickzack-Linie, welche in den Grenzpunkt rechts oben mündet.

### Spiralförmige Anordnung

Wir können das Set von Rechtecken A1, A2, A3, ... aber auch spiralförmig gemäß Abbildung 12 anordnen.

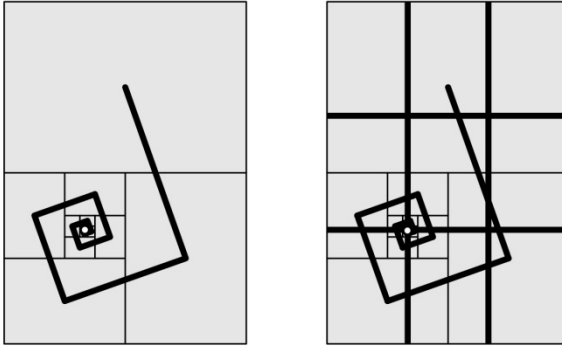


Abb. 12: Spiralförmige Anordnung

Der Grenzpunkt ist ein „Drittelpunkt“. Dies kann wie folgt eingesehen werden: Wenn wir auf der Höhe des Grenzpunktes von links her einfahren, treffen wir nur Hochformat-Rechtecke, und zwar der Reihe nach A4, A8, A12, ... . Diese haben im Vergleich zum Startrechteck die Breiten  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{64}$ , ... . Für den Abstand vom linken Rand erhalten wir somit die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$$

### Die DIN-Idee

Gibt es andere Figuren, die in zwei kongruente, zur Ausgangsfigur ähnliche Teilfiguren zerlegbar sind?

Die Frage ist allgemein gehalten, es ist nicht von Halbieren die Rede, sondern nur von Zerlegen.

### DIN-Parallelogramm

Wir können die DIN-Rechtecke zu Parallelogrammen verscheren (Abb. 13).

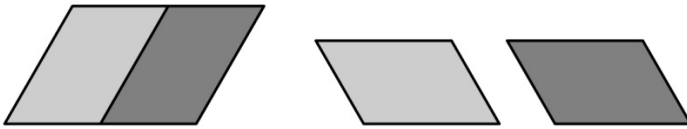


Abb. 13: Parallelogramme

Die Teilparallelogramme sind ungleichsinnig ähnlich zum Startparallelogramm. Das Set von DIN-Parallelogrammen lässt sich dabei analog wie oben bei den DIN-Rechtecken erstellen.

### Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck

Das naheliegende Beispiel ist das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck (Abb. 14). Bei der einfachsten Zerlegung gibt es einen Grenzpunkt unten rechts.

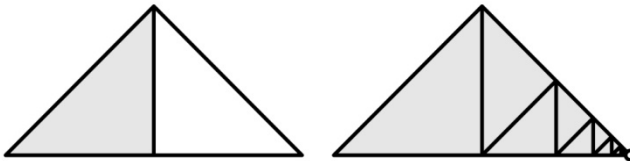


Abb. 14: Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck

Es gibt im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ebenfalls eine spiralförmige Anordnung (Abb. 15). Der Grenzpunkt führt zu Fünfteln, wie auf ähnliche Weise wie oben leicht eingesehen werden kann.

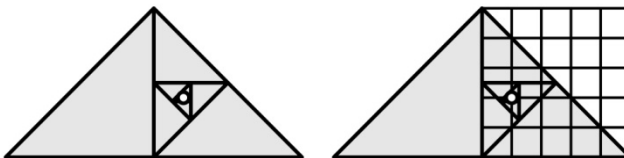
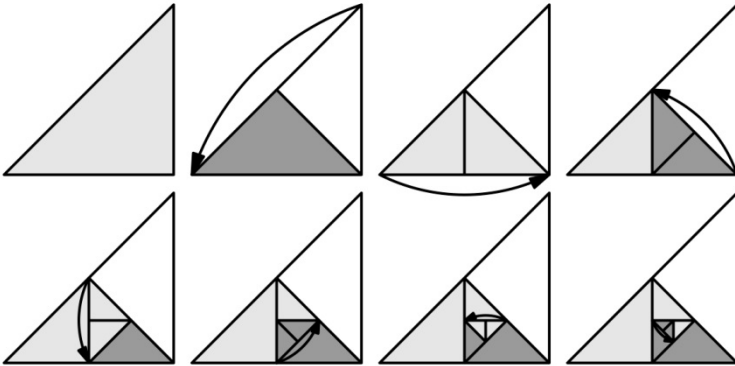
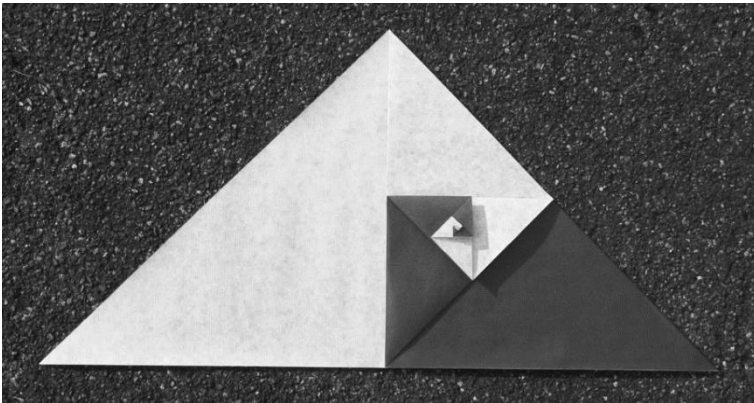


Abb. 15: Spiralförmige Anordnung

Diese Figur kann auch aus einem halben quadratischen Origami Papier durch fortlaufendes Falten erreicht werden (Abb. 16 und 17). Für das Falten benötigen wir den Raum.

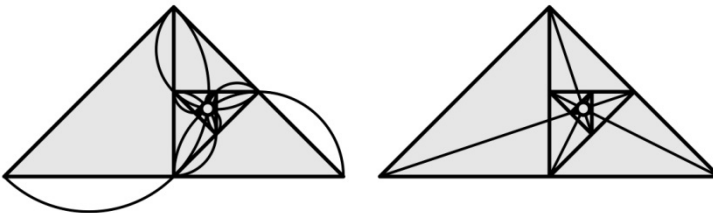


**Abb. 16:** Faltprozess



**Abb. 17:** Faltmodell

Wie man leicht feststellt, verlaufen die Thaleskreise der Teildreiecke durch den Grenzpunkt, ebenso eine Auswahl von Seitenhalbierenden (Abb. 18).



**Abb. 18:** Thaleskreise. Seitenhalbierende

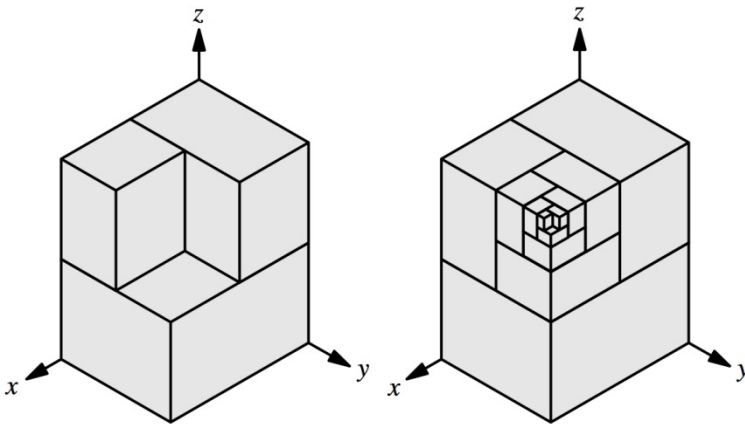
## Der Schritt in den Raum

### *DIN-Quader*

Wird ein Quader mit dem Kantenverhältnis  $2 : \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2}$  orthogonal zur längsten Kante halbiert ergeben sich zwei Quader mit dem Kantenverhältnis  $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} : 1$ . Diese sind ähnlich zum ursprünglichen Quader und haben dessen halbes Volumen.

Wir sehen hier die formale Analogie zum zweidimensionalen Fall. Wird ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis  $2 : \sqrt{2}$  orthogonal zur langen Seite halbiert ergeben sich zwei Rechtecke mit dem Seitenverhältnis  $\sqrt{2} : 1$ . Diese sind ähnlich zum ursprünglichen Rechteck und haben dessen halben Flächeninhalt. Damit sind aber auch Analogien in höhere Dimensionen vorgezeichnet.

Die Abbildung 19 zeigt eine Anordnung eines DIN-Quader-Satzes analog zur klassischen Anordnung eines Satzes von DIN-Rechtecken (Abb. 11).

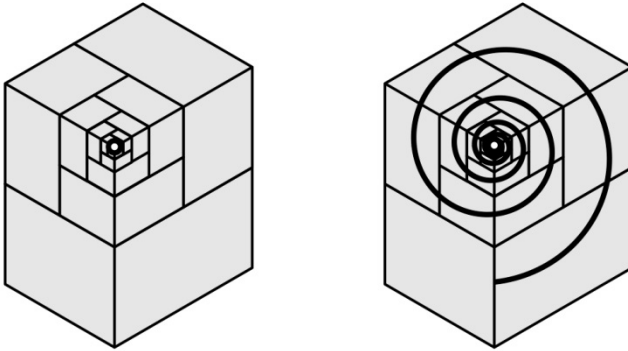


**Abb. 19:** Anordnung

Während bei Rechtecken nur zwischen Querformat und Hochformat unterschieden werden kann, brauchen wir hier drei Formate. Dazu dient das beigefügte Koordinatensystem. Der erste Quader hat seine längsten Kanten in der  $x$ -Richtung, der zweite Quader hat seine längsten Kanten in der  $y$ -Richtung und der dritte Quader in der  $z$ -Richtung. Der vierte Quader hat

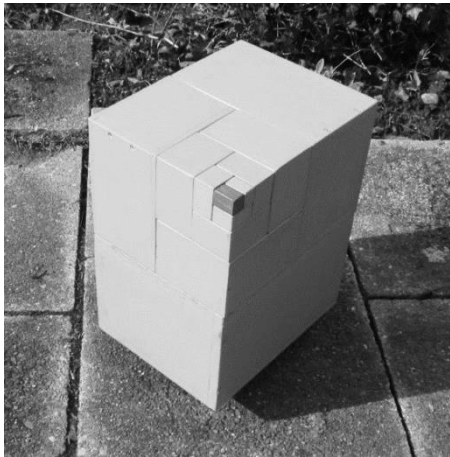


seine längsten Kanten wiederum in der  $x$ -Richtung. Der Grenzpunkt ist an einer Ecke (Abb. 20).



**Abb. 20:** Grenzpunkt und Spirale

Im Unterschied zum zweidimensionalen Beispiel kann dieser Grenzpunkt zudem als Zentrum einer Spirale gesehen werden. Die Spirale ist aber räumlich, sie hat die Form einer Wasserschnecke. Die Abbildung 21 zeigt einen Satz von realen DIN-Kisten.



**Abb. 21:** DIN-Kisten

### *DIN-Hyperquader*

Im vierdimensionalen Raum ergeben sich durch

$$2 : \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2} : 1$$

die Kanten zweier aufeinanderfolgender 4d-DIN-Hyperquader. George Pólya (1887-1985) hätte in dieser Situation allerdings von einer „Verallgemeinerung durch Verwässerung“ gesprochen, da wir nichts Neues mehr lernen.

### *Gleichtemperierte 12-Ton-Stimmung*

Wir verwässern weiter zum 12d-DIN-Hyperquader:

$$2^{\frac{12}{12}} : 2^{\frac{11}{12}} : 2^{\frac{10}{12}} : 2^{\frac{9}{12}} : 2^{\frac{8}{12}} : 2^{\frac{7}{12}} : 2^{\frac{6}{12}} : 2^{\frac{5}{12}} : 2^{\frac{4}{12}} : 2^{\frac{3}{12}} : 2^{\frac{2}{12}} : 2^{\frac{1}{12}}$$

Das haben wir zwar noch nie gesehen, aber schon gehört. Es sind die Frequenzverhältnisse der gleichtemperierten 12-Ton-Stimmung.

### **Die Jakobsleiter**

Und ihm träumte; und siehe, eine Leiter stand auf der Erde,  
die rührte mit der Spitze an den Himmel, und siehe,  
die Engel Gottes stiegen daran auf und nieder.

Gen 28, 11

Die Abbildung 22a) zeigt die ersten Sprossen der Jakobsleiter. Auf der einen Seite der Leiter steigen die Engel hinauf, auf der anderen Seite hinunter. Damit sie sich nicht gegenseitig auf den Füßen herumtreten, haben sie festgelegt, dass die aufsteigenden Engel nur die Sprossen mit ungeraden Nummern verwenden, die absteigenden nur die Sprossen mit geraden Nummern (Abb. 22b). Damit zerfällt die Jakobsleiter in zwei Teil-Jakobsleitern, die zur ursprünglichen Jakobsleiter ähnlich sind (Abb. 22c und Abb. 22d). Wir haben also das Prinzip des DIN-Formats.

Der Reduktionsfaktor ist 2. Das Wort Reduktionsfaktor ist in diesem Kontext syntaktisch richtig, semantisch falsch, da Sprossenhöhe nicht reduziert, sondern verdoppelt wird. Unter dem Aspekt eines Fraktals ergibt sich die Mandelbrot-Dimension  $D$  (fraktale Dimension):

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\log_2(\frac{1}{2})} = -1$$

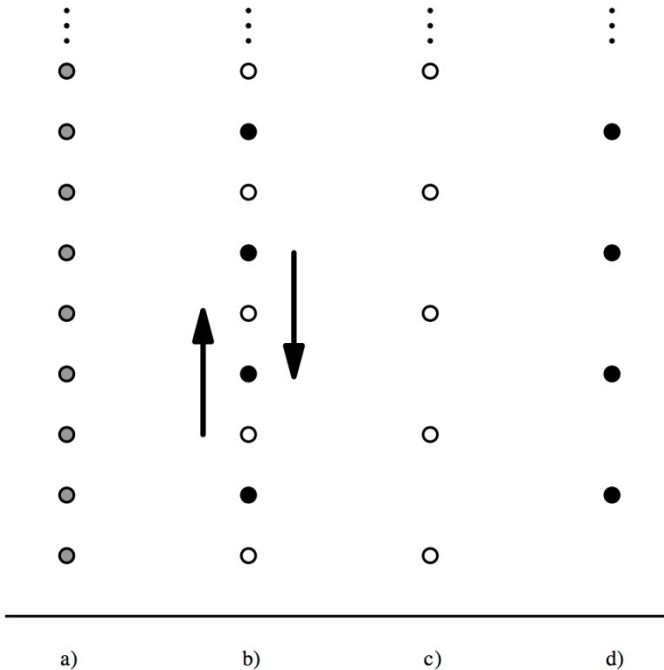


Abb. 22: Jakobsleiter

### Literatur

- Abbott, Edwin A. (1884): *Flatland*. A Romance of Many Dimensions. London: Seeley.
- Burger, Dyonis (1978): *Silvestergespräche eines Sechsecks*. Köln: Aulis. ISBN 3-7614-0085-3.
- Maier, Peter Herbert (1998): Räumliches Vorstellungsvermögen – Unterschiede zwischen Mann und Frau? In *Informationsblätter für Darstellende Geometrie (IBDG)* 1/1998. S. 23-31.
- Walser, Hans (2009): *Steckmodelle*. MU Der Mathematikunterricht. Polyeder im Mathematikunterricht. Jahrgang 55. Heft 1. Februar 2009. Friedrich Verlag, Seelze. S. 38-47.
- Walser, Hans (2013): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

### Internetseiten

- [1] <http://www.geotic.at/docs/GEODIKON-GDM-Saarbruecken-140912-de.pdf> (abgerufen 21. 9. 2014)



## Autorenverzeichnis

Dr. Stephan Berendonk  
Mathematisches Institut  
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Endenicher Allee 60  
53115 Bonn  
berendon@math.uni-bonn.de

Hans-Jürgen Elschenbroich  
Kirchstr. 26  
41352 Korschenbroich  
elschenbroich@dynamische-geometrie.de

Katharina Gaab  
Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1 Mathematik  
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik  
Postfach 151150  
66123 Saarbrücken  
gaab@math.uni-sb.de

Prof. Dr. Günter Graumann  
Deciusstrasse 41  
33611 Bielefeld  
og-graumann@web.de  
www.og-graumann.de

Ass. Prof. Mag. Dr. Günter Maresch  
Universität Salzburg  
School of Eduaction  
Fachdidaktik Mathematik und Geometrie  
5020 Salzburg, Österreich  
guenter.maresch@sbg.ac.at

Marc Sauerwein, M.Sc.  
Mathematisches Institut  
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Endenicher Allee 60  
53115 Bonn  
sauerwein@math.uni-bonn.de

Dr. Hans Walser  
Gerlikonerstr. 29  
CH-8500 Frauenfeld  
hwalser@bluewin.ch  
www.walser-h-m.ch/hans/

Prof. Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach  
Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik  
Johannes Gutenberg- Universität Mainz  
Staudinger Weg 9  
55099 Mainz  
weisspid@uni-mainz.de

*Herausgeber*

Prof. Dr. Andreas Filler  
Institut für Mathematik  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Unter den Linden 6  
D-10099 Berlin  
filler@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Anselm Lambert  
Universität des Saarlandes  
Fachrichtung 6.1 Mathematik  
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik  
Postfach 151150  
66041 Saarbrücken  
lambert@math.uni-sb.de