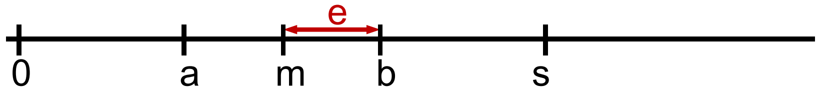
1. **spd** : Summe, Produkt und Differenz zweier Zahlen

In einer lösbaren quadratischen Gleichung $0 = x^2 - s\,x + p$ sind s die Summe und p das Produkt der beiden Lösungen a, b .Mit der Differenz $d = b - a$ und den halbierten Werten $m = \frac{1}{2}s$ und $e = \frac{1}{2}d$ gilt :



Mit $a, b = m \pm e$ sind a, b Summe und Differenz der halbierten Werte m, e .
Die 3. binomische Formel ist zweimal anwendbar: $sd = (b+a)(b-a) = b^2 - a^2$ und

$$ab = (m+e)(m-e) = m^2 - e^2$$

Das Vierfache dieser Formel lautet $4ab = s^2 - d^2$,die Differenz $d = \sqrt{s^2 - 4p}$ lässt sich aus der Summe s und dem Produkt $p = ab$ berechnen. Es ergibt sich die Mitternachtsformel: (für die Öffnung 1)

$$a, b = m \pm e = \frac{s \pm d}{2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

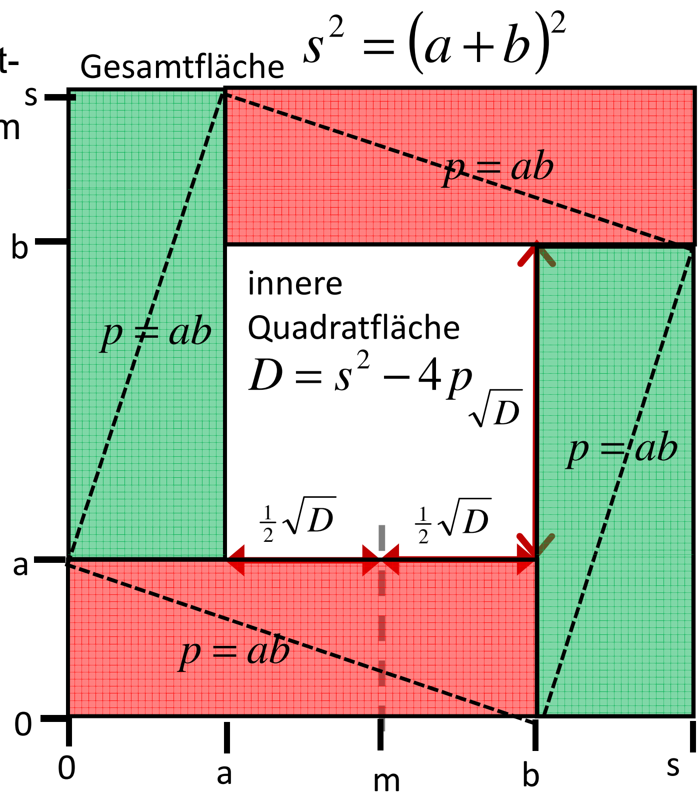
2. geometrische Herleitung der Mitternachtsformel

Ein quadratischer Bilderrahmen der Gesamtfläche $s^2 = (a+b)^2$ aus vier gleichen Rechteckhölzern mit den Seitenlängen a, b und dem Flächeninhalt $p = ab$ veranschaulicht die Mitternachtsformel:

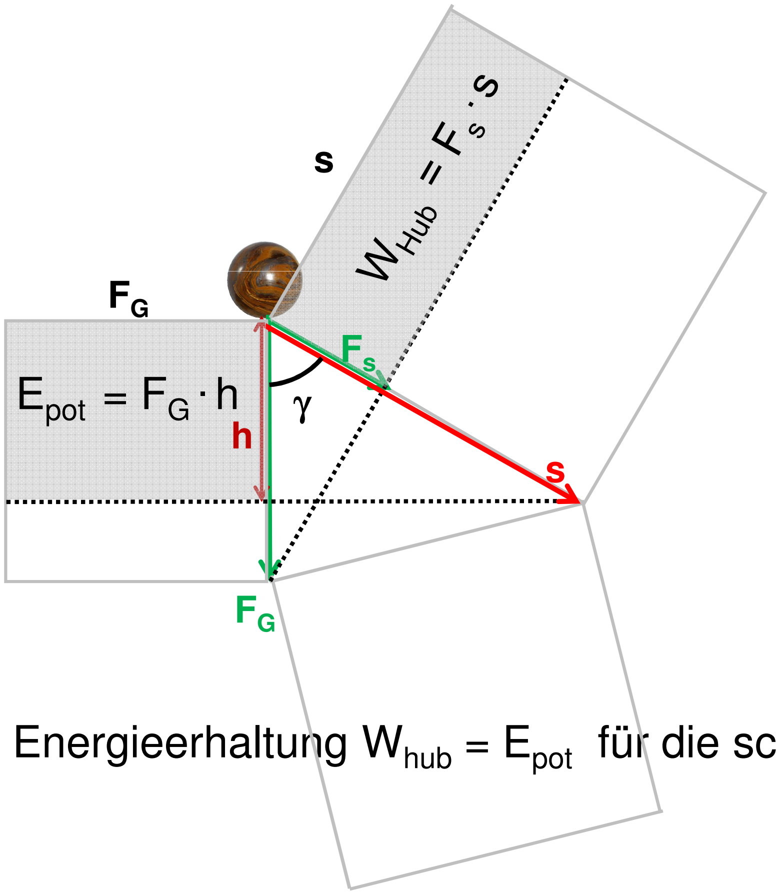
$$0 = x^2 - sx + p \qquad I\!L = \{a, b\}$$

$$\Downarrow$$

$$a, b = \frac{s \pm \sqrt{D}}{2} \quad mit\ D = s^2 - 4p$$



3. Es gibt kein Perpetuum mobile



Gilt die Energieerhaltung $W_{hub} = E_{pot}$ für die schiefe Ebene ??

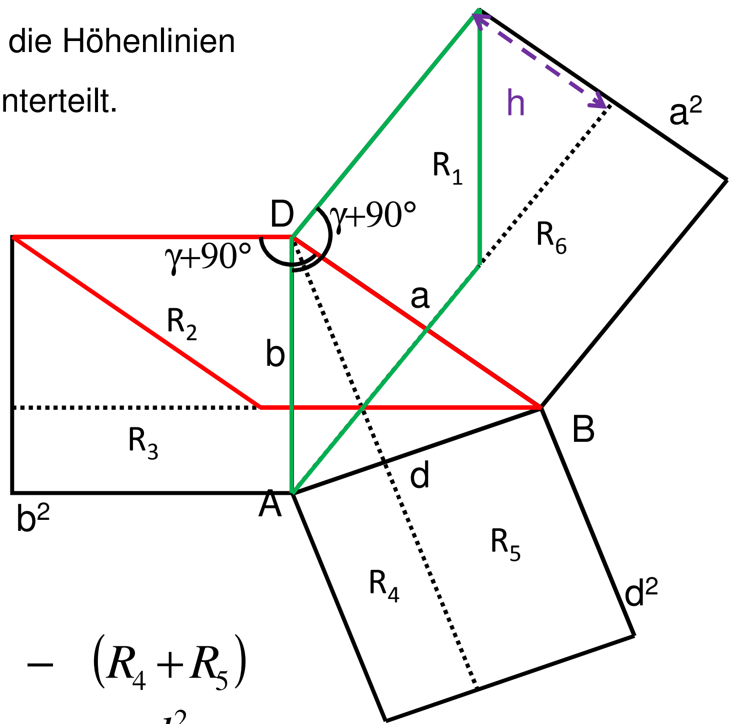
4. geometrische Variante des Kosinussatzes

Die Seitenquadrate des Dreiecks ABD werden durch die Höhenlinien in je zwei Rechtecke R_1, R_6 und R_4, R_5 R_2, R_3 unterteilt.

Das rote und grüne Parallelogramm haben dieselben Seitenlängen a,b und dieselben Innenwinkel $90° + \gamma, 90° - \gamma$,sind also kongruent.

Deren Flächeninhalt ist zugleich derjenige der Rechtecke R_1, R_2:

$R_1 = R_2$ und analog: $R_3 = R_4, R_5 = R_6$



Es gilt der „Kosinussatz“:

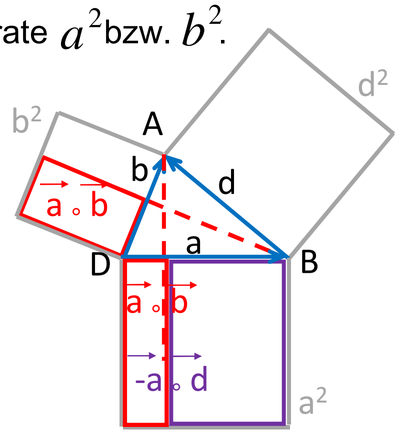
$$
\begin{aligned}
2R_1 &= R_1 + R_2 = R_1 + R_6 + R_2 + R_3 - (R_4 + R_5) \\
2R_1 &= 2R_2 = a^2 + b^2 - d^2
\end{aligned}
$$

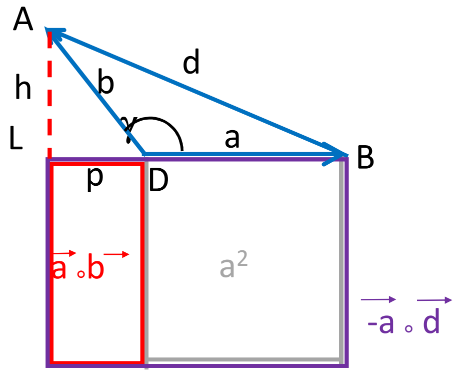
Das Rechteck R_1 hat die Höhe $h = \cos\gamma \cdot b$ und Fläche $R_1 = R_2 = \cos\gamma \cdot ab$

Der Name Kosinussatz folgt aus dieser zweiten Berechnung.

5. geometrische Definition des Skalarproduktes

Mit der Differenz $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ längs der dritten Seite des Dreiecks ABD [und der verkürzten Schreibweise $a = |\vec{a}|$] definiert $\vec{a} \circ \vec{b} := \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - d^2)$ das Skalarprodukt als Teilfläche der Seitenquadrate a^2bzw. b^2.





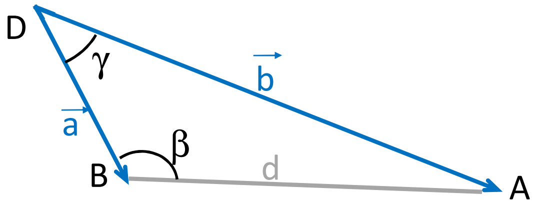
Im stumpfwinkligen Fall wird die außerhalb von a^2 liegende Skalarproduktfläche $\vec{a} \circ \vec{b}$ negativ bilanziert, mit der positiven Länge $p = \overline{DL}$ gilt $\vec{a} \circ \vec{b} = -p \cdot a$:

$$
\begin{aligned}
ALB: h^2 &= d^2 - (a+p)^2 \\
ALD: h^2 &= b^2 - p^2
\end{aligned}
\Rightarrow d^2 - a^2 - 2ap = b^2 \Rightarrow -2ap = a^2 + b^2 - d^2 = 2\vec{a} \circ \vec{b}
$$

Mit $p = -\cos\gamma \cdot b$ gilt weiterhin: $\vec{a} \circ \vec{b} = \cos\gamma \cdot ab$ und zudem: $a^2 = \vec{a} \circ \vec{b} + \overrightarrow{-a} \circ \vec{d}$

6. geometrische Eigenschaften des Skalarproduktes

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei von einer Ecke D wegzeigende Seitenvektoren eines Dreiecks ABD. Deren Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$ hat sodann eine geometrische Interpretation als Teilflächen der Seitenquadrate a^2bzw. b^2, ggf. kann $\vec{a} \circ \vec{b}$ auch eine negativ bilanzierte Fläche sein!

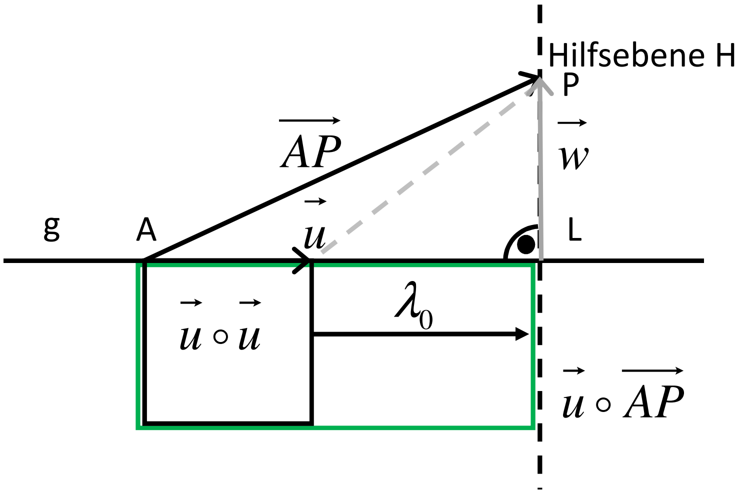


je nach Wert der Winkel γ, β folgen aus $2\vec{a} \circ \vec{b} = a^2 + b^2 - d^2$ verschiedene Sätze:

$\gamma = 0°$	2. Bin. Formel	$(b-a)^2 = d^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab$
$\beta = 90°$	Kathetensatz	$a^2 = \vec{a} \circ \vec{b} = b \cdot p$ mit Hypotenusenabschnitt p
γ, β *beliebig*	Kosinussatz	$2\cos\gamma \cdot ab = 2\vec{a} \circ \vec{b} = a^2 + b^2 - d^2$
$\gamma = 90°$	Satz von Pythagoras	$d^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} = a^2 + b^2$ da $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$
$\gamma = 180°$	1. Bin. Formel	$(a+b)^2 = d^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab$

7. Lotpunkt auf einer Geraden

Mit einem zur Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ senkrechten unbekannten Vektor $\vec{w} = \overrightarrow{LP}$ gilt:



$$\vec{L} = \vec{P} - \vec{w} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$$
$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \vec{w} \quad | \circ\vec{u}$$
$$\vec{u} \circ \overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} \circ \vec{u} \qquad IL = \{\lambda_0\}$$
$$\vec{L} = \vec{A} + \lambda_0\vec{u}$$

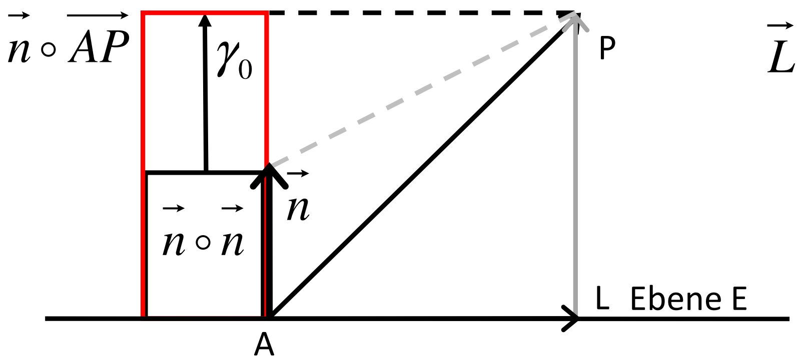
Ein Vorhang der Fläche $\vec{u} \circ \vec{u}$ überdeckt mit dem Streckungsfaktor λ_0 ein Fenster des Flächeninhalts $\vec{u} \circ \overrightarrow{AP}$.

Setzt man die Geradenparametrisierung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ in der Hilfsebene $H: \vec{u} \circ (\vec{X} - \vec{P}) = 0$ ein, so ergibt sich die äquivalente Gleichung: $\vec{u} \circ (\lambda\vec{u} - \overrightarrow{AP}) = 0$.

Der (kleinste) Abstand d von P zur Geraden g berechnet sich nachträglich: $d = |\overrightarrow{LP}|$.

8. Lotpunkt auf einer Ebene

Mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ gilt:



$$\vec{L} = \vec{P} - \gamma\vec{n} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \gamma\vec{n} \quad | \circ\vec{n}$$
$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AP} = \gamma\vec{n} \circ \vec{n} \qquad IL = \{\gamma_0\}$$
$$\vec{L} = \vec{P} - \gamma_0\vec{n}$$

Der Abstand $d = |\overrightarrow{LP}| = |\gamma_0\vec{n}| = \left|\dfrac{\vec{n} \circ \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|}\right|$ lässt sich vor dem Lotpunkt L berechnen.

Offenkundig liegt ein Punkt P (oder X) in der Ebene E genau dann wenn der Abstand Null ist:

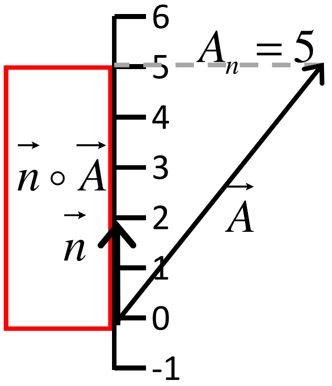
$$d = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ \vec{P} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0 \quad bzw.\ X \in E \Leftrightarrow \vec{n} \circ \vec{X} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0$$

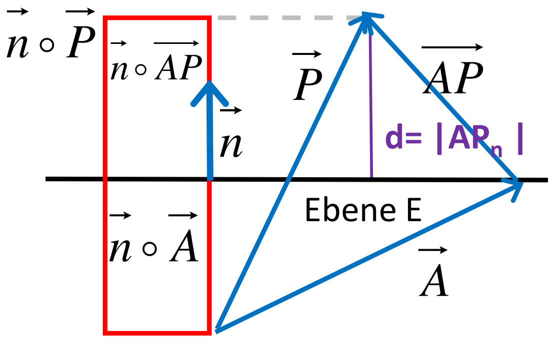
Alle Punkte einer Ebene E lassen sich durch ihren gemeinsamen Skalarproduktwert $c = \vec{n} \circ \vec{A}$ implizit als Lösungsmenge einer Gleichung beschreiben, diese heißt Normalenform:

$$X \in E \Leftrightarrow \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \circ \vec{X} - c = 0 \Leftrightarrow n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - c = 0$$

9. Richtungskoordinate und Hessesche Normalenform HNF

Die vorzeichenbehaftete Länge A_n der Skalarproduktfläche eines Vektors $\vec{A}$ in einer vorgegebener Richtung $\vec{n}$ wird als Richtungskoordinate bezeichnet: $A_n = \dfrac{\vec{n} \circ \vec{A}}{|\vec{n}|}$.





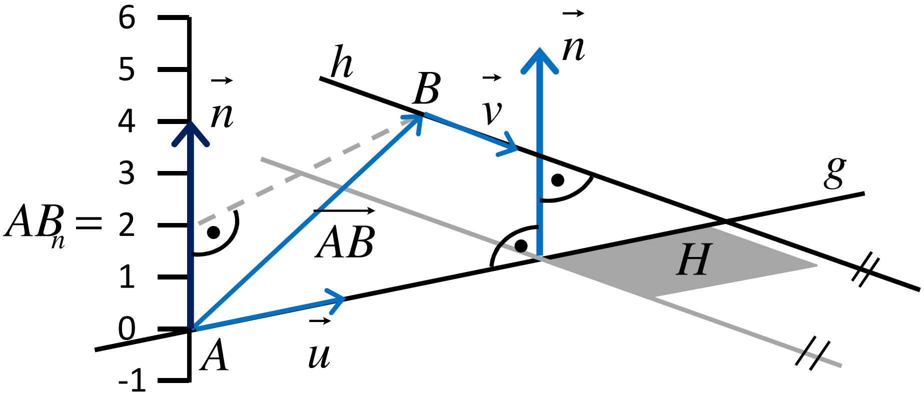
Der Abstand d eines Punktes P zu einer Ebene $E: \vec{n} \circ \vec{X} - c = 0$ lässt sich direkt aus der Normalenform ablesen, wenn diese durch die Länge $|\vec{n}|$ dividiert wird: $d = \left| \dfrac{\vec{n} \circ \overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 - c}{|\vec{n}|} \right|$

Zeigt die Normalenrichtung $\vec{n}$ vom Ursprung zur Ebene E hin, $c = \vec{n} \circ \vec{A} > 0$,dann ergibt sich deren Hessesche Normalenform:

$$X \in E \Leftrightarrow X_n - A_n = 0 \Leftrightarrow \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - c}{|\vec{n}|} = 0$$

10. (minimaler) Abstand d zweier Geraden

1. nichtparallele Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u},\ h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ haben eine gemeinsame Lotrichtung $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Der Abstand ist dann der Betrag der Richtungskoordinate AB_n .



$$\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u} + \gamma \vec{n} + \mu \vec{v} \quad | \circ \vec{n}$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = \gamma \vec{n} \circ \vec{n} \qquad IL = \{\gamma_0\}$$

$$d = |\gamma_0 \vec{n}| = \left| \frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|} \right| = |AB_n|$$

Man kann ebenso den Aufpunkt B in die HNF der Hilfsebene $H: \dfrac{\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A})}{|\vec{n}|} = 0$ einsetzen:

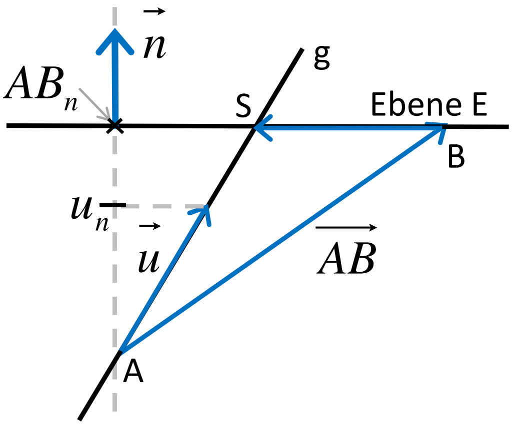
$$d = \left| \frac{\vec{n} \circ (\vec{B} - \vec{A})}{\vec{n}} \right| = |AB_n|$$

2. Liegen g, h parallel, dann ist der Abstand überall gleich, es genügt den Abstand vom Aufpunkt B zu seinem Lotpunkt L auf der anderen Geraden zu berechnen:

$$d = |\overrightarrow{LB}| \quad \text{mit} \quad \vec{L} = \vec{A} + \lambda_0 \vec{u} = \vec{A} + \frac{AB_u}{u_u} \vec{u} = \vec{A} + \frac{\vec{u} \circ \overrightarrow{AB}}{\vec{u} \circ \vec{u}} \vec{u}$$

11. Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

1. Eine Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \gamma \vec{u}$ hat mit der Ebene $E: \vec{X} = \vec{B} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ genau dann einen Schnittpunkt, wenn die Geradenrichtung $\vec{u}$ nicht parallel zur Ebene verläuft: $\vec{n} \circ \vec{u} \neq 0$.



$$\vec{S} = \vec{B} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \vec{A} + \gamma \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AB} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \gamma \vec{u} \quad | \circ \vec{n}$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = \gamma \vec{n} \circ \vec{u} \\ AB_n = \gamma u_n \end{array}\right\} IL = \{\gamma_0\}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \gamma_0 \vec{u}$$

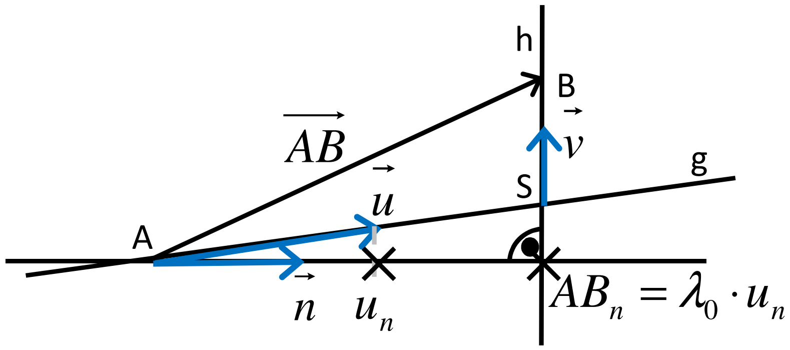
2. Falls g parallel zur Ebene verläuft, $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$,dann lässt sich der Abstand von g zur Ebene E berechnen durch Einsetzen des Aufpunktes A von g in die HNF von E:

$$d = \left| \frac{\vec{n} \circ (\vec{A} - \vec{B})}{|\vec{n}|} \right| = | AB_n |$$

2a. Falls hier d = 0 gilt, dann verläuft die Gerade g innerhalb der Ebene E.

12. Schnittpunkt zweier Geraden

Mit einer nur zu $\vec{v}$ senkrechten Richtung $\vec{n}$ mit $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ aber $\vec{n} \circ \vec{u} \neq 0$ gilt:



$$\vec{S} = \vec{B} - \mu \vec{v} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AB} = \mu \vec{v} + \lambda \vec{u} \quad | \circ \vec{n}$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = \lambda \vec{n} \circ \vec{u} \\ AB_n = \lambda u_n \end{array}\right\} IL = \{\lambda_0\}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \lambda_0 \vec{u}$$

Die Geraden g,h schneiden sich nur wenn auch $\vec{S} = \vec{B} - \mu \vec{v}$ lösbar ist, andernfalls liegen g,h windschief (oder parallel) .

Man erreicht $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$ aber $\vec{n} \circ \vec{u} \neq 0$ mit einer der Richtungen $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ -v_1 \end{pmatrix}$,

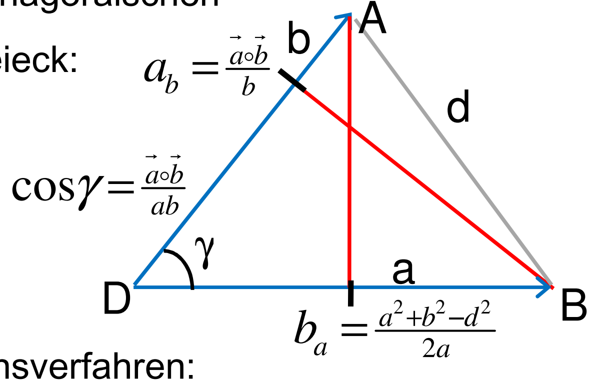
(O.E. gilt $v_1 \neq 0$)

Andernfalls sind die Richtungsvektoren linear abhängig: $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ und die Geraden liegen parallel. Dann gibt es keinen Schnittpunkt, außer wenn es sich um dieselbe Gerade handelt, d.h. wenn B auf g liegt, also jeder Geradenpunkt gemeinsamer Punkt ist:

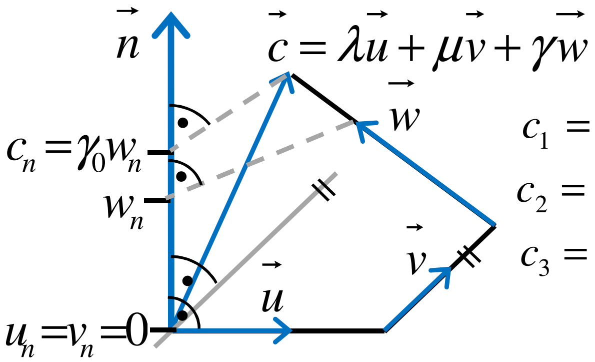
$$\vec{B} = \vec{A} + \lambda \vec{u} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u} \text{ ist lösbar.}$$

13. Entwicklungs -Stufen/-Prozess des Skalarproduktes

1. Verallgemeinerung der binomischen Formeln und pythagoräischen Sätze, sowie Berechnungen am nichtrechtwinkligen Dreieck:



2. Geometrische lösen linearer Gleichungen im Additionsverfahren:



$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda u_1 + \mu v_1 + \gamma w_1 \;|\cdot n_1 \\ c_2 &= \lambda u_2 + \mu v_2 + \gamma w_2 \;|\cdot n_2 \\ c_3 &= \lambda u_3 + \mu v_3 + \gamma w_3 \;|\cdot n_3 \end{aligned} \quad + \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= \lambda u_1 + \mu v_1 + \gamma w_1 \\ c_2 &= \lambda u_2 + \mu v_2 + \gamma w_2 \\ \vec{n} \circ \vec{c} &= 0 \quad + 0 \quad + \gamma \vec{n} \circ \vec{w} \end{aligned}$$

3. Anpassen der Koordinatenachsen an im Raum schräg stehende geometrische Objekte

(Ausblick: Orthonormalbasis, Gaußsches Eliminationsverfahren, Jordan'sche Normalform)