

Andreas Filler
Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometrie als Quelle von Bildung: Anwenden, Strukturieren, Problemlösen

Vorträge auf der 36. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft
für Didaktik der Mathematik
vom 13. bis 15. September 2019
in Saarbrücken

Titelbild: Hans Walser: Parametrisierung
der Hundekurve (siehe S. 53)

Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.)

**Geometrie als Quelle von Bildung:
Anwenden, Strukturieren, Problemlösen**

Arbeitskreises Geometrie 2019

ISBN 978-3-88120-616-7

1. Auflage 2020

Veröffentlicht im Verlag Franzbecker

© 2020 Verlag Franzbecker, Hildesheim

www.franzbecker.de

Inhaltsverzeichnis

Editorial	1
Frederik Dilling <i>Zwischen Anwenden und Strukturieren – Schwerpunktbestimmungen ebener Figuren nach Archimedes im Mathematikunterricht</i>	3
Myriam Hamich <i>Grundlegende Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe I</i>	17
Andreas Filler <i>Methodische Verbesserung des Geometrieunterrichts durch vielseitige Verwendung von Anschauungsmitteln aus Normteilen – Dynamische Geometrie mit dem Metallbaukasten?</i>	27
Hans Walser <i>Aufwickeln und Abwickeln</i>	41
Jörg Meyer <i>Vom Inkreis zur Hyperbel</i>	61
Günter Graumann <i>Die Thalesfigur dynamisch betrachtet – ein elementargeometrisches Problemfeld</i>	73
Hartmut Müller-Sommer <i>Erkenntnisgewinn durch Perspektivwechsel: Die Pellsche Gleichung</i>	91
Klaus Volkert <i>Vom Bildungswert der Dualität</i>	105
Autorenverzeichnis	115

Editorial

Andreas Filler, Anselm Lambert

Der vorliegende Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagung 2019 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter dem übergeordneten Thema *Geometrie als Quelle von Bildung: Anwenden, Strukturieren, Problemlösen* stand. Dieses Thema spiegelt sich in einem breiten Spektrum von Beiträgen wieder, das sowohl das Lehren und Lernen recht elementarer geometrischer Inhalte in der Sekundarstufe I als auch weiterführende Themen umfasst, die sich vor allem für die Begabtenförderung eignen.

Frederik Dilling untersucht, wie das Spannungsfeld zwischen *Anwenden und Strukturieren* anhand von *Schwerpunktbestimmungen ebener Figuren nach Archimedes* für den Mathematikunterricht fruchtbar gemacht werden kann. In dem Beitrag werden Aussagen über Flächenschwerpunkte ebener Figuren aus wenigen Voraussetzungen entwickelt, die im Wesentlichen auf dem Hebelgesetz basieren. Dabei ergänzen sich empirische und deduktive Vorgehensweisen.

Der Beitrag *Grundlegende Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe I* von *Myriam Hamich* gewährt einen Einblick in die Entwicklung eines Modells, welches sich als Zusammenfassung möglichst aller zentralen Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe versteht und als theoretischer Bezugsrahmen in der Schnittstellendiskussion am Übergang Schule-Hochschule angedacht ist.

Andreas Filler zeigt in seinem Beitrag *Dynamische Geometrie mit dem Metallbaukasten?* zunächst auf, dass die Idee „dynamischer Geometrie“ wesentlich älter ist als ihre Umsetzung mittels Computersoftware. Es werden Ideen einer didaktischen Handreichung von 1959 und ihre Umsetzung mittels eines „Geometriebaukastens“ beschrieben. Dabei wird der Frage nachgegangen, welche didaktischen Vor- und Nachteile die Erkenntnisgewinnung mithilfe „handgreiflichen“ Materials gegenüber der Nutzung von Zirkel, Lineal und Geodreieck sowie von Dynamischer Geometriesoftware hat.

Hans Walser übt in seinem Beitrag *Aufwickeln und Abwickeln* zunächst Kritik an der Verwendung Begriffs Netz für Abwicklungen z. B. von Würfeln. Danach stellt er verschiedene Abwicklungen sowohl im Drei- als auch im Zweidimensionalen vor. Er gelangt dabei zu interessanten Kurven, u. a. zur

„Hundekurve“. Diese wird sowohl analytisch (mittels einer Parameterdarstellung) beschrieben als auch mechanisch erzeugt, wozu eine Konstruktion zum Einsatz kommt, die mithilfe eines Metallbaukastens realisiert wurde.

Ausgangspunkt des Beitrags *Vom Inkreis zur Hyperbel* von Jörg Meyer sind innere und äußere Berührkreise von drei Kreisen. Im Folgenden untersucht er dann Kreise, die nur zwei gegebene Kreise berühren, und kommt zu dem Ergebnis, dass die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise von außen berühren, auf einem Hyperbelast liegen. Die Hyperbelkonstruktion lässt sich analog zur bekannten Parabelkonstruktion durchführen. Damit liefert das Thema eine problemnahe Einführung in das Gebiet „Kegelschnitte“ mit „open-end“-Charakter.

Günter Graumann untersucht in seinem Beitrag *Die Thalesfigur dynamisch betrachtet – ein elementargeometrisches Problemfeld* abhängige Größen bzw. Bahnkurven, wobei der variable Punkt sich auf einem Thaleskreis bewegt. Zuerst werden die Bahnkurven von besonderen Dreieckspunkten und die Veränderungen der Seitenlängen und des Flächeninhalts erörtert, dann werden mögliche Variationen des Themas aufgezählt und schließlich die Bahnkurven von Rechteckpunkten bei der Erzeugung des Thaleskreises durch das Einfügen eines Rechtecks zwischen zwei feste Punkte diskutiert.

In dem Beitrag *Erkenntnisgewinn durch Perspektivwechsel: Die Pellische Gleichung* von Hartmut Müller-Sommer wird die in der Zahlentheorie bedeutsame Pellische Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ in den Blick genommen. Eine Veränderung der Perspektive auf die Lösungen dieser Gleichung führt zu einer geometrischen Interpretation und deckt überraschende Zusammenhänge zum Dreieckssatz von Stewart und zum Kreis des Apollonius auf.

Der Beitrag *Vom Bildungswert der Dualität* von Klaus Volkert behandelt einige Aspekte der Dualität im Bereich der Polyedertheorie und der projektiven Geometrie. Anhand von Beispielen wird aufgezeigt, dass auch ohne eine tiefgreifende Behandlung der projektiven Geometrie interessante Fragen behandelt werden können, die einen adäquaten Eindruck vom Dualitätsprinzip und seiner Nützlichkeit geben. Schließlich wird der Frage nachgegangen, worin der Bildungswert der Dualität bestehen könnte.

Zwischen Anwenden und Strukturieren – Schwerpunktbestimmungen ebener Figuren nach Archimedes im Mathematikunterricht

Frederik Dilling

Zusammenfassung. Unter einem mathematischen Beweis versteht man im Allgemeinen die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bewiesenen Sätzen. Was aber, wenn die für einen Beweis gesetzten Voraussetzungen Ergebnisse der Naturwissenschaften darstellen? Im Buch „Über das Gleichgewicht ebener Flächen“ von Archimedes werden die Flächenschwerpunkte ebener Figuren wie Parallelogramm oder Dreieck aus wenigen Voraussetzungen entwickelt, die im Wesentlichen auf dem Hebelgesetz basieren. Dies kann im Unterricht Prozesse des Beweisens und Strukturierens von Aussagen anregen und ermöglicht ein historisch begründetes empirisch-orientiertes Vorgehen zur Einführung des Themas Schwerpunkte.

1. Zum Verhältnis von Beweis und Empirie

Stellt man einem Mathematiker die Frage „Was ist Mathematik?“, so wird dieser vermutlich antworten, dass es sich um eine Wissenschaft zur Untersuchung abstrakter Strukturen handelt. In dieser formalen wissenschaftlichen Auffassung von Mathematik tritt der Beweis als deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes nach bestimmten Schlussregeln aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen als zentrales Element auf. Harro Heuser beschreibt dies in seinem bekannten Lehrwerk zur Analysis wie folgt:

„Es versteht sich heutzutage von selbst, daß jede Darstellung der Analysis gemäß der axiomatischen Methode zu erfolgen hat: Der ganze Bestand analytischer Aussagen muß streng deduktiv aus einigen Grundeigenschaften reeller Zahlen entfaltet werden. Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit, ihre Überzeugungskraft und ihre Schönheit dieser Methode. Zu sehen, wie der reiche Teppich der Analysis mit seinen unendlich mannigfaltigen Farben und Figuren aus wenigen Fäden (den Axiomen über reelle Zahlen) enger und enger geknüpft wird – das ist eine geistige Erfahrung höchsten Ranges, um die kein Student betrogen werden darf.“ (Heuser, 2009, S.5)

Eine solche formale Auffassung von Mathematik lässt sich insbesondere im wissenschaftlichen Bereich an Universitäten auffinden. Die Darstellung der Mathematik im Schulunterricht und die Rolle des Beweises unterscheiden

sich hiervon teilweise stark. Hefendehl-Hebeker (2016) schreibt mit Bezug auf Freudenthal (1983):

„Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. [...] Die Geometrie (synthetisch und analytisch) ist auf das Erkennen und Beschreiben von Strukturen in unserer Umwelt und somit auf den dreidimensionalen Anschauungsraum bezogen, der Umgang mit Zahlen, Größen und Funktionen findet seine Sinngebung vorwiegend in der Lösung lebensweltlicher Probleme und die Stochastik betrachtet Zufallserscheinungen in alltagsweltlichen Situationen. „Dies alles kann durchaus intellektuell anspruchsvoll behandelt werden, auch mit lokalen Deduktionen, wo sie der Erkenntnissicherung dienen oder der Arbeitsökonomie.“ (Kirsch 1980, S. 231). Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist.“ (S.16)

Mathematisches Wissen wird im Unterricht somit überwiegend durch den Umgang mit realen Phänomenen entwickelt, sodass eine ontologische Bindung des mathematischen Wissens mit Bezug auf gewisse empirische Referenzobjekte entsteht. Damit sind die Untersuchungsgegenstände der Schulmathematik in weiten Teilen keine abstrakten Objekte, sondern konkrete empirische Objekte (vgl. Burscheid & Struve, 2010). Die Mathematik an der Schule ist eine quasi-empirische Wissenschaft, ähnlich einer Naturwissenschaft (vgl. Lakatos, 1976) und die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine empirische Auffassung von Mathematik.

Damit ist auch die Rolle des Beweises in der Schulmathematik eine andere als in der Mathematik als Fachwissenschaft. Jahnke und Ufer (2015) beschreiben dies folgendermaßen:

„Es besteht ein weitgehender Konsens, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet. Vom Beweisen bleibt dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen. Welche Gründe als akzeptabel gelten, hängt vom Entwicklungsniveau der Schülerinnen und Schüler ab und ist letztlich Sache des in einer Lerngemeinschaft vorgefundenen „geteilten Wissens“.“ (S.333f.)

Der Wahrheitsbegriff der Schulmathematik ist damit in weiten Teilen an einer empirischen Überprüfbarkeit ausgerichtet. Die Wissenssicherung geschieht insbesondere beispielgebunden und experimentell, logische Ableitungen werden dann zur Wissenserklärung herangezogen.

Auch in der Geschichte der Mathematik haben empirische Aussagen vielfach zur Entwicklung mathematischer Aussagen geführt. Henri Poincaré schreibt in seiner Sammlung von Aufsätzen „La valeur de la science“ (im Deutschen: Der Wert der Wissenschaft) über die Rolle der Physik in Beweisen mathematischer Aussagen wie folgt:

„Das ist aber noch nicht alles; die Physik gibt uns nicht nur Gelegenheit, Probleme zu lösen, sie hilft uns auch, die Mittel dazu zu finden, und das auf zwei Arten. Sie läßt uns die Lösung ahnen und gibt uns Schlußfolgerungen ein. [...] Er [der Analytiker] sammelt so die zerstreuten Elemente der Lösung und ahnt sie durch eine Art Intuition, ehe er beweisen kann. Ahnen, ehe man beweist! Muß ich daran erinnern, daß alle wichtigen Erfindungen so entstanden sind? Wie viele Wahrheiten lassen uns die physikalischen Analogien voraussehen, die wir nicht durch strenge Schlußfolgerungen beweisen können! [...] Andererseits liefert uns die Physik nicht nur Lösungen, sie liefert uns auch in gewissem Grade Schlußfolgerungen. [...] Es ist ja wahr, daß derartige Folgerungen nicht streng sind in dem Sinn, den der Analytiker diesem Wort beilegt.“ (Poincaré, 1906, S.73f.)

Somit können physikalische Aussagen zur Entwicklung mathematischer Aussagen herangezogen werden, auch wenn sie einem formalen Beweis nicht standhalten. Für Schülerinnen und Schüler mit einer empirischen Auffassung von Mathematik ist eine solche Begründung aber durchaus hinreichend. Physikalische Aussagen können eine besonders sinnvolle Basis für empirisch gestützte Begründungen liefern, wie es Polya (1962) betont:

„Streng genommen besteht unser ganzes Wissen außerhalb der Mathematik und der demonstrativen Logik [...] aus Vermutungen. Es gibt natürlich Vermutungen und Vermutungen. Es gibt höchst respektable und zuverlässige Vermutungen wie die in gewissen allgemeinen Gesetzen der Naturwissenschaften niedergelegten. [...] Wir sichern die Gültigkeit unseres mathematischen Wissens durch demonstratives Schließen, aber wir stützen unsere Vermutungen durch plausibles Schließen. Ein mathematischer Beweis besteht aus demonstrativem Schließen, aber der Induktionsbeweis des Physikers [...] gehör[t] zum plausiblen Schließen.“ (S.9)

Auch in neueren Diskussionen der Fachdidaktik wird die Rolle von physikalischen Aussagen in mathematischen Beweisen im Unterricht diskutiert (vgl. u. a. Hanna & Jahnke, 2002; Hanna et al., 2001). Im Folgenden soll am Beispiel der Schwerpunktbestimmungen ebener Flächen unter Zuhilfenahme des Hebelgesetzes durch Archimedes gezeigt werden, wie eine mathematische Theorie sinnvoll auf physikalischen Aussagen aufgebaut werden kann und welche Implikationen sich hieraus für den Mathematikunterricht ergeben.

2. Schwerpunktbestimmungen ebener Flächen durch Archimedes

2.1 Das Hebelgesetz bei Archimedes



Abb. 1: Archimedes setzt einen Hebel an der Erde an (Bild eines unbekanntem Künstlers) (links) sowie ein mittelalterliches Fantasie-Portrait von Archimedes von Syrakus (rechts)

„Gebt mir einen festen Punkt im All, und ich werde die Welt aus den Angeln heben.“

Mit diesem Satz soll Archimedes von Syrakus nach den Aufzeichnungen von Pappos von Alexandria die Bedeutung des von ihm entdeckten Hebelgesetzes herausgestellt haben. Das Gesetz formulierte Archimedes um 250 v. Chr. in seinem Buch „Über den Schwerpunkt ebener Flächen“ (vgl. Archimedes, 1923). Es soll im Folgenden kurz skizziert werden.

Zunächst formuliert Archimedes sieben Voraussetzungen für das Hebelgesetz:

1. *Wir setzen voraus, daß gleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, daß aber gleiche Gewichte an ungleichen Hebelarmen nicht im Gleichgewicht sind, sondern ein Übergewicht nach der Seite des längeren Hebelarmes haben.*
2. *Wenn irgend zwei Gewichte an irgendwelchen Hebelarmen im Gleichgewicht sind und zu einem Gewicht etwas hinzugefügt wird, so entsteht ein Übergewicht nach der Seite, auf der etwas hinzugefügt wurde.*
3. *In gleicher Weise entsteht, wenn auf einer Seite etwas fortgenommen wird, ein Übergewicht, und zwar nach der Seite, auf der nichts weggenommen wurde.*
4. *In kongruenten ebenen Figuren decken sich auch die Schwerpunkte.*

5. *In ähnlichen Figuren haben die Schwerpunkte ähnliche Lage. Darunter, daß zwei Punkte ähnliche Lage haben, verstehen wir, daß, wenn wir die Punkte mit entsprechenden Punkten der Figuren verbinden, die Verbindungslinien mit den entsprechenden Seiten der Figuren gleiche Winkel bilden.*
6. *Wenn zwei Größen an irgendwelchen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, so werden auch Größen, die ihnen gleich sind, an denselben Hebelarmen im Gleichgewicht sein.*
7. *Wenn der Umfang einer Figur stets nach der gleichen Seite konkav ist, so liegt der Schwerpunkt innerhalb der Figur.*

Aus den Voraussetzungen werden dann verschiedene Sätze mit bereits vergleichsweise spezifischen Aussagen gefolgert, wobei die Schlussfolgerungen an dieser Stelle nicht aufgeführt werden, um den Fokus auf die Nutzung des Hebelgesetzes zur Bestimmung von Schwerpunkten und nicht auf das Hebelgesetz selbst zu legen:

- §1 *Wenn Gewichte an gleichen Hebelarmen im Gleichgewicht sind, so sind sie gleich.*
- §2 *Ungleiche Gewichte an gleichen Hebelarmen sind nicht im Gleichgewicht, sondern haben ein Uebergewicht nach der Seite des größeren Gewichts.*
- §3 *Wenn ungleiche Gewichte im Gleichgewicht sind, so sind die Hebelarme ungleich, und zwar entspricht dem größeren Gewicht der kleinere Hebelarm.*
- §4 *Wenn zwei gleiche Größen nicht denselben Schwerpunkt haben, so wird der Schwerpunkt der aus ihnen zusammengesetzten Größe der Mittelpunkt der die Schwerpunkte verbindenden Strecke sein.*
- §5 *Wenn die Schwerpunkte dreier Größen auf einer Geraden liegen und die drei Größen gleiche Gewichte haben, ferner die Abstände der Schwerpunkte diesen drei Größen gleich sind, so wird der Schwerpunkt des aus diesen drei Größen zusammengesetzten Systems mit dem Schwerpunkt der mittleren Größe zusammenfallen.*

Schließlich folgt in §6 die heute als Hebelgesetz bekannte Aussage zur Antiproportionalität von Gewicht und Hebelarmlänge zunächst für kommensurable Größen:

§6 *Kommensurable Größen sind im Gleichgewicht, wenn ihre Gewichte ihren Hebelarmen umgekehrt proportional sind.*

Bei dieser Folgerung von §6 aus den Voraussetzungen und den vorherigen Sätzen handelt es sich wie Arthur Czwalina-Allenstein es in den Anmerkungen zu seiner Übersetzung des Werks von Archimedes ins Deutsche richtig herausstellt um einen Trugschluss. Dies lässt sich an einem einfachen Beispiel demonstrieren. Angenommen, am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der Hebelarme sind. Dann gelten §1 bis §5, nicht aber §6. Entsprechend ist eigentlich §6 das Grundgesetz und bei §1 bis §5 handelt es sich um Spezialfälle von diesem Gesetz.

Archimedes komplettiert seine Fassung des Hebelgesetzes mit zwei weiteren Sätzen:

§7 *Aber auch, wenn es sich um zwei inkommensurable Größen handelt, so werden sie im Gleichgewicht sein an Hebelarmen, die ihnen umgekehrt proportional sind.*

§8 *Wenn von einer Größe eine andere, die nicht den gleichen Schwerpunkt hat, fortgenommen wird, so wird der Schwerpunkt der Restgröße auf der Verbindungslinie jener beiden ersten Schwerpunkte über den Schwerpunkt der ganzen Größe hinaus liegen und zwar wird er in folgender Weise bestimmt sein: Sein Abstand vom Schwerpunkt der ganzen Größe verhält sich zum Abstand des Schwerpunktes der weggenommenen Größe vom Schwerpunkt der ganzen Größe wie die weggenommene Größe zur Restgröße.*

2.2 Das Hebelgesetz in heutiger Form

Möchte man die Ausführungen von Archimedes in den Mathematikunterricht integrieren, so ist es wichtig, einen Bezug zum Hebelgesetz in heutiger Form zu schaffen. Damit können die im Physikunterricht entwickelten Begriffe auf der einen Seite zum Verständnis der historischen Quelle beitragen, auf der anderen Seite aber auch durch diese sinnvoll erweitert werden.

Für das Hebelgesetz in der heutigen Form ist der Begriff des Drehmoments \vec{M} zentral. Hierbei handelt es sich um das Kreuzprodukt aus der Kraft \vec{F} und dem Vektor \vec{r}_A vom Drehpunkt A auf den Punkt an dem die Kraft angreift.

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

Das Hebelgesetz lautet dann wie folgt: Ein Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm anliegenden Drehmomente bezüglich desselben Bezugspunktes gleich Null ist.

$$\sum \vec{M}_n = \sum \vec{r}_n \times \vec{F}_n = 0$$

Betrachten wir lediglich Kräfte senkrecht zum physischen Hebel und setzen den Bezugspunkt des Drehmoments auf den Drehpunkt dieses Hebels, so erhalten wir die vereinfachte Aussage, welche meist als Hebelgesetz in der Sekundarstufe I gelernt wird: „Kraft mal Kraftarm ist gleich Last mal Lastarm.“

$$|\vec{r}_1| \cdot |\vec{F}_1| = |\vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_2|$$

Die Aussage entspricht in wesentlichen Aspekten dem von Archimedes aufgestellten Hebelgesetz, mit dem Unterschied, dass Archimedes nicht den Kraftbegriff verwendet, sondern von Gewichten spricht. Außerdem spricht er von der Antiproportionalität von Gewicht und Hebelarmlänge, was durch Umstellen der obigen Formel leicht ersichtlich ist.

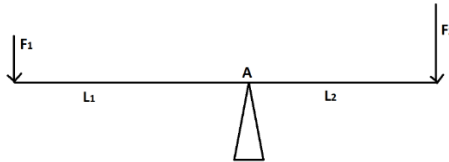


Abb. 2: Skizze eines physikalischen Hebels

2.3 Schwerpunktbestimmungen ebener Flächen auf der Grundlage des Hebelgesetzes

Schließlich folgt ab §9 in Archimedes' Werk die Bestimmung von Flächenschwerpunkten und –linien bestimmter Figuren. Dies wird im Folgenden am Beispiel von Parallelogrammen und Dreiecken detailliert dargestellt.

§9 *Der Schwerpunkt eines jeden Parallelogramms liegt auf der Geraden, die die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms miteinander verbindet.*

Beweis: $ABCD$ sei ein Parallelogramm. EZ sei diejenige Gerade, die die Mitten der Seiten AB und CD miteinander verbindet. Ich behaupte, daß der Schwerpunkt des Parallelogramms $ABCD$ auf EZ liegt.

Angenommen, es sei nicht der Fall und es sei F der Schwerpunkt. Dann werde FI parallel AB gezogen. Es werde nun EB halbiert, die Hälfte wiederum und so weiter, bis sich auf diese Weise ein Teil EK ergibt, der kleiner ist als FI . Es werde dann sowohl AE wie EB in Teile geteilt, die EK gleich sind und durch die Teilpunkte mögen Parallelen zu EZ gezogen werden. Es wird dann das ganze Parallelogramm in Parallelogramme geteilt sein, die flächengleich und ähnlich dem Parallelogramm KZ sind. Wenn nun diese KZ gleichen und ähnlichen Parallelogramme aufeinander gelegt werden, so werden auch ihre Schwerpunkte aufeinander liegen (4). Es sind also Größen vorhanden, und zwar Parallelogramme, die kongruent KZ sind, an Zahl gerade, deren Schwerpunkt auf derselben Geraden liegen, und zwar in gleichen Abständen. Der Mittelpunkt der aus allen diesen Größen zusammengesetzten Größen wird also auf der die Schwerpunkte der beiden mittleren Größen verbindenden Strecke liegen. Dies ist aber hier nicht der Fall, denn der Punkt F liegt außerhalb der beiden mittleren Parallelogramme. Es ist daher klar, daß der Schwerpunkt des Parallelogrammes $ABCD$ auf der Geraden EZ liegt.

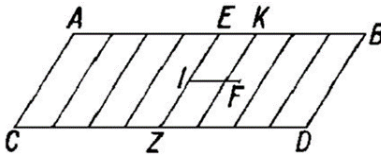


Abb. 3: Skizze zum Beweis von §9
(Archimedes, 1923)

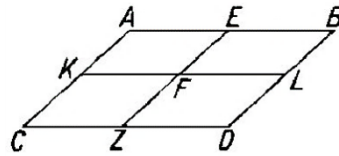


Abb. 4: Skizze zum Beweis von §10
(Archimedes, 1923)

§10 Der Schwerpunkt jedes Parallelogrammes ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

Beweis: Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und EZ die Gerade, die die Mittelpunkte der Seiten AB und CD miteinander verbindet, KL aber die Gerade, die die Mittelpunkte von AC und BD verbindet. Es liegt also der Schwerpunkt des Parallelogramms $ABCD$ auf der Geraden EZ , denn dies ist bewiesen worden (§9). Aus demselben Grunde liegt aber der Schwerpunkt auch auf der Geraden KL . Also ist F der Schwerpunkt des Parallelogramms. In F schneiden einander aber die Diagonalen des Parallelogramms. Daher ist die Behauptung bewiesen.

§13 *Der Schwerpunkt jedes Dreiecks liegt auf der Mitteltransversale.*

Beweis: Es sei das Dreieck ABC gegeben, AD sei die Mitteltransversale. Es ist zu beweisen, daß der Schwerpunkt des Dreiecks ABC auf AD liegt. Angenommen, es sei nicht der Fall, sondern es sei F der Schwerpunkt. Dann werde durch F , $FJ \parallel BC$ gezogen. Indem man nun DC fortgesetzt halbiert, wird schließlich ein Teil entstehen, der kleiner ist als FJ . Dann werde BD und DC in lauter solche gleiche Teile geteilt, und durch die Schnittpunkte mögen Parallelen zu AD gezogen werden. Ferner mögen EZ , HK und LM gezogen werden. Diese werden parallel zu BC sein. Der Schwerpunkt des Parallelogramms MN liegt nun auf YS , der des Parallelogramms KX auf TY , der des Parallelogramms ZO auf TD . Der Schwerpunkt, der aus allen diesen Parallelogrammen zusammengesetzten Flächen liegt also auf SD . Er sei P . Es werde P mit F verbunden, die Strecke PF werde über F hinaus verlängert und es werde CQ parallel AD gezogen. Der Inhalt des Dreiecks ADC hat zur Summe der Inhalte der über AM , MK , KZ , ZC konstruierten Dreiecke, die sämtlich dem Dreieck ADC ähnlich sind, dasselbe Verhältnis, wie CA zu AM , da $AM = MK = KZ = ZC$ ist. Da aber das Dreieck ADB zur Summe der über den Strecken AL , LH , HE , EB konstruierten ähnlichen Dreiecke dasselbe Verhältnis hat wie BA zu AL , so wird also das Dreieck ABC zur Summe aller genannten Dreiecke dasselbe Verhältnis haben wie CA zu AM . Aber CA hat zu AM ein größeres Verhältnis als QP zu PF . Denn $CA : AM = QP : PF$. Also hat das Dreieck ABC zur Summe aller genannten Dreiecke ein größeres Verhältnis als $QP : PF$. Indem wir in dieser Beziehung zur Differenz übergehen [aus $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ folgt $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$] folgt, daß die Summe der Parallelogramme MN , KX , ZO zu der Summe der Restdreiecke ein größeres Verhältnis hat als QF zu PF . Es werde nun U so gewählt, daß sich die Summe der Parallelogramme zur Summe der Dreiecke verhalte wie $UF : FP$. Da nun eine Größe, das Dreieck ABC , vorhanden ist, deren Schwerpunkt F ist und von dieser Größe eine Größe, nämlich die Summe der Parallelogramme MN , KX , ZO weggenommen ist und der Schwerpunkt der weggenommenen Größe P ist, so wird also der Schwerpunkt der Restgröße, die aus den Restdreiecken zusammengesetzt ist, auf der Geraden PF , und zwar auf deren Verlängerung so liegen, daß sein

Abstand vom Punkte F sich zu PF verhält wie die weggenommenen Größen zur Restfläche (§ 8). U ist also der Schwerpunkt der aus den Restdreiecken zusammengesetzten Fläche. Dies ist aber unmöglich, denn wenn man durch U die Parallele zu AD zieht, so liegen sämtliche Restdreiecke auf einer und derselben Seite dieser Parallelen. Demnach ist die Behauptung bewiesen.

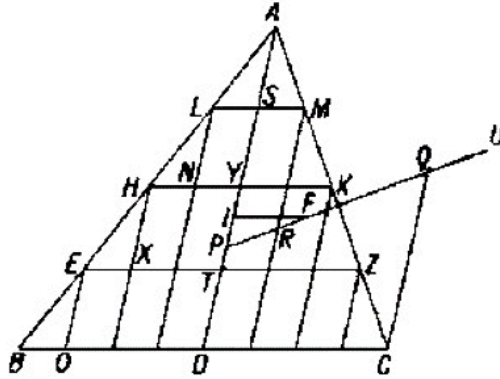


Abb. 5: Skizze zum Beweis von §13 (Archimedes, 1923)

§14 *Der Schwerpunkt jedes Dreiecks ist der Punkt, in dem sich die drei Mitteltransversalen schneiden.*

Beweis: Es sei das Dreieck ABC gegeben, und es mögen die Mitteltransversalen AD und BE gezogen werden. Es wird also der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sowohl auf AD als auch auf BE liegen. Denn dies ist bewiesen worden (§13). Daher ist F der Schwerpunkt des Dreiecks.

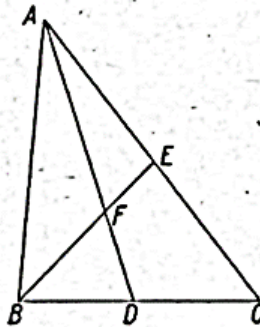


Abb. 6: Skizze zum Beweis von §13 (Archimedes, 1923)

Archimedes entwickelt im Weiteren mit seiner Methode Aussagen über die Schwerpunkte vieler unterschiedlicher Flächen, unter anderem von Parallelogrammen, von durch Parabelbögen begrenzten Flächen, sowie von in Parabelbögen eingeschriebenen Vielecken. Die teilweise komplexen Schlussfolgerungen auf der Basis des Hebelgesetzes führen damit zu sehr weitreichenden Aussagen und zeigen die Tragfähigkeit entsprechender auf physikalischen Aussagen basierenden Konzepten.

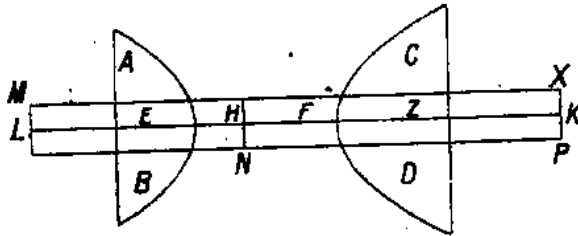


Abb. 7: Durch Parabelbögen begrenzte Flächen (Archimedes, 1923)

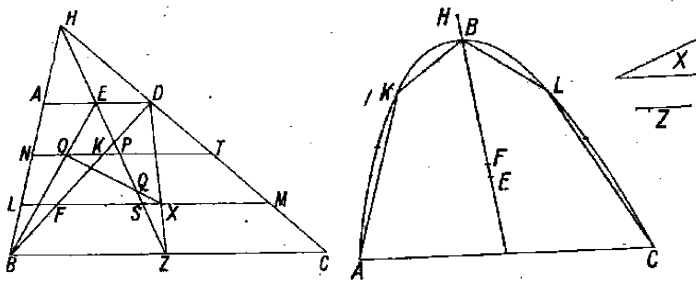


Abb. 8: Parallelogramm (links) sowie ein in einen Parabelbogen eingeschriebenes Vieleck (Archimedes, 1923)

3. Implikationen für den Mathematikunterricht

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Ausführungen von Archimedes lassen sich sinnvoll in den Geometrieunterricht der Sekundarstufen integrieren. Im Sinne des genetischen Prinzips wird die historische Entwicklung des Begriffes Schwerpunkt deutlich und kann einen Anknüpfungspunkt für Begriffsentwicklungsprozesse der Lernenden im Unterricht bilden (vgl. Winter, 2016). Auf diese Weise wird der prozesshafte Charakter der Mathematik betont, in welchem auch Fehler wie sie bei Archimedes in den Schlussfolgerungen zu §6 gemacht wurden auf natürliche Weise auftreten.

Das Nachvollziehen der Schlussfolgerungen auf der Basis vergleichsweise weniger Vorannahmen kann die Beweiskompetenz der Lernenden insbesondere in Bezug auf Widerspruchsbeweise stärken.

Die Entwicklung des Schwerpunktbegriffs bei Archimedes nimmt dabei immer Bezug auf empirische Aussagen. Dies spiegelt sich in der zentralen Rolle des Hebelgesetzes zur Bestimmung der Schwerpunkte von Flächen wider. Dieser Bezug zu empirischen Phänomenen ist für Lernende im empirisch-orientierten Mathematikunterricht geradezu natürlich, sodass die Aussagen von Archimedes im Unterricht hinreichende Begründungen darstellen. Das historische Beispiel zeigt auch, dass viele mathematische Erkenntnisse in weiten Teilen auf empirischen Phänomenen beruhen und die Entwicklung einer empirischen Auffassung von Mathematik im Schulunterricht nicht problematisch ist, sondern sich im Gegenteil als tragfähig erweisen kann. Außerdem kann dies zu interessanten Diskussionen über das Verhältnis von Mathematik und Naturwissenschaften führen und fächerübergreifende Aspekte der Mathematik stärken.

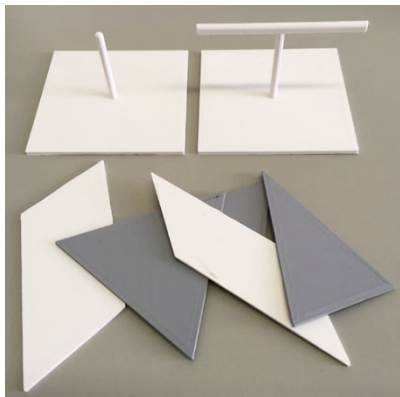


Abb. 9: Materialset zum Thema Schwerpunkte

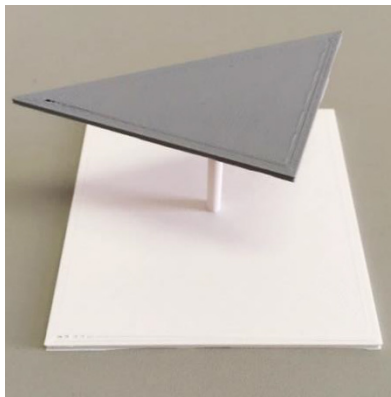


Abb. 10: Ausbalanciertes Prisma mit dreieckiger Grundfläche

Das Verständnis für die von Archimedes aufgestellten Sätze kann durch einen material- und handlungsorientierten Zugang erleichtert werden wie er beim Thema Flächenschwerpunkt üblich ist (vgl. u.a. Mang & Zimmermann, 2016). Den Ausgangspunkt hierfür bilden ein waagrecht liegender Balken und ein senkrecht stehender Stab, auf denen flache Prismen unterschiedlicher Größe und Grundfläche ausbalanciert werden können. Auf diese Weise können Schwerelinien und Schwerpunkte der Objekte experimen-

tell ermittelt oder überprüft werden. Zur Visualisierung der Archimedischen Sätze können dann Prismen mit dreieckiger, parallelogrammförmiger und trapezförmiger Grundfläche verwendet werden. Auf den Objekten können zudem Linien und Punkte mit einem Bleistift gezeichnet werden, um den Bezug zu den theoretischen mathematischen Aussagen herzustellen. Die Verwendung von 3D-Druck-Technologie erlaubt es zudem, dass die Lernenden weitere eigene Objekte herstellen und untersuchen (vgl. Dilling, 2019). Die Herausforderung bei einer solchen Herangehensweise liegt insbesondere in der Übertragung von den mit dreidimensionalen Objekten entwickelten Vorstellungen auf zweidimensionale Figuren.

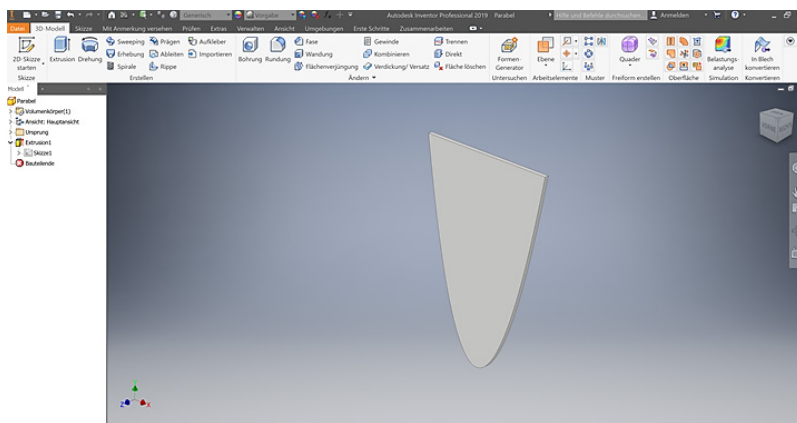


Abb. 11: Virtuelles 3D-Modell mit einer parabelförmigen Grundfläche in einem CAD-Programm

Literatur

- Archimedes (1923). *Die Quadratur der Parabel und Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Arthur Czwalina-Allenstein*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
- Burscheid, H. J., & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktion: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Dilling, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

- Hanna, G., Jahnke, H. N., DeBruyn, Y., & Lomas, D. (2001). Teaching mathematical proofs that rely on ideas from physics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1(2), 183–192.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). Another approach to proof: Arguments from physics. *ZDM*, 34(1), 1–8.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In: Hoppenbrock, A. et al. (Eds.). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase (15-24)*. Wiesbaden: Springer.
- Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis Teil I*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S.331-355). Berlin, Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Kirsch, A. (1980). Zur Mathematik-Ausbildung der zukünftigen Lehrer – im Hinblick auf die Praxis des Geometrieunterrichts. *Journal für Mathematikdidaktik*, 1(4), 229–256.
- Lakatos, I. (1976) (Worrall, J. & Zahar, E., eds.). *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mang, N., & Zimmermann, T. (2016). *Mathematik an Stationen. Klasse 8 Gymnasium. Besondere Punkte und Linien im Dreieck*. Augsburg: Auer.
- Poincaré, H. (1906). *Der Wert der Wissenschaft*. Ins Dt. übersetzt von E. Weber. Mit Anm. u. Zusätzen von H. Weber. Leipzig: Teubner.
- Polya, G. (1962). *Mathematik und plausible Schliessen. Band 1. Induktion und Analogie in der Mathematik*. Ins Dt. übersetzt von Lulu Bechtolsheim. Basel, Stuttgart: Birkhäuser.
- Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Grundlegende Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe I

Myriam Hamich

Zusammenfassung. Dieser Beitrag gewährt einen Einblick in die Entwicklung eines Modells, welches sich als summative Zusammenfassung möglichst aller zentralen Aspekte des Messens und Berechnens am Ende der Sekundarstufe versteht. Das theoretische, literaturbasierte Modell ist als theoretischer Bezugsrahmen in der Schnittstellendiskussion am Übergang Schule – Hochschule angedacht (Roos u. a. 2019) und soll auch für die Entwicklung oder Validierung von Förder- und Diagnoseaufgaben unter einem verstehensorientierten Blickwinkel genutzt werden.

Theorie und Forschungsstand

Obwohl Geometrie ein einheitliches Thema für den gesamten Mathematiklehrplan darstellt, scheitert eine große Anzahl der Schülerinnen und Schüler (SuS) daran (Ali, Bhagawati, und Sarmah 2014). Dabei haben SuS in der Sekundarstufe ähnliche Schwierigkeiten wie SuS der Elementarstufe (Dorko 2013; O'Dell u. a. 2016). Forscher haben lange über die Schwierigkeiten und deren Ursachen berichtet (u. a. Battista 2006; Gal und Linchevski 2010; Heinze 2002; Vollrath 1999). Erklärter Gegenstand von Diagnose- und Fördermaßnahmen am Übergang Schule-Hochschule ist meist das Verstehen und Beherrschen. Aber was bedeutet das für das Messen und Berechnen, und wie äußert es sich? Daraus ergab sich aus Sicht der Autorin ein Forschungsdesiderat mit folgender Forschungsfrage:

- Welche zentralen Aspekte des grundlegenden Wissens und Könnens am Ende der Sekundarstufe I im Bereich „geometrisches Messen und Berechnen“ lassen sich in relevanter fachdidaktischer Literatur identifizieren und wie lassen sich diese zusammenfassen?

Was versteht man unter Geometriewissen & -können?

Grundlegendes Wissen und Können wird im Sinne von Feldt-Caesar verstanden: „Als Mathematisches Grundwissen und Grundkönnen bezeichnen wir jene mathematischen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die bei allen Schülerinnen und Schülern am Ende der beiden Sekundarstufen in Form von Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren langfristig und situa-

tionsunabhängig, das heißt insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln, verfügbar sein sollen“ (Feldt-Caesar 2017).

Was bedeutet das für die Elementargeometrie? Eine Antwort auf diese Frage wird derzeit nach unserem Kenntnisstand in der fachdidaktischen Literatur nicht gegeben. Vielmehr gibt es für diesen Bereich Broschüren, die sich mit den in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK 2004) genannten Basiskompetenzen und deren Exemplifizierung durch Beispielaufgaben beschäftigen. Die meisten orientieren sich mit direktem Bezug zur Schulpraxis an den inhaltsbezogenen Leitideen für den Mathematikunterricht. Beispielhaft seien die im Mindestanforderungskatalog der Arbeitsgruppe COSH Cooperation Schule Hochschule (*Cosh Mindestanforderungskatalog*, 2014) gelisteten Punkte des Könnens für den Bereich der Elementaren Geometrie / Trigonometrie genannt:

„Die StudienanfängerInnen können

- elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren;*
- Strecken und Winkel mithilfe grundlegender Sätze der Elementargeometrie (Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, Strahlensätze, Kongruenz von Dreiecken, Winkelsummen, Satz des Pythagoras) berechnen;*
- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen;*
- Oberfläche und Volumen einfacher Körper berechnen (Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel);*
- Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen;*
- Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen;*
- Sinus und Kosinus als Koordinaten der Punkte des Einheitskreises identifizieren;“*

Wie bei den meisten Broschüren handelt sich um einen Stoffkatalog, der sich inhaltlich an den Bildungsstandards der KMK orientiert und Beispielaufgaben vorstellt. Die Beispielaufgaben stellen Bezug zu Inhalten, Leitideen und/oder Kompetenzen her. Aber eine fachdidaktische Einordnung, welche auch die Zugangswege zum Erlangen der inhaltlichen Fähigkeiten und Fertigkeiten repräsentiert, scheint nicht gegeben.

Warum Beschränkung auf Messen und Berechnen?

Die Studien TIMSS (J. Neubrand, Neubrand, und Sibberns 1998) und PISA (M. Neubrand u. a. 2004) lassen darauf schließen, dass „im deutschen Ma-

thematikunterricht oft Technik vor Bedeutung, Kalkül vor Argument zu gehen scheinen“ (Neubrand und Neubrand 2007). Im Laufe der Schulzeit rücken die Rechenkünste immer mehr in den Kernunterricht (Führer 2002). Die herausragende Bedeutung des Kalküls zeigt sich auch in der hohen Zahl von Berechnungsaufgaben zu geometrischen Objekten in den zentralen Abschlussprüfungen am Ende der allgemeinen Schulpflicht (Gaab 2015).

Das Berechnen von Flächen- und Rauminhalten aber ist letztlich eine Methode des Messens (Kuntze in Weigand u. a. 2009), wobei die Idee des Messens weitaus facettenreicher ist als reines Rechnen. „Students need to understand why formulas work“ (Neubrand 2010; Strutchens, Martin, und Kenney 2003). Um etwas zu verstehen, sollte kein Wissen isoliert sein sondern die bestehenden Querverbindungen nutzen; gerade diese Bezüge erleichtern das Verstehen (vgl. Neubrand, 2010). Das vorliegende Modell möchte u. a. diesem Umstand der Verknüpfungen Rechnung tragen.

Vorstellung des vorläufigen, literaturbasierten Modells

Ziel der Modellentwicklung war die Bildung einer strukturierten Zusammenfassung möglichst aller in den fachdidaktischen Publikationen der letzten 20 Jahre identifizierten und diskutierten Aspekte des Messens und Berechnens. Basierend auf einer klassischen Literaturrecherche wurde ein erstes Modell nach folgenden Gesichtspunkten entwickelt: Auf der CERME10 (10th Congress of European Research in Mathematics Education) wurde bereits eine Zusammenfassung der Aspekte der Fertigkeiten in der Elementaralgebra vorgelegt (Pinkernell, Düsi, und Vogel 2017). Dieses zweidimensionale Modell verknüpft die Elemente des Themengebiets und die Aktivitäten, welche die Aspekte des sinnstiftenden Umgangs mit diesen darstellen. Das vorliegende Modell folgt dieser a priori gesetzten Zweiteilung für den Bereich des „Messens und Berechnens“.

Im Folgenden wird die inhaltspezifische Konkretisierung der Dimensionen des Modells für den Inhaltsbereich „Messen und Berechnen“ aufgeführt. Die in der Literatur identifizierten Inhalte zu Wissen und Können im Bereich „Messen und Berechnen“ ließen sich in 13 Tätigkeiten bzw. Aspekte zusammenfassen. Eine kurze Beschreibung dieser Aspekte erfolgt im Anschluss an die inhaltspezifische Konkretisierung der Dimensionen. Abb. 1 zeigt das aktuelle Modell für den Inhaltsbereich „Messen und Berechnen“.

Sinnstiftender Umgang mit... ...Elementen des Messens u. Berechnens	Wissen	Können Strukturieren			
		Transformieren		Interpretieren	
Größen	(1) Begriffe kennen und identifizieren	(5) Grundprinzip des Messens nutzen			
	(2) prototypisches Wissen kennen	(6) Einheiten umwandeln		(10) Größenzuordnung aus dem semiotischen System heraus	
Formeln mit Figuren u. Körper	(3) Grundformeln angeben		(8) Zerlegen / Ergänzen / Auslegen	(11) Größen und Termumformungen	(12) Realsituationen beschreiben
	(4) Formelbestandteile erkennen	(7) Umgang mit Formeln	(9) Terme aufstellen		
	(13) Größen effizient berechnen				

Abb. 1: Literaturbasiertes Modell zum Wissen und Können des Messens und Berechnens

Elemente des Messens und Berechnens

Der Inhaltsbereich „Messen und Berechnen“ in der Elementargeometrie der Sekundarstufe I umfasst im Rahmen des Modells das Bestimmen von Längen, Flächeninhalten, Volumina und Winkeln. Daraus ergeben sich in der Inhaltsdimension die Denkgegenstände *Größen* sowie *Formeln mit Figuren und Körpern*.

„Zum Messen braucht man Maßangaben – auch um Eigenschaften geometrischer Figuren oder Körper, wie etwa deren Flächen- oder Rauminhalt, beschreiben zu können“ (Weigand et al., 2009).

- *Größen* (Maßzahl und Einheit):
 „Größen sind Eigenschaften von ebenen und räumlichen Figuren. Sie werden der Figur durch Messen oder Berechnen aus einem Größenbereich zugeordnet. Zu den Größenbereichen der Geometrie gehören die vier Begriffe Länge, Flächeninhalt, Volumen und Winkelmaß“ (vgl. Holland 2007).
 „Zu Größen gelangt man ausgehend von realen Gegenständen durch einen Abstraktionsvorgang. Man geht dazu über, „gleichwertige“ Gegenstände (je nach dem Vergleichsaspekt) nicht mehr zu unterscheiden, und spricht dann nur noch von „Größen“ der betreffenden

Art (Längen, Gewichten, Volumina usw.). Der Abstraktionsvorgang wird oft als Messvorgang realisiert. Das Ergebnis der Messung ist dann eine Größe, geschrieben mittels Maßzahl und Maßeinheit“ (Kirsch 2004).

- *Figuren und Körper* (als Objekte des Messens):
Zu der gemessenen Größe gehört die zu messende geometrische Figur. Figuren und Körper werden als Träger des Merkmals Größe verstanden (vgl. Griesel 2016, 9). Für das verständige Messen und Berechnen spielen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten über und im Umgang mit Figuren und Körpern eine wichtige Rolle. Hinweise von Kadunz und Strässer (Kadunz und Strässer 2009, 205) auf Verwechslungen von SuS bezüglich der Begriffe Flächeninhalt, Volumen, Oberfläche und die entsprechenden Formeln und Einheiten bestärken diese Aussage. Auch Vollrath betonte bereits 1999 die enge Verbundenheit von Formen- und Inhaltslehre, die sich durch die Figuren und Körper als Objekte des Messens und Berechnens in dem vorliegenden Model widerspiegelt.

Sinnstiftender Umgang mit Elementen des Messens und Berechnens

Der sinnstiftende Umgang gliedert sich auf der ersten Ebene in Wissen und Können. Wissen umfasst sowohl deklaratives Wissen („Wissen, dass...“) (Anderson 1996) als auch prototypisches Wissen (vgl. Roth / Wittmann in Weigand u. a. 2009, 129 ff) In einer zweiten Ebene drückt sich das Können in drei Ausprägungen aus: Strukturieren – Transformieren – Interpretieren.

Strukturieren: Beim Strukturieren steht das sinnentnehmende Lesen im Vordergrund. Darunter wird eine strukturerhaltende Deutung oder Umformung (perceptual apprehension (Duval 1995)) verstanden. Für den Bereich der Geometrie gilt somit: Transformation oder Interpretation eines geometrischen Ausdrucks unter Beibehaltung seiner Struktur. Konkret bedeutet geometrische Größen und Figuren / Körper „lesen können“ u. a. zerlegen, ergänzen / auslegen geometrischer Figuren und Körper mit dem Ziel einer quantifizierbaren Aussage oder Formeln und Terme zur Berechnung geometrischer Größen auf- bzw. zusammenstellen können. Aber auch das Identifizieren von Bestandteilen einer Formel in einer Figur oder das Erkennen von Repräsentanten bestimmter Größen (Flächeninhalt, Volumen, Länge oder Winkel) werden darunter gefasst.

Transformieren: Unter Transformieren wird unabhängig des mathematischen Themengebietes eine Umformung der bereichsspezifischen Ausdrücke verstanden. Dabei sind Start- und Zielzustand äquivalent. Anders als beim Strukturieren hat das Transformieren eine Strukturveränderung zur Folge. Und anders als beim Interpretieren erfolgt bei der Transformation kein Wechsel der Repräsentationsform ((Duval 1995): operative apprehension; (Duval 2006): treatment). Die bereichsspezifische Definition lautet daher: Transformation eines geometrischen Ausdrucks in einen äquivalenten Ausdruck unterschiedlicher Struktur, d. h. die Anwendung grundlegender Sätze der Elementargeometrie und grundlegender Formeln zur Berechnung geometrischer Größen. Ebenso gehören die Umwandlung von Einheiten und die Nutzung des Grundprinzips des Messens (z. B. Verwendung nicht standardisierter Einheitsmaße) dazu.

Interpretieren: Interpretieren wird verstanden als kohärenter Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen desselben mathematischen Objekts und möglichen außermathematischen Kontextualisierungen. Anders als beim Strukturieren und beim Transformieren findet ein Wechsel der Repräsentationsform statt ((Duval 2006): conversion, (Bauersfeld und Weis 1972): intermodaler transfer). In der Geometrie ist darunter die Beschreibung einer nicht-geometrischen Situation durch Geometrie und umgekehrt zu fassen. Dies beinhaltet die Beschreibung von Realsituationen und algebraische Termumformungen als auch Größenzuordnungen aus dem semiotischen System heraus.

Dreizehn Aspekte des Messens und Berechnens - Ende der Sekundarstufe I

8. „Begriffe kennen und identifizieren“ – Begriffe wie Umfang, Fläche, Oberfläche, Volumen beschreiben, angeben und identifizieren
9. „Prototypisches Wissen zu Größen angeben“ – prototypisches Wissen geometrischer Größen wiedergeben oder identifizieren. Darunter fallen unter anderem Stützvorstellungen zu Größen oder Dimensionen einzelner Größen
10. „Grundformeln angeben und anwenden“ – Einschlägige Formeln, wie aus Formelsammlungen, für Basisfiguren und -körpern zur Berechnung von geometrischen Größen wie Flächeninhalt wiedergeben und zur Berechnung der Größe nutzen.

11. „Formelbestandteile erkennen“ – Zur Berechnung / Bestimmung der Größen benötigte Elemente angeben, bestimmen und identifizieren.
12. „Grundprinzip des Messens nutzen“ – Anwenden der vier Schritte des Messens.
13. „Einheiten umwandeln“ – Einheiten und Umrechnungsfaktoren kennen und anwenden.
14. „Umgang mit Formeln“ – Grundformeln werden bei Aktivierung vorhandenen Wissens erkannt (3) und mit Hilfe algebraischer Regeln umgeformt.
15. „zerlegen / ergänzen / auslegen mit dem Ziel einer quantifizierbaren Aussage“ – Additivität der Maßfunktionen nutzen
16. „Aufstellen von Formeln / Termen zur Berechnung von Maßfunktionen abweichend von Basisformeln“ – Zusammenhänge zwischen Formeln geometrischer Objekte erkennen und zur Aufstellung von Formeln nutzen, für die keine „Rezepte“ vorliegen.
17. „Größenzuordnungen aus dem semiotischen System heraus“ - Darunter ist hier alles zu fassen, was im Zusammenhang mit geometrischen Maßfunktionen Bedeutung in sich trägt. Eine Zuordnung von Größen kann über die Grenzen des eigentlichen semiotischen Systems heraus erfolgen. So können z. B. einem Alltagsgegenstand mehrere Maßfunktionen zugeordnet werden: Tür hat eine Höhe, eine Masse und einen Oberflächeninhalt.
18. „Termumformungen geometrisch deuten und umgekehrt“ – anwenden innermathematischer Repräsentationswechsel zur geometrischen Deutung von algebraischen Termumformungen oder umgekehrt
19. „Realsituationen mit Formeln geeigneter Figuren und Körpern beschreiben“ – Anwenden von Formeln auf Realsituationen
20. „Größen gegebener Figuren und Körper effizient berechnen“ – Beziehungen zwischen Formeln auch aus unterschiedlichen Themengebieten (z. B. Trigonometrie) erkennen, Kombination von Formeln / Termen im Hinblick auf effiziente Lösungswege. Effizient ist solches Umformen dann, wenn hierfür unter mehreren denkbaren Möglichkeiten eine gewählt wird, die nur wenige Berechnungen und Schritte zur Lösung benötigt.

Ausblick

Das Modell befindet sich noch in der Entwicklung. Derzeit wird ein Systematic literature review (SLR) durchgeführt (Durach, Kembro, und Wieland 2017; Hamich 2019; Siddaway 2014), durch das sowohl bekannte und etablierte Modelle bzw. Aspekte, aber auch weniger bekannte Sichtweisen gleichermaßen in Betracht gezogen und in dem Modell des Wissens und Könnens berücksichtigt werden.

Eine inhaltliche Validierung wird durch eine Expertenbefragung angestrebt, bei der die Befragten aufgrund des ihnen zugeschriebenen fachlichen Status zur Nachvollziehbarkeit und Vollständigkeit des Modells befragt werden. Das informationsbezogene Forschungsinteresse konzentriert sich auf mögliche Beiträge der Befragten, die das Modell in einer Revision theoretisch präzisieren und modifizieren

Literatur

- Ali, Imdad, Simarekha Bhagawati, und Jnanjyoti Sarmah. 2014. „Performance of Geometry among the Secondary School Students of Bhurbandha CD Block of Morigaon District, Assam, Indiaary School“. *IJRD International Journal of Innovative Research and Development* 3(11): 73–77.
- Anderson. 1996. *Kognitive Psychologie*. 2. Aufl. Springer VS.
- Battista, Michael T. 2006. „Understanding the Development of Students’ Thinking about Length“. *Teaching Children Mathematics* 13(3): 140–46.
- Bauersfeld, H., und V. Weis. 1972. „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts“. In *Thema Curriculum: Beiträge zur Theorie und Praxis.*, Rotsch: Rotsch, 65–94.
- Dorko, A. 2013. „Calculus Students’ Understanding of Volume“. *Investigations in Mathematics Learning* 6(2): 48–68.
- Durach, Christian F., Joakim Kembro, und Andreas Wieland. 2017. „A New Paradigm for Systematic Literature Reviews in Supply Chain Management“. *Journal of Supply Chain Management* 53(4): 67–85.
- Duval, Raymond. 1995. „Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings“. In *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, hrsg. R. Sutherland und J. Mason. , 142–57.
- Duval, Raymond. 2006. „A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics“. *Educational Studies in Mathematics* 61(1–2): 103–31.

- Feldt-Caesar, Nora. 2017. *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-17373-9> (11. April 2019).
- Führer, Lutz. 2002. „Über einige Grundfragen künftiger Geometriedidaktik“. *Mathematica didactica* Bd. 1(25): 24.
- Gaab, K. 2015. „Raumgeometrie in der Sekundarstufe 1“. In *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen Raumgeometrie*, hrsg. Andreas Filler und Anselm Lambert. Hildesheim: Franzbecker, 33–56.
- Gal, Hagar, und Liora Linchevski. 2010. „To See or Not to See: Analyzing Difficulties in Geometry from the Perspective of Visual Perception“. *Educational Studies in Mathematics* 74(2): 163–83.
- Griesel, Heinz. 2016. „Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung“. *Journal für Mathematik-Didaktik* 37(1): 5–30.
- Hamich, Myriam. 2019. „War das alles? Systematische Literaturrecherche am Beispiel einer theoriebildenden mathematikdidaktischen Arbeit“. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM.
- Heinze, Aiso. 2002. „...aber ein Quadrat ist kein Rechteck“ - Schülerschwierigkeiten beim Verwenden einfacher geometrischer Begriffe in Jahrgang 8.“ *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34(2): 51–55.
- Holland, Gerhard. 2007. *Geometrie in der Sekundarstufe*. Berlin, Hildesheim: Franzbecker.
- Kadunz, Gert, und Rudolf Strässer. 2009. *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*. 3. Aufl. Berlin, Hildesheim: Franzbecker.
- Kirsch, Arnold. 2004. *Mathematik wirklich verstehen*. 4. Aufl.
- KMK, hrsg. 2004. „Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA“. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf.
- Neubrand, J., Michael Neubrand, und H. Sibberns. 1998. „Die TIMSS-Aufgaben aus mathematikdidaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler“. *TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen*: 17–27.
- Neubrand, Johanna, und Michael Neubrand. 2007. „Geometrie: Was sollen Haupt-Schülerinnen und Schüler wissen?“ hrsg. Kristina Reiss. *Lernchancen* 55: 28–33.
- Neubrand, Michael u. a. 2004. „Eine systematische und kommentierte Auswahl von Beispielaufgaben des Mathematiktests in PISA 2000“. In *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland*, Verlag für Sozialwissenschaften.
- Neubrand, Michael. 2010. „Inhalte, Arbeitsweisen und Kompetenzen in der (Schul-) Geometrie: Versuch einer theoretischen Klärung“. In *Basiskompetenzen in der*

- Geometrie*, Hrsg. Matthias Ludwig und Reinhard Oldenburg. Hildesheim: Franzbecker, 11–34.
- O'Dell, J.R. u. a. 2016. „Developing an Understanding of children's Justifications for the circle area formula“.
- Pinkernell, Guido, Christian Düsi, und Markus Vogel. 2017. „Aspekte des Wissens und Könnens der elementaren Algebra“. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*, Münster: WTM-Verlag.
- Roos, A. K., Hans-Georg Weigand, J. Wörler, und Götz. 2019. „Optes+ - A mathematical bridging course for engineers“. In *Erscheint in Proceedings of the 11th Congress of European Research in Mathematics Education*.
- Siddaway, Dr Andy. 2014. „What Is a Systematic Literature Review and How Do I Do One? “ [/paper/What-Is-a-Systematic-Literature-Review-and-How-Do-I-Siddaway/22142c9cb17b4baab118767e497c93806d741461](http://paper/What-Is-a-Systematic-Literature-Review-and-How-Do-I-Siddaway/22142c9cb17b4baab118767e497c93806d741461) (2. January 2019).
- Strutchens, Marilyn E., W. Gary Martin, und Patricia Ann Kenney. 2003. „What students know about measurement: Perspectives from the national assesment of educational progress“, Hrsg. D. H. Clements und George W. Bright. 1: 195–207.
- Vollrath. 1999. „An geometrischen Formeln Zusammenhänge erkennen“. 37. <http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/vollrath/geofor~1.pdf> (20. November 2017).
- Weigand, Hans-Georg u. a. 2009. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1*. Springer Berlin Heidelberg.

Methodische Verbesserung des Geometrieunterrichts durch vielseitige Verwendung von Anschauungsmitteln aus Normteilen – Dynamische Geometrie mit dem Metallbaukasten?

Andreas Filler

Zusammenfassung. Die Idee, funktionale bzw. „dynamische“ Betrachtungen in den Geometrieunterricht einzubeziehen, entstand spätestens mit den Meraner Beschlüssen (Forderung einer Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens), ist heute aber vor allem im Zusammenhang mit Software wie GeoGebra geläufig. „Dynamische Geometrie“ ist jedoch auch mit klassischen Materialien praktikierbar. So wird in einem Heft von Rudolf Bellin (1959) beschrieben, wie sich spezielle Metallbaukästen für wesentliche Inhalte der Schulgeometrie einsetzen lassen, und es werden zahlreiche (235) entsprechende Beispiele beschrieben. Einige dieser Beispiele werden in dem vorliegenden Beitrag mithilfe eines Baukastens aus der damaligen Zeit vorgestellt. Wir gehen dabei der Frage nach, welche didaktischen Vor- und Nachteile die Erkenntnisgewinnung mithilfe „handgreiflichen“ Materials gegenüber Vorgehensweisen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck sowie mit Dynamischer Geometriesoftware hat.

Ist „Dynamische Geometrie“ an Computersoftware gebunden?

Wikipedia beantwortet diese Frage mit „ja“:

Unter dynamischer Geometrie versteht man das interaktive Erstellen von geometrischen Konstruktionen am Computer.¹

Ganz scheint dies aber nicht zu stimmen, denn schon aus den Meraner Beschlüssen ergab sich die Forderung, funktionale Zusammenhang und damit letztlich dynamische Aspekte im Geometrieunterricht zu berücksichtigen:

Mit der Forderung einer Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens ist in die klassische Ruhe des geometrischen Unterrichts Bewegung gekommen; Linien, Flächen und Körper entstehen, wachsen und schwinden; sie bestehen aus beweglichen Elementen. Mit der wachsenden oder schwindenden Größe des einen wächst oder mindert sich die Größe des anderen. Die Seite ändert den Winkel, der Winkel die Seite, die Höhe den Inhalt, der Radius den Kreis, die Kante den Körper. (Engel 1916, S. 11)

¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Dynamische_Geometrie (zuletzt aufgerufen am 27.11.2019)

Engel betonte die Bedeutung von Veranschaulichungen und empfahl z. B., variable Dreiecke mittels auf Pappdeckeln befestigter Schnüre zu realisieren, siehe Abb. 1.

Verschiedene Lage der Dreiecke. Wir benutzen wieder ein Modell. (Figur 237.) Auf einen auf Pappe gezogenen blauen Aktendeckel zeichnen wir mit weißer Farbe das Schiefereck ABCD, befestigen in A eine weiße Schnur, führen das freie Ende durch eine Nöse bei B und beschweren es durch ein Bleigewicht. Dann heben wir mit einem Stäbchen die Schnur bis nach D so, daß sie das Drei-

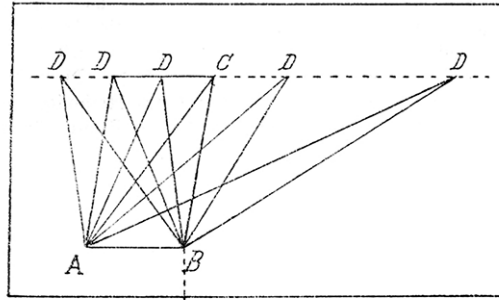


Fig. 237.

eck ABD umgrenzt. Lassen wir das Stäbchen mit der eingehakten Schnur auf der Seite DC und ihrer Verlängerung entlang gleiten, so wandert die Spitze des Dreiecks mit. Während die Seiten AD und BD sich in Lage und Größe verändern, bleiben Grundseite und Höhe für sämtliche Dreiecke die gleichen. Aus den vielen möglichen Lagen des Dreiecks nehmen wir drei heraus.

Abb. 1: Auszug aus dem Buch von Engel (1916, S. 236f.)

Rudolf Bellin und der „Geometriebaukasten“

1959 wurde in der DDR die zehnklassige polytechnische Oberschule (als Regelschule für alle Schülerinnen und Schüler) eingeführt. Damit einhergehende Tendenzen der „Polytechnisierung“ der Bildung als „Querschnittsaufgabe“ für (fast) alle Unterrichtsfächer begünstigten die Bereitstellung und Nutzung von Unterrichtsmaterialien. So sagte der Lehrer Dr. Rudolf Bellin in einer Lesung vor dem Pädagogischen Kreiskabinett Neuruppin am 3.12.1957 (veröffentlicht 1959):

„Die Forderung der Gesellschaft nach polytechnischer Erziehung der Jugend wird durch die Anfertigung und die Benutzung von Anschauungsmitteln für die Hand der Schüler unterstützt.“ (Bellin 1959, S. 8)

Auch auf die Meraner Reformen nahm er Bezug und setzte sie in Beziehung zu dialektischem Denken, das als Bestandteil der „Marxistisch-Leninistischen Weltanschauung“ betrachtet wurde, einem zentralen Bildungs- und Erziehungsziel der Schule in der DDR:

„Die ‚Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens‘ (Meraner Vorschläge) muß wie ein roter Faden den Geometrieunterricht durchziehen; denn funktionales Verständnis bildet eine Voraussetzung für das dialektische Denken. Zu dieser Erziehung kann ein in seinen Teilen bewegliches Modell beitragen. An solch einem Anschauungsmittel läßt sich auch besonders gut eine Invarianz, die Unabhängigkeit von variablen Beziehungen, herausarbeiten. ...“
(ebd., S. 9)

Aus diesen Argumentationslinien leitete Bellin die folgende Forderung ab:

Man muß zu Anschauungsmitteln greifen, die ... in der Planimetrie an die Stelle des Statischen das Dynamische setzen.
(ebd., S. 10)

Bellin stellte als geeignetes Anschauungsmittel einen „Geometriebaukasten“ vor, der in Abwandlung damals als Spielzeug weit verbreiteter Metall- bzw. Stabilbaukästen von einer Firma in Thale hergestellt wurde (Abb. 2).



Abb. 2: DDR-Geometriebaukasten (hergestellt um 1960)

Der wesentliche Unterschied des Geometriebaukastens zu normalen Metallbaukästen besteht darin, dass neben den üblichen Stäben mit Löchern (in Abb. 3 oben) auch geschlitzte Stäbe vorhanden sind (unten). Weiterhin sind Winkelmesser enthalten.

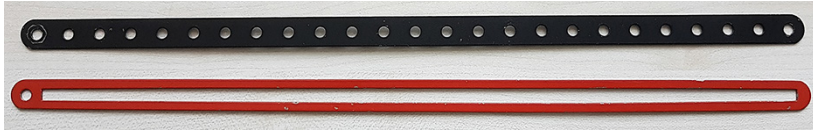


Abb. 3: Arten von Stäben im Geometriebaukasten

Stabilität und Freiheitsgrade

Die Frage, wie man ein Viereck mit festen Seitenlängen „stabil bekommt“, stellt sich beim Bauen unterschiedlichster Objekte sehr schnell (wie in Abb. 4 einem Siebenjährigen beim Bauen eines Autos).

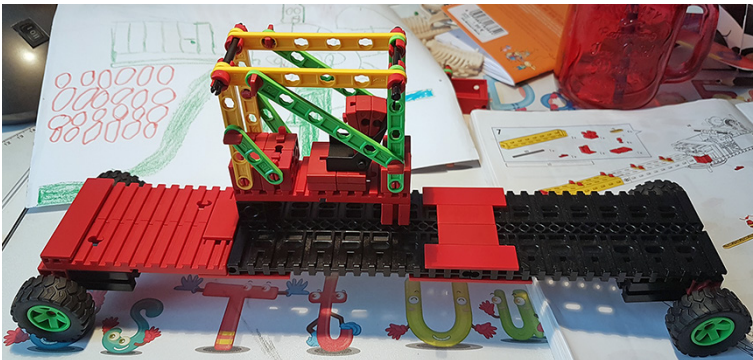


Abb. 4: Damit ein Parallelogramm ein Rechteck bleibt, sind zusätzliche Streben nötig.

Mit variablen (geschlitzten) Stäben können verallgemeinerte Fragestellungen untersucht werden:

- Wie viele Seiten und/oder Winkel eines Drei-/Vier-/Fünf-/.../ n -Ecks müssen fixiert werden, damit dieses stabil ist?

Für Dreiecke² können entsprechende Überlegungen und Experimente zu den Kongruenzsätzen führen, aber Vorsicht: Stabilität ist nicht in jedem Fal-

² Siehe hierzu auch den Abschnitt „Variable Dreiecke“ in (Mink 2018, S. 59-64).

le mit eindeutiger Bestimmtheit gleichzusetzen. Ein Dreieck mit zwei festen Seiten, in dem der der kürzeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel fixiert ist, ist (falls es existiert) stabil, aber es existieren zwei Dreiecke mit diesen Stücken, siehe Abb. 5.



Abb. 5: Zwei Dreiecke mit zwei Paaren gleich langer Seiten und kongruenten Winkeln, die den jeweils kürzeren dieser Seiten gegenüberliegen

Variationen fester und variabler Seitenlängen und Winkelgrößen an Vier-, Fünf- und ggf. Sechsecken führen zu der Erkenntnis, dass ein n -Eck stabil wird, wenn mindestens $2n-3$ seiner Seiten bzw. Winkel fixiert sind.³

In Abb. 6 sind drei Seiten und drei Winkel fixiert (der Eckpunkt unten rechts lässt sich entlang der roten Seite verschieben, wobei der Winkel nicht verändert wird). Das Fünfeck hat somit noch einen Freiheitsgrad. Fixiert man eine weitere Seite oder einen weiteren Winkel, so ist es starr.



Abb. 6: „Variables“ Fünfeck

³ Bei n -Ecken, deren sämtliche Seiten fest und durch Gelenke verbunden sind (Gelenk- n -Ecke), müssen also mindestens $n-3$ Winkel (oder stattdessen Diagonalen) fixiert werden – man sagt, dass der Freiheitsgrad eines Gelenk- n -Ecks $n-3$ ist. Ausführlicher werden Gelenk- n -Ecke in (Mink 2018, S. 65-78) thematisiert; das Buch enthält auch entsprechende Unterrichtsmaterialien (Vorlagen für aus Pappe auszuscheidende Stäbe und Tabellenvorlagen für systematische Untersuchungen).

Einige weitere Beispiele für „dynamische“ Konstruktionen mit dem Geometriebaukasten

Im Folgenden wird eine kleine Auswahl der von Bellin vorgeschlagenen Konstruktionen vorgestellt. Hierbei sollen sowohl m. E. sinnvolle Beispiele gezeigt als auch Grenzen verdeutlicht werden.

Winkel an geschnittenen Parallelen

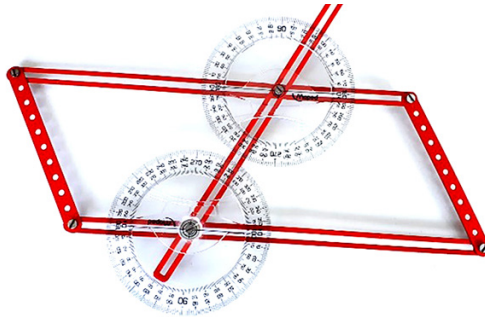


Abb. 7: Winkel an geschnittenen Parallelen

Mit dem in Abb. 7 gezeigten Aufbau lassen sich der Stufen- und der Wechselwinkelsatz herausarbeiten, wobei sowohl der Abstand zwischen den Parallelen als auch die Lage der sie schneidenden „Geraden“ variabel sind. Allerdings sind die Winkelmessungen relativ ungenau (im Vergleich zu Konstruktionen auf Papier oder erst recht mittels DGS).

„Besondere“ Linien und Punkte im Dreieck

Winkelhalbierende lassen sich auch auf geschlitzten Stäben gut realisieren (Abb. 8). Bei vorsichtiger Führung des rechten Eckpunktes entlang der variablen Dreiecksseite wird sichtbar, dass sich die Winkelhalbierenden immer in einem Punkt schneiden. Eine Realisierung des Inkreises (mit sich veränderndem Radius) ist allerdings nicht möglich.



Abb. 8: Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks

Mittelsenkrechten von Strecken variabler Länge lassen sich mit dem Baukasten gut herstellen, allerdings führt die Konstruktion der drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in der in Abb. 9 dargestellten Weise zu einem schwer durchschaubaren Konstrukt. Die von Bellin (1959, S. 73) vorgeschlagene (weniger aufwändige aber sehr fragile) Konstruktion von Höhen bzw. Mittelsenkrechten erwies sich bei Versuchen als ungeeignet, um einen gemeinsamen Schnittpunkt bei (veränderbaren) Dreiecken zu erkennen.

Seitenhalbierende lassen sich durch Schnüre realisieren, wobei der gemeinsame Schnittpunkt bei Variation des Dreiecks jedoch nur erhalten bleibt, wenn Mittelpunkte variabler Seiten manuell nachjustiert oder durch eine Konstruktion wie in Abb. 9 realisiert werden.

Diagonalen und Teildreiecke im Parallelogramm

Durch Messungen an einem veränderlichen Parallelogramm können Schülerinnen und Schüler feststellen, dass sich die Diagonalen halbieren, gegenüberliegende Winkel gleich groß sind und sich benachbarte Winkel zu 180° ergänzen.

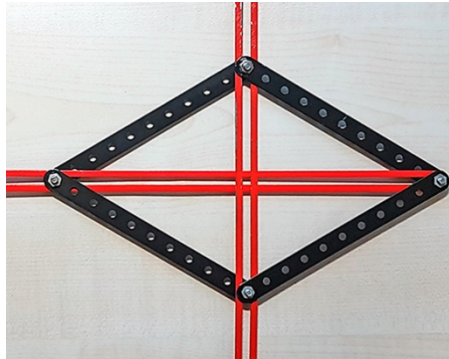


Abb. 9: Mittelsenkrechte

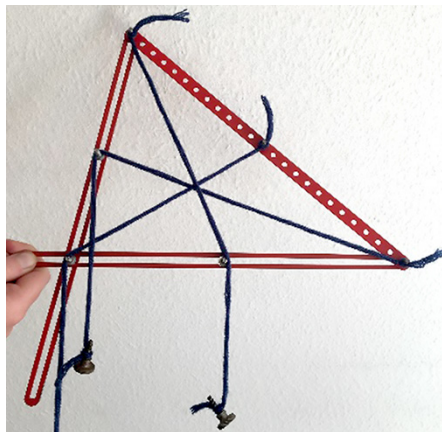


Abb. 10: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks

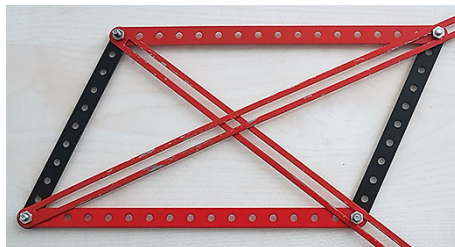


Abb. 11: Parallelogramm mit Diagonalen

Allerdings sind die Messungen (wie schon erwähnt) recht ungenau. Daher ist es sinnvoll, zwei der in Abb. 11 gezeigten Konstrukte zu bauen, übereinander zu legen und eines davon um 180° um den (gemeinsamen) Diagonalschnittpunkt zu drehen, womit auch die Kongruenz jeweils gegenüberliegender Teildreiecke offensichtlich wird.

Sätze am Kreis

Der Geometriebaukasten enthält (außer kreisförmigen Winkelmessern und einigen kleinen Rädern) keine Kreise. Diese lassen sich ergänzend aus Pappe ausschneiden, besitzen dann allerdings keinen variablen Radius und lassen sich nicht stabil mit anderen Bauteilen verschrauben.

Für eine Reihe von Sätzen am Kreis würde man eigentlich keine Modelle von Kreisen benötigen, sondern lediglich Punkte (bzw. Schrauben), die sich auf Kreisen bewegen, also von einem festen Punkt einen konstanten Abstand behalten.

So ist bei der in Abb. 12 abgebildeten Konstruktion zum Satz des Thales der Pappkreis nur „kosmetisches Beiwerk“, im Sinne der Anschaulichkeit jedoch sinnvoll. Auf ähnliche Weise lässt sich auch der Zentri-Peripheriewinkelsatz erarbeiten (Bellin 1959, S. 99), wobei hierbei wieder zu beachten ist, dass die durchgeführten Winkelmessungen recht ungenau bleiben.

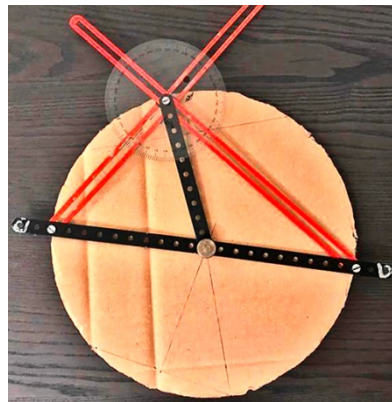


Abb. 12: Satz des Thales

Anwendungen der Ähnlichkeitslehre: Pantograph u. a.

Bellin empfiehlt den Aufbau von Modellen zur Erarbeitung der Strahlen- und Ähnlichkeitssätze (Bellin 1959, S. 111ff.). Aufgrund der recht unkomfortablen und ungenauen Messungen sind hierfür aber m. E. sowohl Zeichnungen auf Papier als auch DGS-Konstruktionen zu bevorzugen. Gut lassen sich hingegen „Geräte“ bauen, die auf den Strahlensätzen bzw. ähnlichen Dreiecken basieren, wie z. B. Jakobsstäbe (siehe z. B. Bellin 1959, S. 113), einfache „Proportionenlehren“ und Proportionalzirkel (ebd., S. 112).

Eine beliebte Anwendung der Ähnlichkeitslehre sind Pantographen (bzw. Storchenschnäbel). Mink behandelt sie ausführlich und gibt Bauanleitungen für Pantographen aus Pappstreifen (Mink 2018, S. 86-99); „fertige“ Pantographen sind auch im Handel erhältlich. Metallbaukästen eignen sich ebenfalls sehr gut, um Pantographen herzustellen, siehe Abb. 13. Folgt man allerdings dem Vorschlag von Bellin (1959, S. 116), zwei der Parallelogrammseiten mit geschlitzten Stäben zu realisieren, um ohne Umschrauben stufenlose Änderungen des Maßstabs vornehmen zu können, so erhält man ein sehr wackeliges Konstrukt. (Darüber hinaus hat die Verwendung gelochter Stäbe den Vorteil, dass sich der Maßstab gut durch Auszählen der Löcher einstellen lässt.)

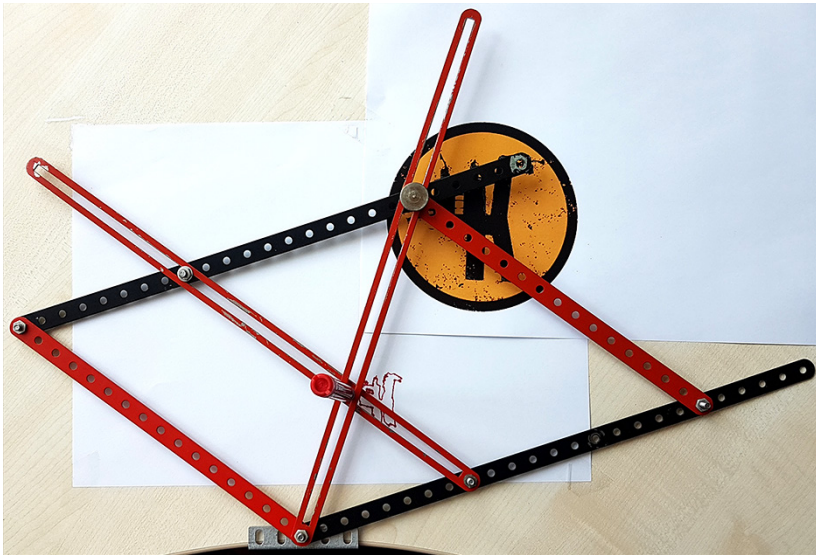


Abb. 13: Pantograph

Ellipsenzeichner

Ein Ellipsenzeichner lässt sich leicht mithilfe zweier geschlitzter Stäbe (welche die Koordinatenachsen markieren) und eines gleitenden Stabes fester Länge realisieren. Unterteilt man den gleitenden Stab in Teilstrecken der Längen a und b und bringt am Teilungspunkt einen Stift an, so entsteht eine Ellipse mit den entsprechenden Längen der Halbachsen (siehe Abb. 14).

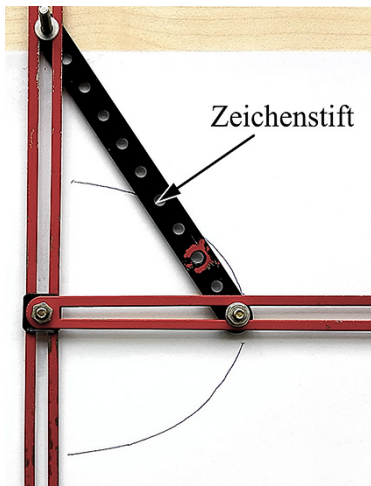


Abb. 14: Ellipsenzeichner

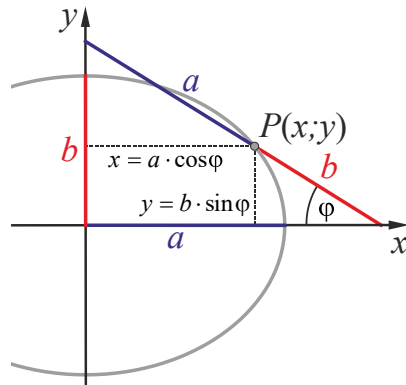


Abb. 15: Funktionsweise der Ellipsenzeichners

Die Funktionsweise dieses Ellipsenzeichners beruht auf der Parameterdarstellung der Ellipse $(x; y) = (a \cos \varphi ; b \sin \varphi)$ ⁴. Diese muss Schülerinnen und Schülern aber nicht unbedingt bekannt sein, um die Konstruktion zu verstehen. Ein mögliches Vorgehen wäre, zunächst die Konstruktion ausführen zu lassen und dann folgende Aufgaben zu stellen:

- Drücke die Koordinaten der gezeichneten Punkte durch die Längen der Teilstrecken a und b sowie den Winkel φ zwischen dem gleitenden Stab und der x -Achse aus.
- Zeige, dass die ermittelten Koordinaten die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllen.

Elementare Raumgeometrie: Körper und ihre Abwicklungen

Baut man Seitenflächen von Körpern und fügt diese mit drehbaren Scharnieren zusammen, so lassen sich diese verformen (scheren). Ein Quader

⁴ Der Parameter φ entspricht dabei übrigens i. Allg. *nicht* dem Winkel zwischen der x -Achse und dem Strahl vom Ursprung durch den entsprechenden Ellipsenpunkt, während der in Abb. 15 eingezeichnete Winkel tatsächlich den Parameter kennzeichnet.

lässt sich auf diese Weise in ein (fast) beliebiges Parallelepiped deformieren und dessen Abwicklung betrachten (siehe Abb. 16).

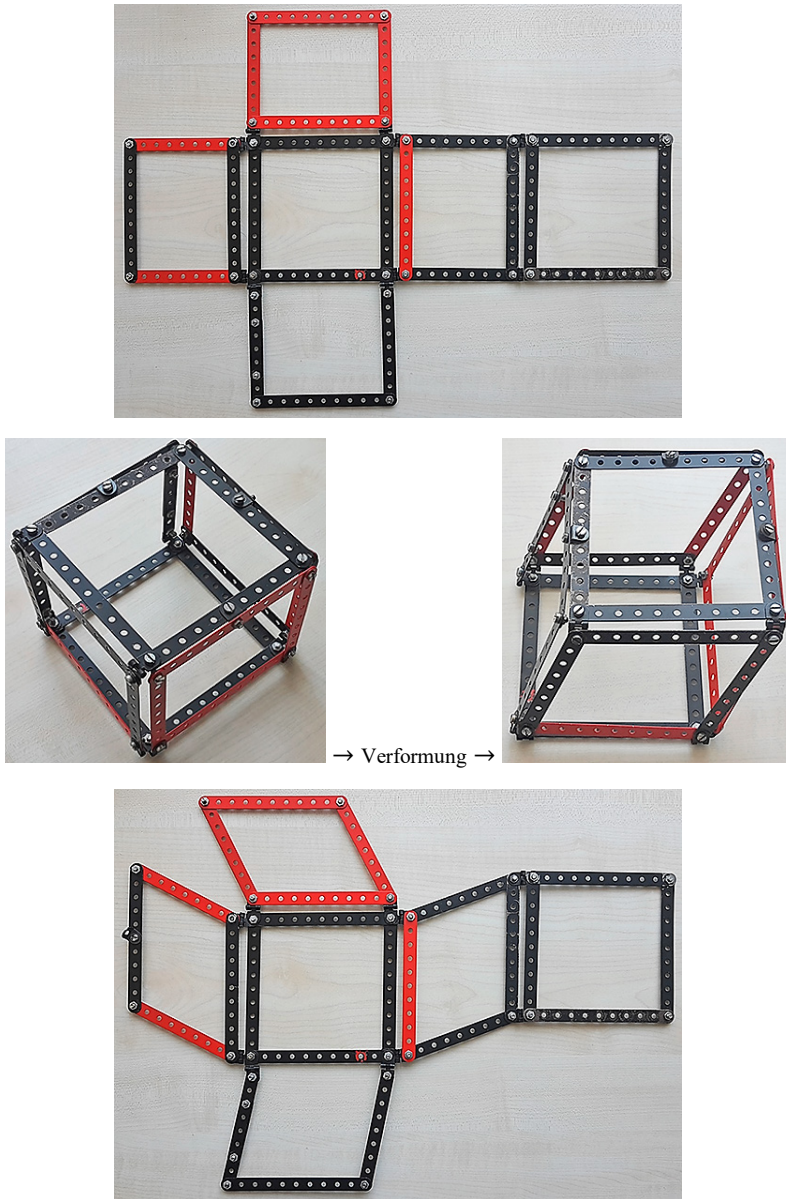


Abb. 16: Vom Quader zum (nicht quaderförmigen) Parallelepiped und dessen Abwicklung

Fazit: Metallbaukasten oder DGS?

In einem Seminar wurden diverse geometrische Konstruktionen (u. a. die in diesem Beitrag beschriebenen) sowohl mit dem Geometriebaukasten als auch mithilfe von GeoGebra angefertigt und hinsichtlich ihrer Eignung für den Einsatz im Unterricht untersucht. Dabei wurden Vor- und Nachteile beider „Medien“ diskutiert.

Als Vorteile des Geometriebaukastens wurden von Studierenden insbesondere genannt:

- Haptik, Modellhaftigkeit: Bezüge zur physischen Realität liegen näher. Bewegungen werden sinnlich erfahrbar, da sie konkret ausgeführt werden können.
- Förderung räumlichen Vorstellungsvermögens ist auch bei ebenen Sachverhalten möglich (Betrachtung aus unterschiedlichen Perspektiven).
- Der Aufbau von Konstruktionen mit dem Baukasten eignet sich gut für kooperatives Arbeiten (mitunter sind sogar mehrere Personen nötig oder zumindest hilfreich, um Konstruktionen zusammenzubauen oder zu benutzen – wie den Pantografen oder den Ellipsenzeichner).

Allerdings sind – stark abhängig von der jeweiligen Konstruktion – auch klare Nachteile des Baukastens gegenüber der Software festzustellen:

- Konstruktionen sind mithilfe des Metallbaukastens z. T. komplizierter zu realisieren als Computerkonstruktionen; oft ist der Zeitbedarf höher.
- Größere/komplexere Konstruktionen sind z. T. unübersichtlich sowie unhandlich und/oder instabil.
- Die Konstruktionen sind ungenauer, dieser Nachteil fällt vor allem ins Gewicht, wenn Messungen durchgeführt werden sollen.
- Die Beweglichkeit von Konstruktionen ist z. T. durch Schrauben eingeschränkt.

Allerdings haben der höhere Zeitbedarf und die teilweise schwierigere Realisierung von Konstruktionen auch den Vorteil, dass geometrische Zusammenhänge, Eigenschaften und Konstruktionen häufiger benötigt werden als

bei Computerkonstruktionen (wo z. B. Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende sowie viele weitere Objekte per Mausklick entstehen).

Auch für/gegen den Computereinsatz sprechen Vor- und Nachteile:

- Konstruktionen sind präzise und oft schnell realisierbar.
- Sofortiges Feedback kann sich allerdings auch negativ auf die Motivation auswirken.
- Geometriesoftware als „Black Box“: Man sieht nicht, was im „Hintergrund“ passiert.
- Abhängigkeitsverhältnisse (was ist fix, was variabel, was wovon abhängig) sind bei DGS oft unübersichtlicher⁵, während man bei Metallbaukasten-Konstruktionen unmittelbar sieht, welche Schrauben in festen Löchern stecken und welche verschiebbar sind.

Wie schwer Vor- und Nachteile wiegen, hängt stark von den jeweiligen Konstruktionen ab. Hervorzuheben ist aber, dass das Anfertigen verhältnismäßig einfacher dynamischer Konstruktionen mit dem Baukasten dazu beitragen kann, das Prinzip des Zugmodus zu verinnerlichen, und damit auch auf komplexere Konstruktionen mittels DGS vorbereitet.

Tipps für „Nachahmer“

Die gemachten Erfahrungen zeigen, dass die „mechanische“ Anfertigung dynamischer Konstruktionen durchaus auch zukünftig sinnvoll sein kann. Der hier vorgestellte Geometriebaukasten ist natürlich seit Jahrzehnten nicht mehr erhältlich, aber wie die Beispiele in diesem Beitrag gezeigt haben, benötigt man für die meisten Konstruktionen lediglich folgende Bauteile:

- handelsübliche M4-Schrauben, -Muttern und Unterlegscheiben,
- evtl. 360°-Winkelmesser, die ebenfalls handelsüblich sind,

⁵ Studierende verloren in den Seminarsitzungen bei der Arbeit mit GeoGebra mehrfach die Übersicht, vergaßen Objekte abhängig von anderen zu konstruieren, versuchten an abhängigen Punkten zu ziehen und wunderten sich, wenn diese unbeweglich waren.

- gelochte Stäbe,
- Stäbe mit Schlitzten.

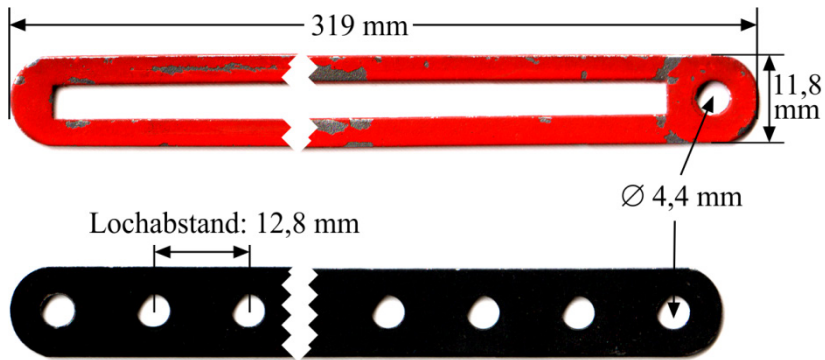


Abb. 17: Maße der Stäbe des Geometriebaukastens (Abbildung in Originalgröße)

Die Stäbe könnten mithilfe eines 3D-Druckers hergestellt werden. Aus Zeit- und Kostengründen erscheint es aber u. U. sinnvoll, derzeit erhältliche Metallbaukästen anzuschaffen (die bereits ausreichend gelochte Stäbe enthalten) und lediglich geschlitzte Stäbe (siehe Abb. 17, oben) mit 3D-Druckern anzufertigen. Geeignete Metallbaukästen produziert gegenwärtig die Firma eitech⁶. Diese enthalten auch Stäbe mit (allerdings recht kurzen) Schlitzten, die bereits eine gewisse „Variabilität“ ermöglichen.

Literatur

- Bellin, R. (1959). Methodische Verbesserung des Geometrieunterrichts durch vielseitige Verwendung von Anschauungsmitteln aus Normteilen (Lesung vor dem Pädagogischen Kreiskabinett Neuruppin am 3.12.1957). Berlin: Volk und Wissen.
- Engel, E. (1916). Raumlehre. Eine Anleitung zur Erteilung des Unterrichts in der Raumlehre im Sinne der Meraner Beschlüsse nach den Forderungen des Grundlehrplans für die Volksschulen Groß-Berlins vom 8.12.1913. Langensalza: Greßler.
- Mink, M. (2018): Geometrie entdecken in technischen Anwendungen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

⁶ Siehe <http://www.eitech.de/> – ein großes Sortiment der Metallbaukästen dieser Firma (auch Einzelteile) ist im „HERfast-Shop“ erhältlich:

<http://www.herfast.de/eitech>

Aufwickeln und Abwickeln

Hans Walser

Zusammenfassung. Unter dem Aspekt „Aufwickeln und Abwickeln“ finden sich in der Mathematik und insbesondere in der ebenen und räumlichen Geometrie, aber auch in der Technik, verschiedene, zum teil lose zusammenhängende Figuren, Methoden und Prozesse, Bilder und Kurven.

Insbesondere: Beispiele von wenig bekannten Abwicklungen. Diskussion zum Begriff „Netz“. Minimale Anzahl Klebelaschen. Aufwickeln zu Kreis und Dreieck. Mechanische Modelle. Das Rad auf dem Rad und die Fourier-Entwicklung. Hundekurve und Parametertransformation. Winkeldrittung. Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal. Aufwickeln zum Würfel. Roboter mit fünf bewegten Drehachsen.

Wozu passt die Abwicklung?

Die Abbildung 1a zeigt eine Würfelabwicklung.

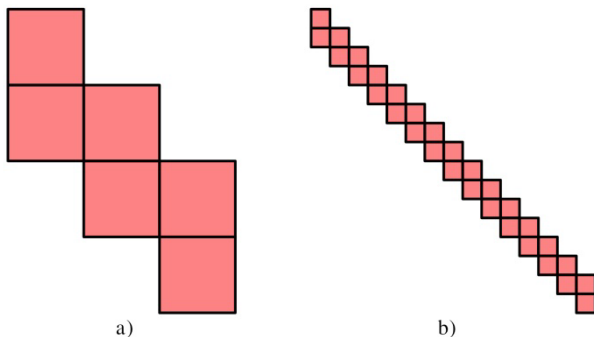


Abb. 1: Abwicklungen

Die fünfmal so lange Abwicklung der Abbildung 1b könnte entsprechend fünffach um den Würfel gewickelt werden – was allerdings Probleme mit der Kartondicke gäbe. Gibt es einen Körper mit der einfachen Abwicklung der Abbildung 1b? (Lösung siehe Abb. 9.)

Würfelabwicklungen

Mein Enkel hat mir kürzlich unter die Nase gerieben, er habe neun von den elf Würfelnetzen (Abb. 2) selber herausgefunden. Er sagte *Würfelnetz*, so stehe es im Schulbuch.

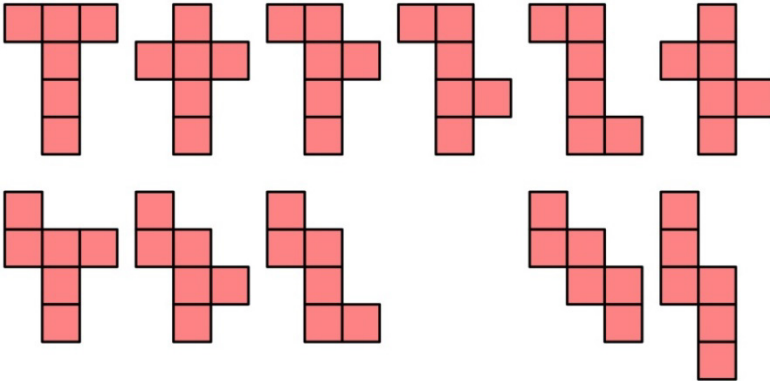


Abb. 2: Würfelabwicklungen

Die Bezeichnung „Netz“ für Polyederabwicklungen ist zwar in Schulbüchern geläufig, ist aber ein semantischer Ausreißer. Im Bedeutungsumfeld „Netz“ geht es immer um Knoten und deren Verbindungen. In den Abwicklungen der Abbildung 2 gibt es aber oft zwei oder gar drei Knoten, welche zur selben Würfecke gehören. (Warum gibt es kein Beispiel, wo sogar vier Knoten zur selben Würfecke gehören?) – Das widerspricht der Vorstellung eines Netzes. Man stelle sich einen Verkehrsnetzplan vor, in welchem der Hauptbahnhof zweimal vorkommt.

Die Abbildung 3 zeigt „echte“ Beispiele von Würfelnetzen.

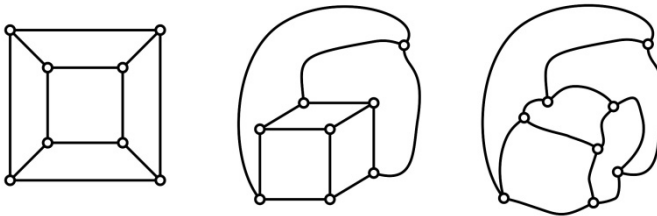


Abb. 3: Würfelnetze

Kleblaschen

Für die Anordnung der Kleblaschen einer Polyederabwicklung gibt es eine einfache Regel. Bei jeder zweiten Kante auf dem Rand muss eine Kleblasche angebracht werden. Damit erhalten wir eine Vollverklebung.

Die Frage nach der Minimalverklebung ist spannender. Mit wie wenigen Klebelaschen hält das Polyeder gerade noch?

Bei den Würfelabwicklungen genügen in der Regel zwei Klebelaschen (exemplarisch in Abb. 4). Gleichfarbig markierte Kanten müssen mit einer Klebelasche verbunden werden. Bei zweien der elf Abwicklungen (rechts unten) genügt sogar eine Klebelasche.

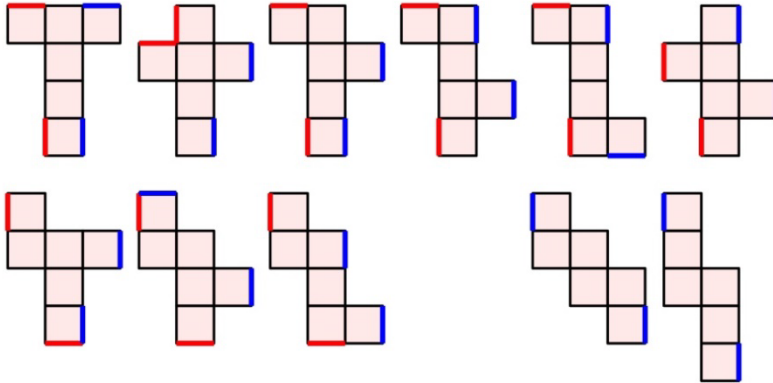


Abb. 4: Minimale Klebelaschen

Die Abbildung 5 zeigt ein Beispiel-Modell mit nur einer Klebelasche.

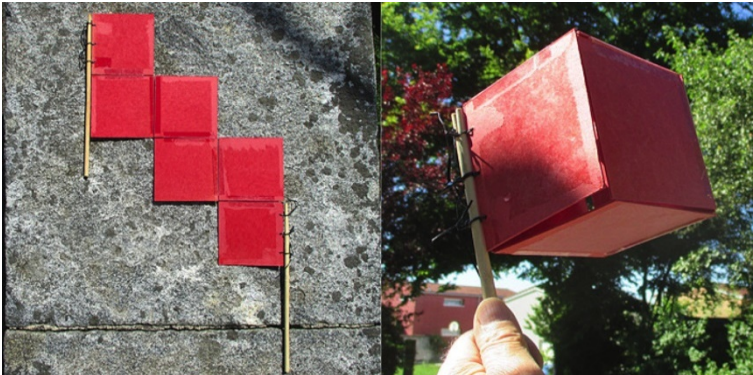


Abb. 5: Fahnenwürfel

Transmissionskette

Die Abwicklung der Abbildung 1b besteht aus fünf Abwicklungen der Abbildung 1a, welche an der einzigen nötigen Klebelasche zusammengeklebt sind. Solche verlängerte Abwicklungen können als Transmissionsketten verwendet werden (Abb. 6b). Die Zahnräder sind Würfel, welche auf einer Körperdiagonalen als Achse drehen (Abb. 6a).

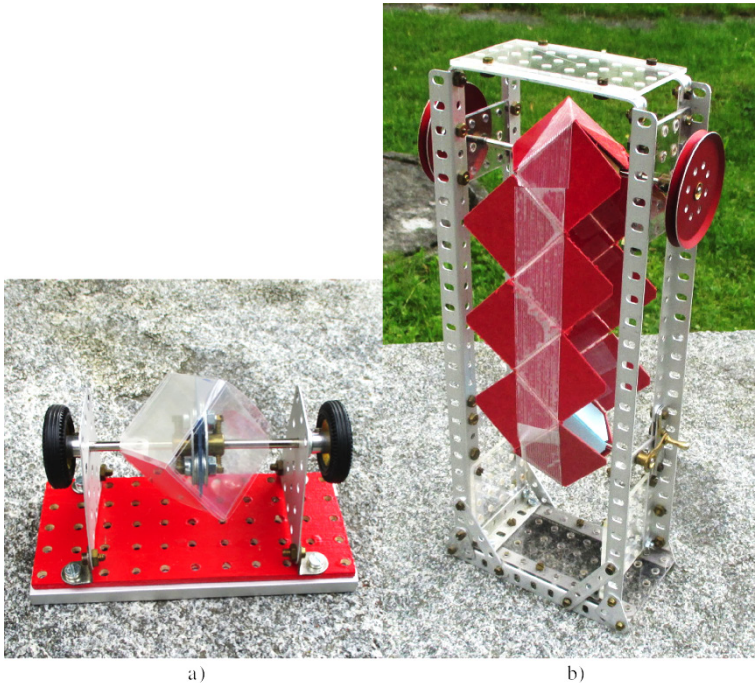


Abb. 6: Transmission

Mein Enkel ist der Meinung, auf diese Weise könne man keine Übersetzungen bauen. Hat er recht?

Eine Zahnrad-Übersetzung besteht aus einem kleinen und einem großen Zahnrad. In unserer Situation können wir aber nicht mit einem kleinen und einem großen Würfel arbeiten, da die Seitenquadrate der Würfel Bauteile der Transmissionskette sind.

Hingegen können wir beispielsweise mit einem Würfel und einem Körper der Abbildung 7 arbeiten.

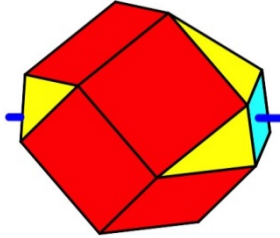


Abb. 7: Erweiterung des Würfels

Dieser Körper besteht aus acht Quadraten (rot), welche gleich groß sein sollen wie die Seitenquadrate des Würfels, weiter aus acht gleichschenkligen Dreiecken (gelb) und schließlich an der Achse aus zwei kleinen Quadraten (hellblau).

Wir erhalten mit diesen beiden „Zahnradern“ ein Übersetzungsverhältnis 8:6. Acht volle Umdrehungen des kleinen „Zahnrades“ (also des Würfels) führen zu sechs vollen Umdrehungen des großen „Zahnrades“ der Abbildung 7.

Die Abbildung 8 zeigt eine schematische Darstellung dazu.

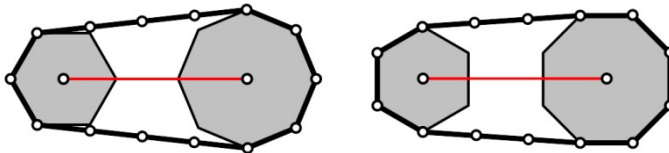


Abb. 8: Übersetzungsverhältnis 8:6

Nun ist es aber so, dass bei gespannter Kette der Achsabstand der beiden Zahnräder in den beiden Positionen der Abbildung 8 nicht derselbe ist. Der Unterschied beträgt allerdings nur 0.5%, ist also sehr klein.

Streng genommen, kann mit einem Kettengetriebe also keine Übersetzung gebaut werden. Dass es trotzdem funktioniert (Omas Fahrrad mit nur einem Gang und ohne Kettenspanner) liegt an den sehr kleinen Unterschieden und am Spiel der beteiligten mechanischen Teile.

Dreidimensionales Kreuz

Die Abwicklung der Abbildung 1b passt auf ein aus sieben Würfeln zusammengesetztes dreidimensionales Kreuz (Abb. 9). Ausprobieren!



Abb. 9: Dreidimensionales Kreuz

Aufwickeln auf einen Kreis

Wird ein gespannter Faden auf eine Spule aufgewickelt, beschreibt das Fadenende eine Evolvente (Abb. 10). Über Kurven, die durch Ab- und Aufwickeln entstehen, siehe Heitzer (1998), S. 99-102.

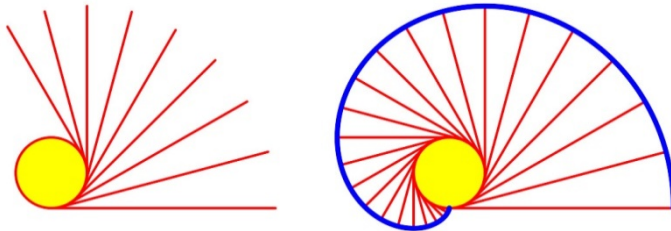


Abb. 10: Aufwickeln auf einen Kreis. Evolvente

Wir können aber auch so verfahren, dass der Faden gleichmäßig gekrümmt wird (Abb. 11).

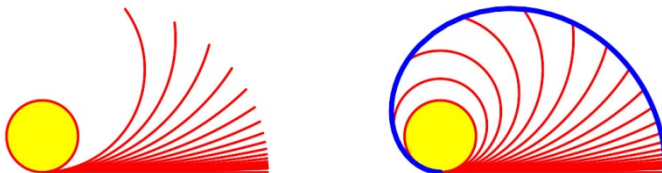


Abb. 11: Gleichmäßig gekrümmt

Mechanisch können wir dies durch Erwärmen eines Bimetall-Streifens realisieren.

Bei einer Fadenslänge a beschreibt das Fadenende eine Kurve mit der Polargleichung:

$$r(\varphi) = \frac{a}{\varphi} \sin(\varphi)$$

Dies kann wie folgt eingesehen werden (Abb. 12).

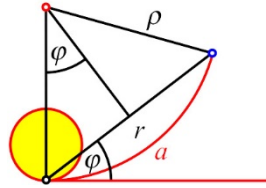


Abb. 12: Herleitung der Polargleichung

Zunächst ist:

$$\rho = \frac{a}{2\varphi}$$

Daraus ergibt sich:

$$r(\varphi) = 2\rho \sin(\varphi) = 2 \frac{a}{2\varphi} \sin(\varphi) = \frac{a}{\varphi} \sin(\varphi)$$

Die Kurve kann zu einer Art „Herzkurve“ ergänzt werden (Abb. 13a). Diese ist aber keine Kardioide und ist größer als die klassische Kardioide (Abb. 13b).

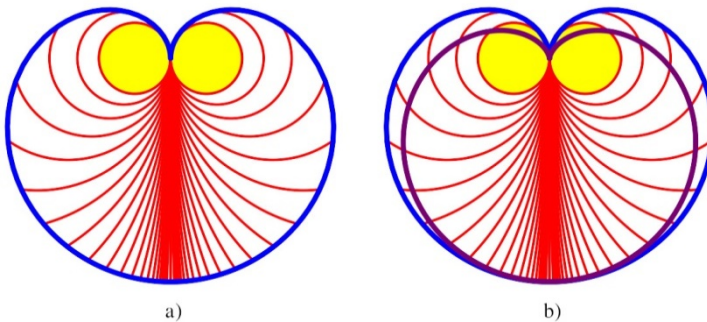


Abb. 13: Herzkurve. Vergleich mit Kardioide

Aufwickeln auf ein Dreieck

Beim Aufwickeln mit gespanntem Faden auf ein Dreieck läuft das Fadenende auf einer Folge von Kreisbögen mit schrittweise abnehmendem Radius (Abb. 14).

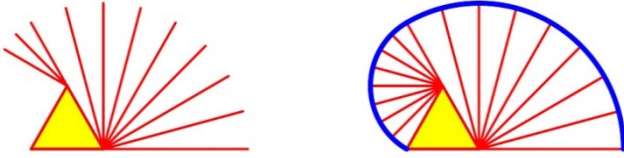


Abb. 14: Folge von Kreisbögen

Nun wickeln wir so auf, dass wir den Faden gleichmäßig knicken (Abb. 15). An den Knickstellen sollen die Außenwinkel gleichmäßig von 0° auf 120° zunehmen.

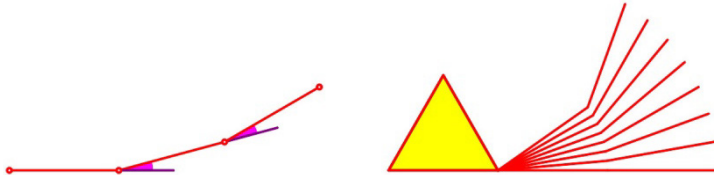


Abb. 15: Gleichmäßig geknickt

Wir können das sehen wie das Schließen einer flachen Hand zur Faust. Bei der Hand haben wir allerdings – vom Handrücken aus gezählt – vier Teile, und diese sind nicht von gleicher Länge.

In der Abbildung 16 sind die Kurven fortgesetzt gedacht, als ob das Dreieck nicht mehr im Weg wäre.

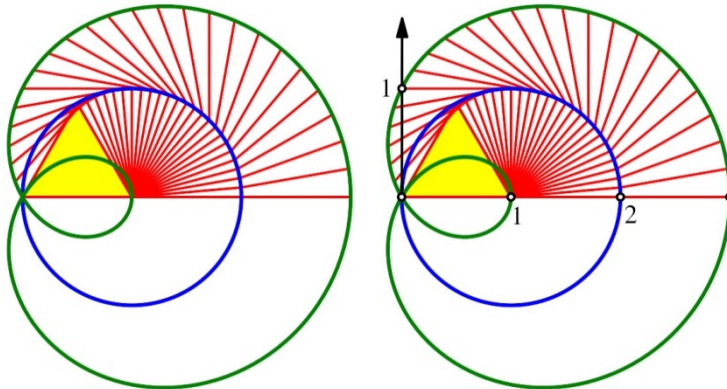


Abb. 16: Kreisüberlagerung

Die erste Knickstelle ist ortsfest. Die zweite Knickstelle läuft auf einem Kreis. Der Endpunkt des äußersten Schenkels läuft auf einer Kurve, welche

eine Kreisüberlagerung darstellt. Auf dem ersten Kreis läuft der Mittelpunkt des zweiten Kreises, der mit doppelter Geschwindigkeit dreht.

Im eingezeichneten Koordinatensystem kann die entstehende Kurve parametrisiert werden wie folgt (1).

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(0t) \\ \sin(0t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(1t) \\ \sin(1t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

Wir sehen eine Fourier-Folge, die nach zwei Schritten abbricht.

Die Abbildung 17 zeigt ein mechanisches Modell mit Zahnrädern.

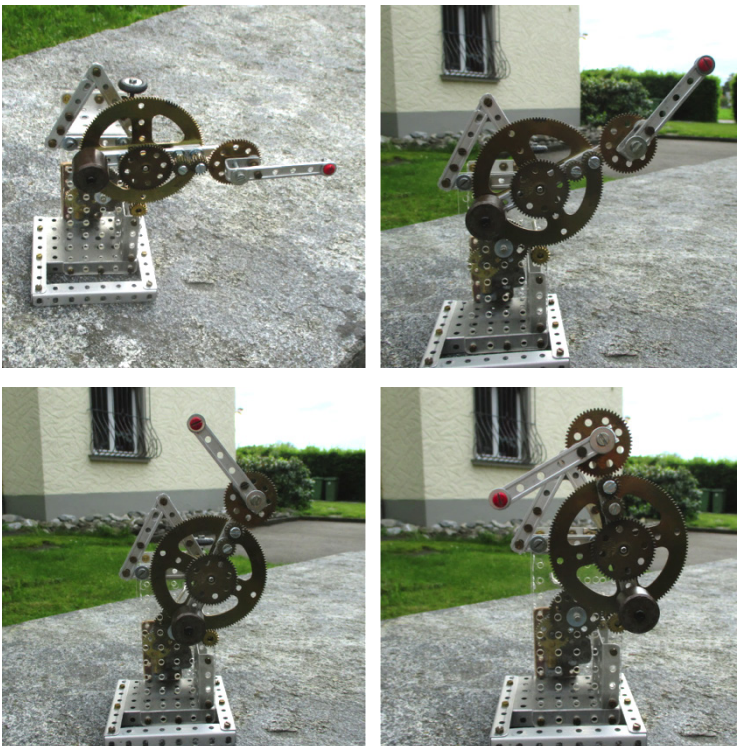


Abb. 17: Mechanisches Modell

Das ganz große Zahnrad sitzt im Leerlauf auf einer gerätefesten Achse und wird von unten (kleines Zahnrad) angetrieben. Es dient dem Anheben des ersten bewegten Schenkels. Auf derselben Achse sitzt vorne ein ortsfestes Zahnrad. Dieses dreht sich also gegenüber dem Gerät nicht. Durch das An-

heben des inneren beweglichen Schenkels wird aber über zwei kleine Zwischenzahnräder das äußerste Zahnrad angetrieben. Dieses dreht doppelt so rasch wie der bewegliche Schenkel (Übergang von t zu $2t$ in der Parameterdarstellung) und bewegt den äußeren Schenkel des Gerätes. Die Bewegung des äußersten Punktes dieses Schenkels entspricht der Kreisüberlagerung der Abbildung 16.

Die beiden kleinen Zwischenzahnräder dienen nur zur Verlängerung des inneren beweglichen Schenkels. Für die Kinematik sind sie unerheblich und könnten weggelassen werden.

Hundekurve

Die als „Kreisüberlagerung“ eingeführte Kurve der Abbildung 16 ist eine „Hundekurve“. Wir legen die Wurst in den Doppelpunkt. Wenn nun die Madame mit dem Fiffi an der roten Einheitsleine auf dem blauen Kreis spazieren geht, bewegt sich der Fiffi auf der inneren Schleife der grünen Kurve (Abb. 18). Der zweite Hund der Madame, der Veggi, bewegt sich auf der äußeren Schleife.

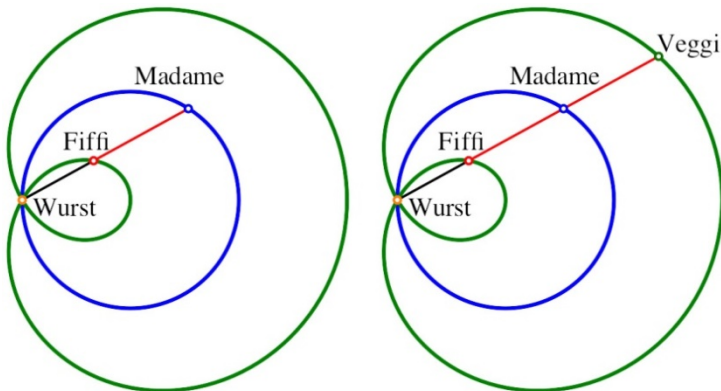


Abb. 18: Fiffi und Veggi

Bevor wir das beweisen, zwei mechanische Modelle. In beiden Modellen stellt die blaue Kreisscheibe die Madame dar, die rote Kreisscheibe den Fiffi, die grüne Kreisscheibe den Veggi und die orange Kreisscheibe die Wurst.

Im Modell der Abbildung 19 ist eine Führungsstange sichtbar, welche den Fiffi zur Wurst leitet. Allerdings haben wir dort einen Anschlag, und es geht nicht mehr weiter.

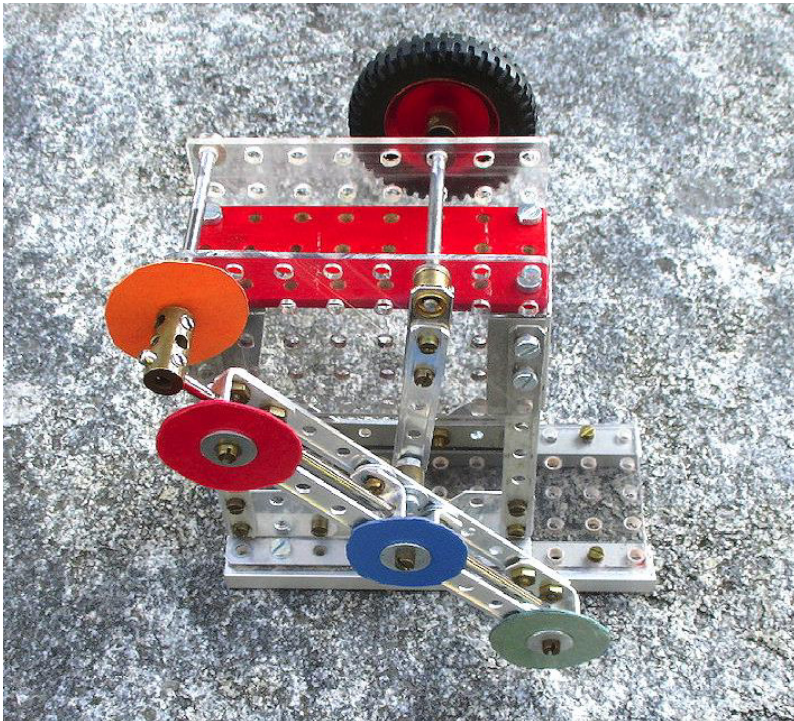


Abb. 19: Führungsstange mit Anschlag

Im Modell der Abbildung 20 sind Führungsstange und Wurst um eine Ebene nach vorne verlegt. Daher kann, wenn der Fiffi die Wurst erreicht hat, weitergedreht werden. Natürlich trägt das Modell von Fiffi und der Wurst nun nicht mehr; die Wurst ist ja gefressen worden. Es geht jetzt nur noch um das mechanische Modell mit dem als „Fiffi“ bezeichneten Punkt.

Der Fiffi entfernt sich dann auf der äußeren Schleife von der Wurst. Als nächstes erreicht die Madame die Wurst. Das ist der „tote Punkt“ des Modells. Die beiden Hunde könnten in dieser Situation vertauscht werden. Das Weiterdrehen funktioniert aber über diesen toten Punkt hinweg. Nun nähert sich der Veggi der Wurst und erreicht sie. Anschließend bewegt er sich auf der inneren Schleife, bis er wieder die Wurst erreicht. Durch Weiterdrehen

erhalten wir schließlich die Ausgangsposition mit dem Fiffi auf der inneren und dem Veggi auf der äußeren Schleife.

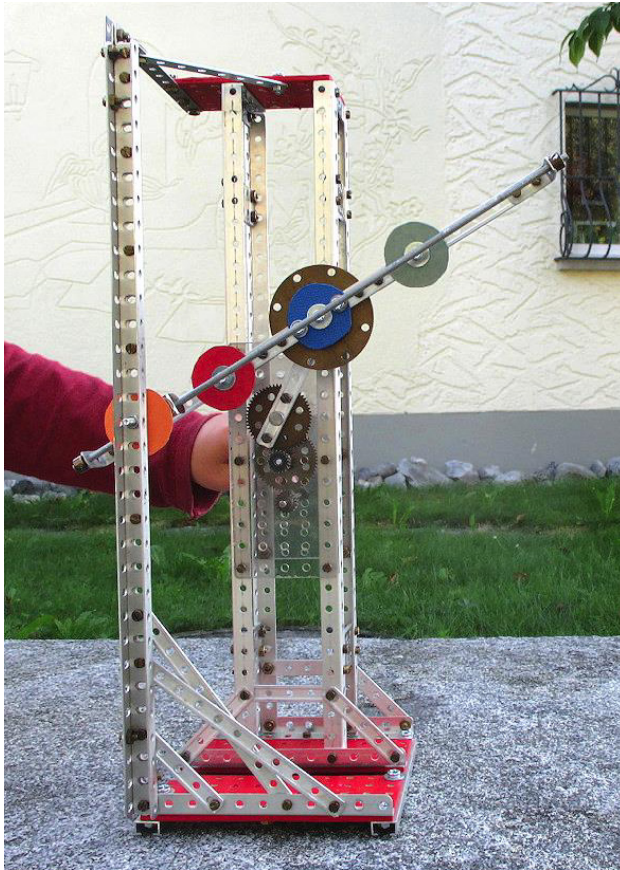


Abb. 20: Führungsstange nach vorn verlegt

Beweis

Wir haben zu zeigen, dass die Kurve der Abbildung 16 mit der Parametrisierung (1) tatsächlich eine Hundekurve ist.

Wir bezeichnen wie schon früher mit t den Parameter des blauen Kreises, also für die Bewegung der Madame. Im gelb eingezeichneten gleichschen-

ligen Dreieck ist dies der Außenwinkel des der Basis gegenüberliegenden Winkels. Die beiden Basiswinkel sind je halb so groß.

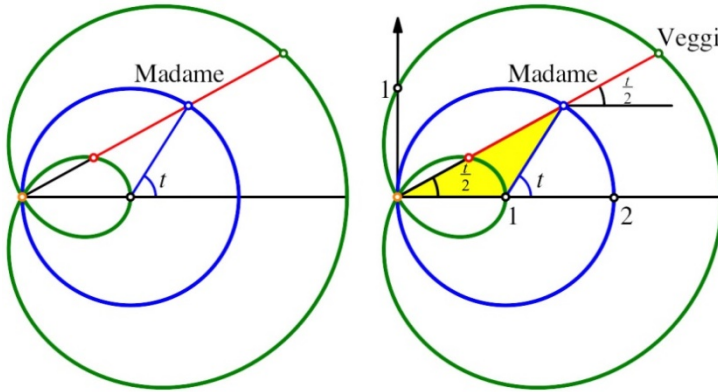


Abb. 21: Parametrisierung der Hundekurve

Mit Hilfe des parallel verschobenen Basiswinkels $\frac{t}{2}$ kann nun die Bewegung des Veggi parametrisiert werden. Es ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(0t) \\ \sin(0t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(1t) \\ \sin(1t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi] \quad (2)$$

Der Vergleich der Parametrisierungen (1) und (2) ist zunächst irritierend. Die ersten beiden Summanden sind (scheinbar) identisch, im letzten Summanden haben wir einmal das Doppelte und einmal die Hälfte des Parameters.

Das Problem löst sich mit einer Parametertransformation. Wenn wir in (1) den Parameter durch einen doppelt so großen substituieren und den zweiten und dritten Summanden vertauschen, ergibt sich (2). Auch die Parameterbereiche stimmen dann wieder überein. Damit ist der Beweis erbracht.

Exkurs: Der Autor gesteht, dass nicht nur seine Studierenden, sondern auch er selber Probleme mit solchen Parametertransformationen hat. Man muss mit einer Hilfsvariablen arbeiten, die man am Schluss dann umbenennt.

Ein Diskussionspunkt ist die Frage, ob zwei durch verschiedene Parametrisierungen beschriebene, aber identische Punktmengen als dieselbe Kurve bezeichnet werden können. Fundamentalisten verneinen dies. Für eine Kur-

ve ist die Parametrisierung essentiell, so wie der Definitionsbereich zum Funktionsbegriff gehört. Geometer und Kartografen haben da weniger Skrupel. Wien bleibt Wien, egal ob auf der Plattkarte oder der Mercator-Karte.

Die Parametrisierung (2) gibt Anlass zu einem weiteren mechanischen Modell für die Kurve (Abb. 22).

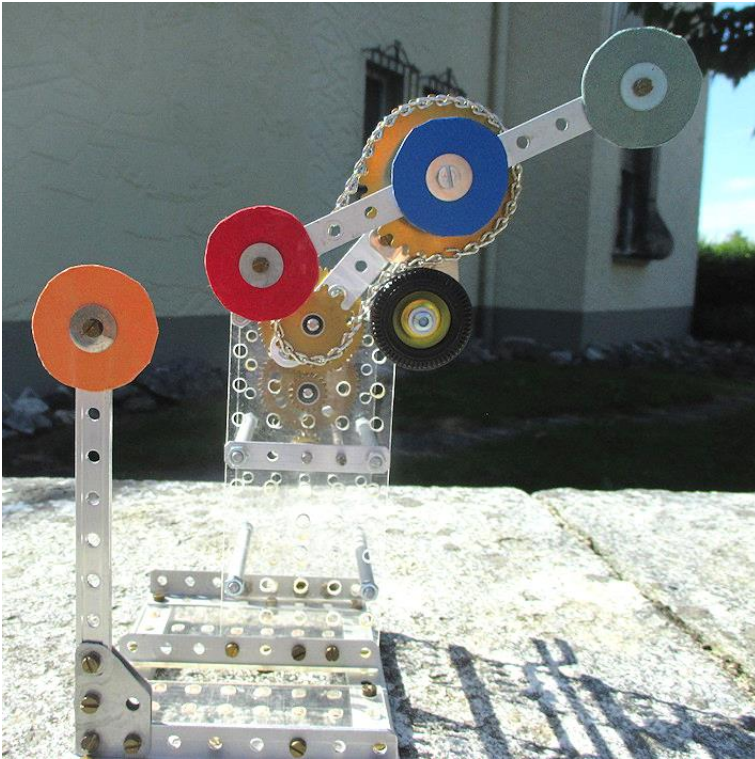


Abb. 22: Ein weiteres Modell für die Hundekurve

Die Wurst ist hier mechanisch völlig isoliert. Das Modell funktioniert mit einem Kettengetriebe. Das äußere Kettenrad ist doppelt so groß wie das innere. Es dreht daher halb so schnell. Dies liefert den halben Parameter im letzten Summanden von (2). Das Rädchen mit dem schwarzen Gummireifen ist nur ein Kettenspanner. Er ist erforderlich, damit das Modell präzise genug arbeitet. Über Hundekurven und verwandte Kurven siehe Haftendorn (2017), S. 38-78.

Winkeldrittung

Die Parametrisierungen (1) und (2) ergeben global dieselben Punkte, aber nicht punktweise. Für einen bestimmten Parameterwert ergeben sich zwei verschiedene Punkte, die aber beide auf der Kurve liegen (Abb. 23).

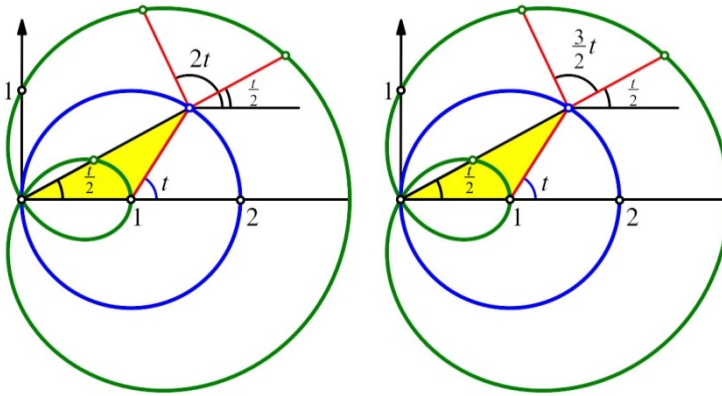


Abb. 23: Verschiedene Punkte

Bis zum zweiten Term, mit dem man vektoriell beim Punkt auf dem blauen Kreis angekommen ist, unterscheiden sich die beiden Parameterdarstellungen nicht. Mit der Parametrisierung (1) erhalten wir dann aber gegenüber der Horizontalen einen Winkel von $2t$ und für denselben Parameterwert mit der Parametrisierung (2) einen Winkel von $\frac{1}{2}t$. Die Differenz ist $\frac{3}{2}t$, also das Dreifache des kleinen Winkels $\frac{1}{2}t$. Damit ergibt sich eine Möglichkeit zur Winkeldrittung.

Sie geht so: Wir zeichnen gemäß Abbildung 24 ein gleichschenkeliges Dreieck mit dem zu dritteln Winkel gegenüber der Basis. Dieses Dreieck passen wir dann so ein, dass auch die zweite Basisecke auf der Kurve liegt. Der Winkel zur Horizontalen durch die Dreiecksspitze ist dann ein Drittel des Ausgangswinkels.

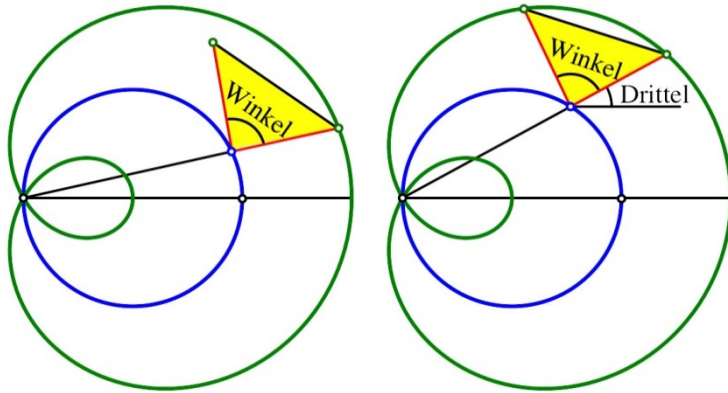


Abb. 24: Winkeldrittung

Berührung der Dreiecksspitze

In der Abbildung 16 sehen wir, dass der äußere Schenkel die Dreiecksspitze zunächst berührt und dann überschneidet. Bei welchem Parameterwert t findet die Berührung (Abb. 25) statt?

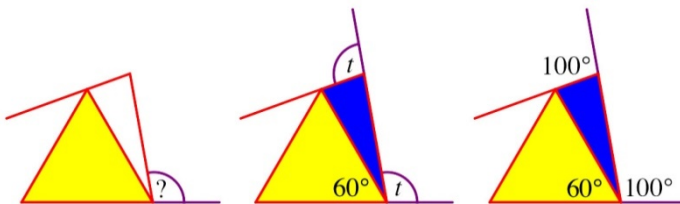


Abb. 25: Berührung

Wir machen eine Außenwinkelüberlegung im blau eingezeichneten gleichschenkligen Dreieck. Der gesuchte Parameterwert t ist der Außenwinkel der Basiswinkel. Der der Basis gegenüberliegende Winkel hat den Außenwinkel $t + 60^\circ$. Die Summe der drei Außenwinkel ist also $3t + 60^\circ$. Da umgekehrt bei jedem Vieleck die Summe der Außenwinkel 360° beträgt, ergibt sich $t = 100^\circ$.

Exkurs: Ich habe in meinem bisherigen Leben noch nie einen Winkel von 100° angetroffen. Dies liegt wohl daran, dass ein solcher Winkel nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Der Beweis dazu verläuft indirekt. Angenommen, ein Winkel von 100° sei mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Dann ließe sich ein Winkel von 60° subtrahieren und wir erhielten einen Winkel von 40° , alles mit Zirkel und Lineal. Dies ist der Zentriwinkel eines regelmäßigen Neunecks, welches damit ebenfalls mit Zirkel und Lineal konstruierbar wäre. Das widerspricht aber einem Satz von Gauß über die Konstruierbarkeit regelmäßiger Vielecke.

Das rechnerische Vorgehen führt auf kubische Gleichungen.

Das analoge Problem beim Aufwickeln auf ein Quadrat (Abb. 26) führt nicht auf einen „schönen“ Winkel. Die zugehörigen Gleichungen sind vom Grad 12.

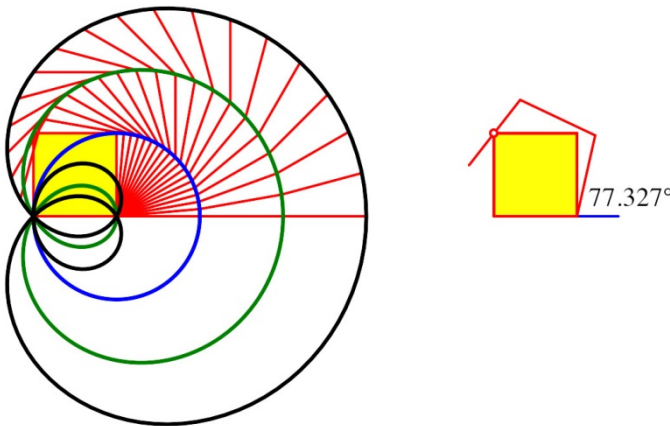


Abb. 26: Auf ein Quadrat aufwickeln.

Aufwickeln auf einen Würfel

Wir wickeln nun die Abwicklung der Abbildung 1a gleichmäßig geknickt auf den Würfel. Die Abbildung 27 zeigt die Startlage und den ersten Schritt mit einer Drehung um 5° . Das vorderste Quadrat bleibt ortsfest. Dann wird um jede Kante, welche zwei Quadrate verbindet, je um 5° gedreht. Das heißt, dass zwar die erste Drehachse auch ortsfest bleibt, aber schon die zweite Drehachse und mit ihr alle folgenden Drehachsen verdreht werden. Wir haben dieselbe Situation wie bei einem Roboter, der mehrere Drehachsen hat, welche sukzessive verdreht werden.

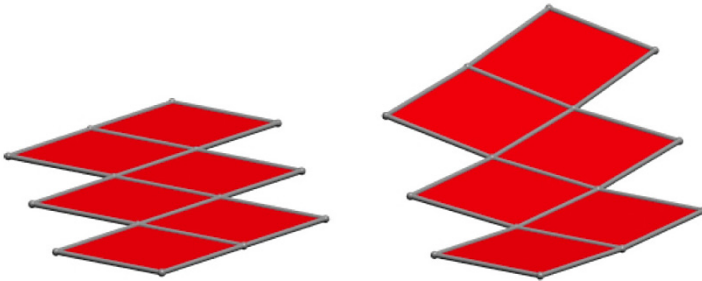


Abb. 27: Start und Drehung um 5°

Die Abbildung 28 zeigt die Situation nach Drehungen um 40° und um 45° .

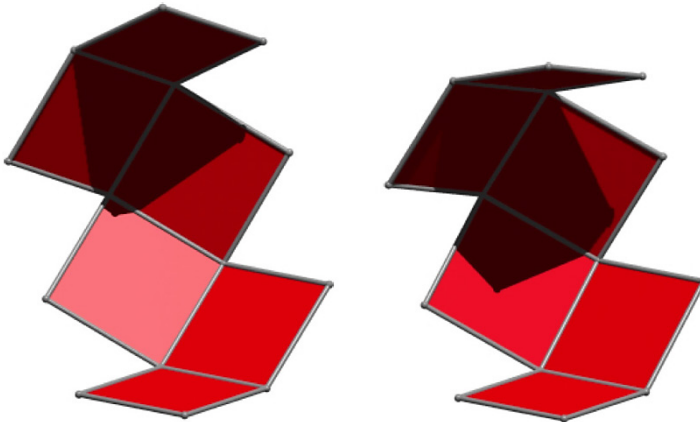


Abb. 28: Drehungen um 40° beziehungsweise 45°

In der Abbildung 29 haben wir die Situation nach der Drehung um 85° und schließlich die Endlage des Würfels.



Abb. 29: Drehung um 85° und geschlossener Würfel

Berührung einer Würfecke

Analog zu den Abbildungen 25 und 26 interessiert die Frage, ob und wo der einzupackende Würfel berührt wird. Ich bin diese Frage nur experimentell angegangen. Die Abbildung 30 zeigt die Startposition mit dem Würfel und die erste feststellbare Durchschneidung bei einer Drehung von etwa 70° .

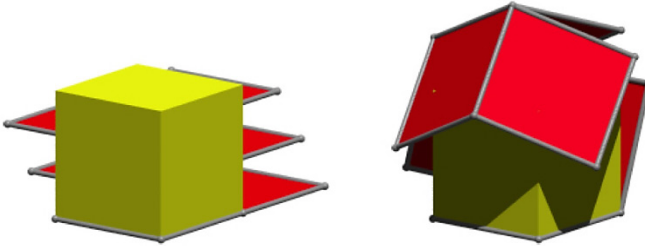


Abb. 30: Start und Beginn der Würfeldurchdringung bei etwa 70°

In der Abbildung 31 sehen wir die beiden Folgeschritte.

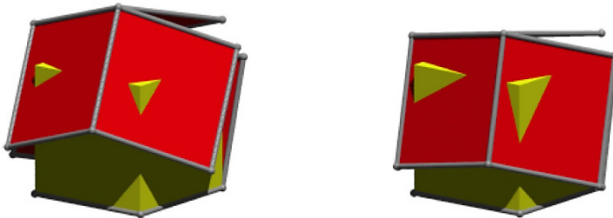


Abb. 31: Drehungen um 75° respektive 80°

Das gleichmäßige Einpacken eines massiven Würfels ist nicht möglich. Wir müssen mit einem sequentiellen Algorithmus arbeiten, also Seite um Seite einpacken.

Dank

Der Autor dankt Andreas Filler, Berlin, Bernhard Keller, Zürich, und Theo Walser, Zürich, für Anregungen und Hinweise.

Software

Verwendete Software: EazyDraw, GraphicConverter, Maple, MathType, Microsoft Word, POVRay.

Hardware

Bauteile aus Metallbaukasten Meccano und Stokys, Plexiglas, Sperrholz, Alu-Rohre, Karton.

Literatur

Haftendorn, Dörte (2017): Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen. Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-14748-8.

Heitzer, Johanna (1998): Spiralen, ein Kapitel phänomenaler Mathematik. Leipzig: Klett. ISBN 3-12-720044-7.

Websites

Hans Walser: Fahnenwürfel (abgerufen 17.09.2019)

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Fahnenwuerfel/Fahnenwuerfel.htm

Abbildungen

Alle Zeichnungen und Fotos durch den Autor.

Vom Inkreis zur Hyperbel

Jörg Meyer

Zusammenfassung. Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Kreise von außen berühren, liegen auf einer Hyperbel. Die Hyperbelkonstruktion lässt sich analog zur bekannten Parabelkonstruktion durchführen. Damit liefert das Thema eine problemnahe Einführung in das Gebiet „Kegelschnitte“ mit „open-end“-Charakter.

Allgemein bildender Geometrieunterricht

Bei Wilhelm von HUMBOLDT liest man zur Zielsetzung des Gymnasiums:

Der Schüler ist reif, wenn er so viel bei andern gelernt hat, dass er nun für sich selbst zu lernen im Stande ist. (...) Man könnte nämlich (...) mechanisch beibringen, z. B. chemische Mischungen, Rechnungsformeln usf.. Allein dies hieße die Grenzen des Schulunterrichts verlassen, die zur Bildung bestimmte Zeit zur Abrihtung missbrauchen und die Köpfe verderben. (Humboldt 1809, S. 169 ff.)

Zwar mit ganz anderem Hintergrund, aber mit vergleichbarer Zielsetzung schreibt Franz WEINERT:

(Kompetenzen sind) die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können. (Weinert 2001, S. 27 f.)

(Der psychologische Fachbegriff „Volition“ beschreibt den Prozess der Willensbildung zur Überwindung von Handlungsbarrieren.) Dieser noch nicht durchoperationalisierte (und noch nicht verkommene) Kompetenzbegriff lässt sich fruchtbar machen.

Für den Geometrieunterricht bedeuten die Aussagen Humboldts und Weinerts: Nicht Wissen anhäufen, sondern Interesse wecken, problemorientierten und entdeckenden Unterricht anhand tragfähiger „Großaufgaben“ gestalten, die „open-ended“ sein sollten und Vertiefungen an mehreren Stellen und in verschiedene Richtungen ermöglichen sollen. Dafür gibt es keine Patentrezepte, wohl aber mehr oder weniger gelungene Beispiele, die sich ihrerseits nicht von einer Lerngruppe auf eine andere transferieren lassen. Ein solches Beispiel ist das folgende.

Ausgangspunkt: Wie konstruiert man diese Figur?

Man hat in Abb. 01 drei mittelgroße Kreise, die einander berühren, dazu einen kleinen Innenkreis und einen großen Außenkreis. (Innen- und Außenkreis werden mitunter nach dem Chemie-Nobelpreisträger Frederick Soddy benannt.) Die Konfiguration wird noch ansprechender, wenn sich alles bewegt, was jedoch auf dem Papier nicht darstellbar ist.

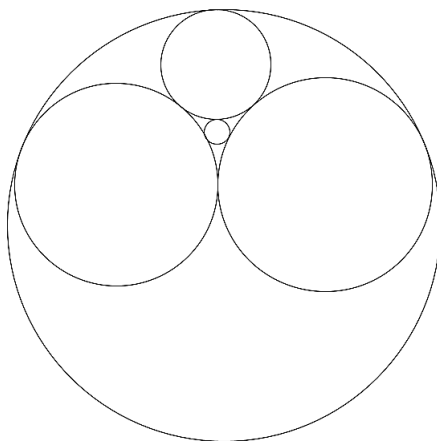


Abb. 01: Motivgebende Figur

Beginnen wir mit den drei mittelgroßen Kreisen. Eigentlich hat man so etwas schon einmal gesehen, aber vielleicht nicht hingekuckt. Der Inkreis eines Dreiecks liefert nämlich drei sich berührende Kreise (Abb. 02).

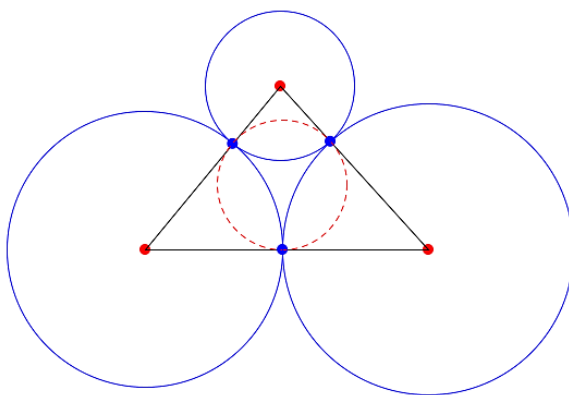


Abb. 02: Drei sich berührende Kreise

Der Innenkreis soll drei (sich berührende) Kreise berühren. Es ist beim Problemlösen eine häufig erfolgreiche Strategie, zunächst eine Bedingung wegzulassen: Gesucht sind Kreise, die nur *zwei* gegebene Kreise berühren.

Eine erste Möglichkeit: Kreisinverson

Führt man eine Inversion an einem Kreis durch, dessen Mittelpunkt der schon vorhandene Berührungspunkt ist und dessen Radius irrelevant ist, so werden die beiden schon vorhandenen Kreise (oben; rot) auf zueinander parallele Geraden abgebildet, und man muss nun einen Kreis konstruieren, der die beiden blauen Geraden berührt. Dessen Inversionsbild ist ein Berührungskreis (Abb. 03 zeigt in der Mitte und rechts jeweils eine Lösung).

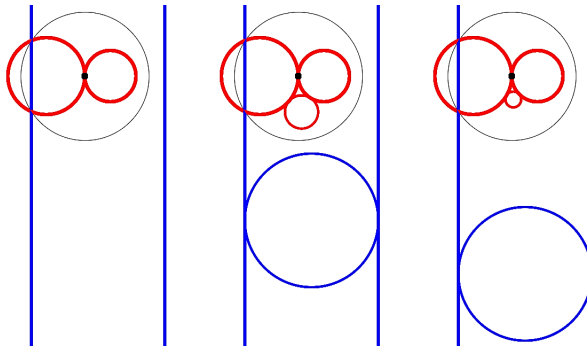


Abb. 03: Zwei Berührungskreise via Kreisinverson

Diese Lösung ist elegant und einfach, erfordert jedoch abrufbare (und damit kaum zur Verfügung stehende) Kenntnisse zur Kreisinverson. Man wird sich nicht die Zeit für die Kreisinverson nehmen, wenn man nur Berührungskreise konstruieren will. Andererseits kann man mit Hilfe der Kreisinverson *alle* Berührprobleme des APOLLONIUS von Perge lösen.

Ein frischer Ansatz

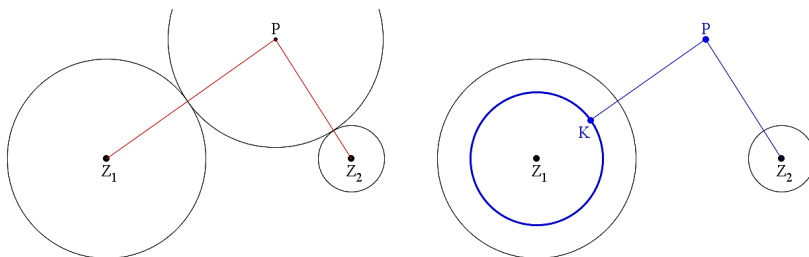


Abb. 04: Wenn man schon einen Berührungskreis hätte ...

Gegeben seien zwei Kreise mit den Mittelpunkten Z_1 und Z_2 und Radien r_1 und r_2 , die sich gar nicht zu berühren brauchen. Wir suchen alle Kreise, die die beiden gegebenen (von außen) berühren. Ein solcher Kreis habe den Mittelpunkt P (Abb. 04) und den Radius r .

Dann gilt: $r = |PZ_1| - r_1 = |PZ_2| - r_2$ bzw. $|PZ_1| - |PZ_2| = r_1 - r_2$. Die letzte Gleichung sagt aus, dass P auf einem *Hyperbelast* mit den Brennpunkten Z_1 und Z_2 liegt. Das Problem, einen Berührkreis zu konstruieren, führt somit auf ganz natürliche Weise zur Hyperbel (Abb. 05 zeigt zwei Berührkreise). (Dieser Zusammenhang war bereits Adriaan van ROOMEN (1561 – 1615) aufgefallen.) Der zweite Hyperbelast liefert keinen Kreis, der die beiden gegebenen Kreise von außen berührt, wird aber weiter unten noch eine Rolle spielen.

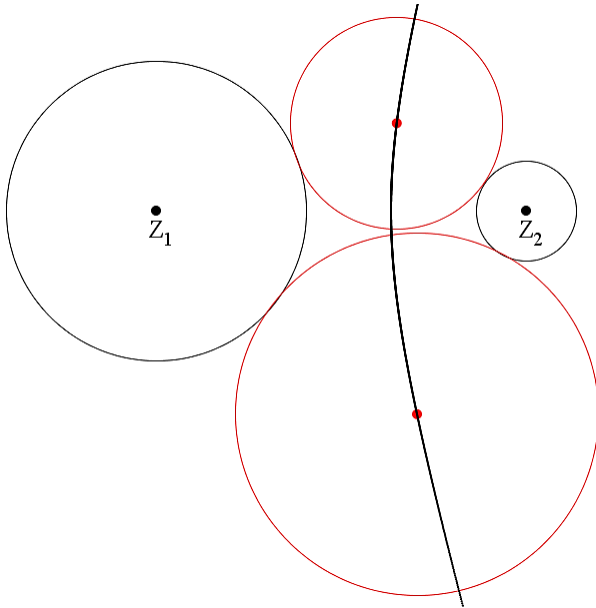


Abb. 05: Die Mittelpunkte der Außen-Berührkreise liegen auf einem Hyperbelast

Die Gleichung $|PZ_1| - |PZ_2| = r_1 - r_2$ schreibt sich auch als $|PZ_1| - (r_1 - r_2) = |PZ_2|$; der Hyperbelast beschreibt also alle Punkte, die zu Z_2 und zum Kreis um Z_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ (in Abb. 04 rechts blau eingezeichnet) denselben Abstand haben. (Der Abstand eines Punktes zu

einem Kreis ist hier als der Abstand des Punktes zum nächstgelegenen Kreiszentrum definiert.) Der Kreis um Z_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$ ist der *Leitkreis* der Hyperbel, und Z_2 ist der zweite *Brennpunkt*.

Auf dem zweiten Hyperbelast liegen die Mittelpunkte der Kreise, die die beiden gegebenen Kreise von innen berühren (Abb. 06).

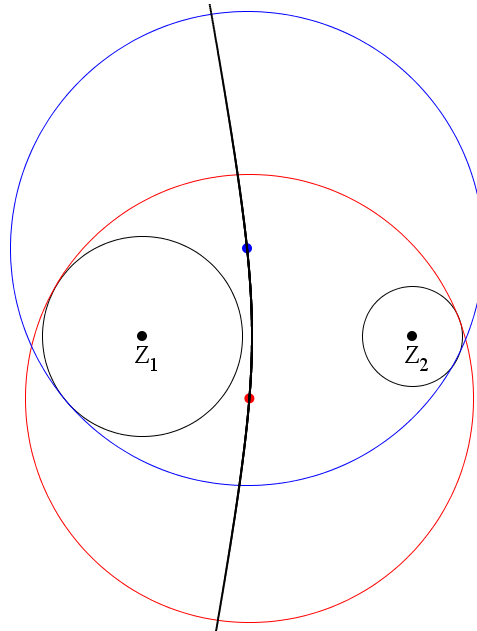


Abb. 06: Die Mittelpunkte der Innen-Berührkreise liegen auf dem anderen Hyperbelast

Nun sind zwar allgemeine Hyperbeln aus dem gymnasialen Mathematikunterricht bedauerlicherweise fast vollständig verschwunden (bis auf den Graphen einer antiproportionalen Zuordnung), aber die Konstruktion von Hyperbelpunkten ist genauso einfach wie die (weitgehend bekannte) Konstruktion von Parabelpunkten: Bei der Parabel wandert L auf der Leitgeraden, und man bekommt einen Parabelpunkt P , wenn man die Senkrechte in L zur Leitgeraden mit der Mittelsenkrechten zu LF schneidet (Abb. 07 links). Bei der Hyperbel wandert K auf dem Leitkreis, und man bekommt einen Hyperbelpunkt H , wenn man die Senkrechte in K zum Leitkreis mit der Mittelsenkrechten zu KF schneidet (Abb. 07 rechts). Dabei liegt F außerhalb des Leitkreises (läge er innerhalb, bekäme man eine Ellipse).

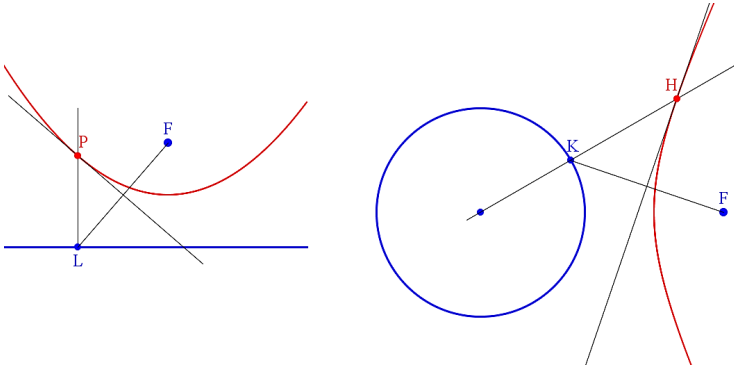


Abb. 07: Konstruktion von Parabel- und Hyperbelpunkten

Variation des Bisherigen

Soll ein Kreis einen gegebenen Kreis von außen und einen anderen gegebenen Kreis von innen berühren, so liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer *Ellipse* (Abb. 08).

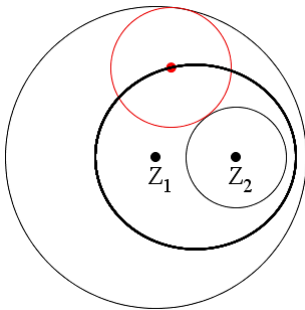


Abb. 08: Es gibt auch Ellipsen

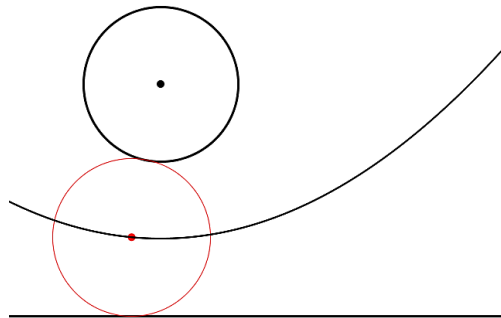


Abb. 09: Auch Parabeln kommen vor

Soll ein Kreis einen gegebenen Kreis von außen und ebenfalls eine gegebene Gerade berühren, so liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer *Parabel* (Abb. 09).

Vorläufige Zusammenfassung

Ziel war, den Innenkreis zu drei sich berührenden Kreisen zu konstruieren. Nimmt man die „richtigen“ Hyperbeläste, so schneiden die sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Innenkreises (Abb. 10).

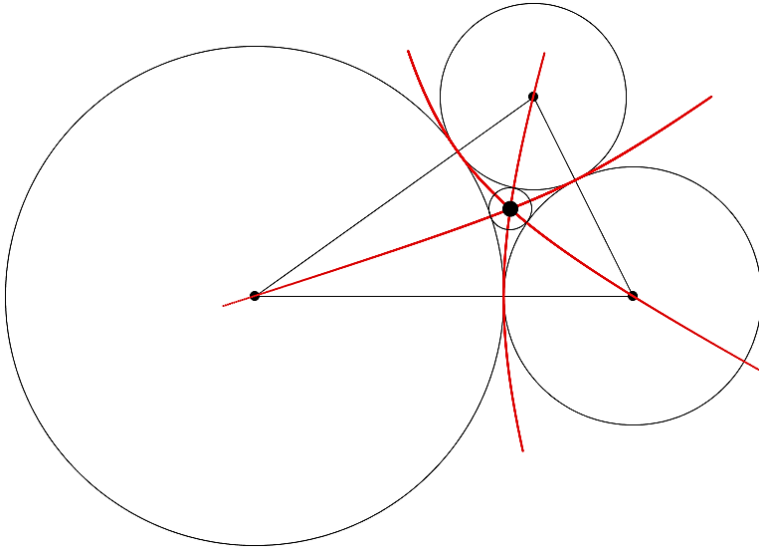


Abb. 10: Der Innenkreis

Dass die drei Äste kopunktal sind, ist leicht zu sehen:

Ist nämlich $r_1 > r_2 > r_3$, so folgt aus $|PZ_1| - |PZ_2| = r_1 - r_2$ und aus $|PZ_2| - |PZ_3| = r_2 - r_3$ durch Addition die Beziehung $|PZ_1| - |PZ_3| = r_1 - r_3$.

Nimmt man die jeweils anderen Hyperbeläste, die zu Innenberührungen gehören, bekommt man den Mittelpunkt des Außenkreises (Abb. 11).

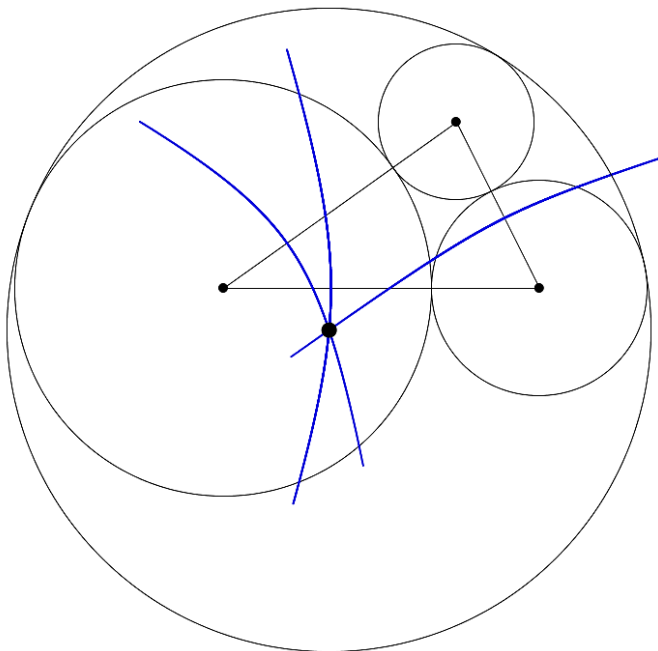


Abb. 11: Der Außenkreis

Eine unangenehme Überraschung

Will man den Mittelpunkt von Innen- oder Außenkreis haben, muss man zwei Hyperbeln schneiden. Dies ist zwar nicht mit Zirkel und Lineal zu leisten, aber GeoGebra hat einen Algorithmus, der den Schnitt zweier Hyperbeläste liefert. Dies kann im Unterricht ein Problem werden, weil hierdurch die Schnittproblematik verdeckt wird.

Allerdings ist die Konstruktion des Mittelpunkts des Innenkreises nicht „zugfest“: Wackelt man an den Eckpunkten des Ausgangsdreiecks, so springen die Schnittpunkte zwischen den Hyperbelästen hin und her.

Die Problematik, (punktweise konstruierte) Hyperbeln zu schneiden, hat schon Isaac NEWTON gestört (vgl. den folgenden Abschnitt). Die Problematik, dass man beim Hyperbelschnitt bis zu vier Schnittpunkte haben kann, von denen man den richtigen auswählen muss, hat N. DERGIADES 2007 veranlasst, die baryzentrischen Koordinaten der gesuchten Mittelpunkte auszurechnen.

Exkurs: NEWTONs Lösung

Zwar gab es mehrere Autoren, die andere Lösungen als die von van Roomen publiziert haben. Allerdings ist die Lösung von Newton 1687 (book I, section IV, Lemma 16; hier etwas modifiziert) besonders interessant, da er zwar bei Hyperbeln bleibt, aber mit deren Leitgeraden arbeitet.

Hyperbeläste lassen sich auch als Mengen von Punkten definieren, deren Abstandsverhältnis zu einem Brennpunkt und einer Leitgeraden konstant ist.

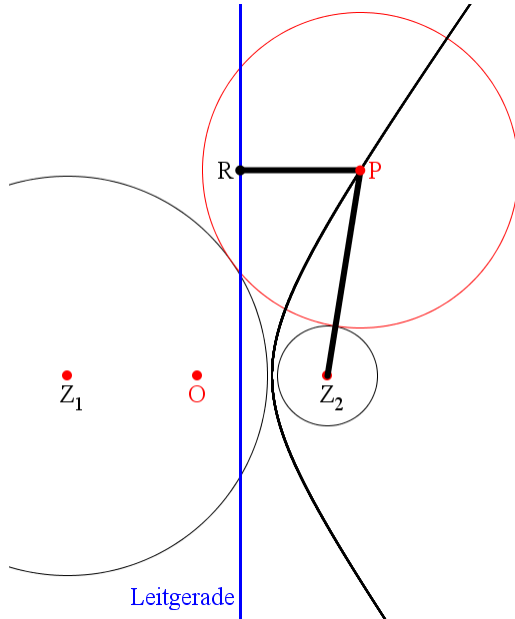


Abb. 12: Hyperbelast und Leitgerade

Bei Parabeln wäre das Abstandsverhältnis genau 1, bei Hyperbeln ist es größer als 1 (Abb. 12; dort ist zusätzlich der Mittelpunkt O von Z₁ und Z₂ eingezeichnet.).

Ist $Z_1 = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z_2 = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ und $r_1 > r_2$, so liegt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf einem Hyperbe-

last mit den Brennpunkten Z₁ und Z₂. Wegen $|PZ_1| - |PZ_2| = r_1 - r_2$ und

$$|PZ_1|^2 - |PZ_2|^2 = \begin{pmatrix} x+f \\ y \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} x-f \\ y \end{pmatrix}^2 = 4 \cdot x \cdot f \quad \text{ist} \quad |PZ_1| + |PZ_2| = \frac{4 \cdot x \cdot f}{r_1 - r_2}$$

und deswegen

$$|PZ_2| = \frac{2 \cdot x \cdot f}{r_1 - r_2} - \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{2 \cdot f}{r_1 - r_2} \cdot \left(x - \frac{(r_1 - r_2)^2}{4 \cdot f} \right).$$

Der letzte Klammerausdruck beschreibt den Abstand $|PR|$ von P zur Geraden mit

$x = \frac{(r_1 - r_2)^2}{4 \cdot f}$; dies ist die Gleichung der Leitgeraden. Der Faktor

$\frac{2 \cdot f}{r_1 - r_2}$ ist größer als 1, da Z_2 außerhalb des Kreises um Z_1 mit dem Radius

$r_1 - r_2$, also außerhalb des Leitkreises liegt.

Nun hat man insgesamt nicht nur zwei Kreise, sondern deren drei, die von außen berührt werden sollen (Abb. 13). Die Hyperbeläste zu Z_1 und Z_2 und zu Z_2 und Z_3 schneiden einander in M. Z_1 und Z_2 liefern die Leitgerade durch P und R, und Z_2 und Z_3 liefern die Leitgerade durch Q und S.

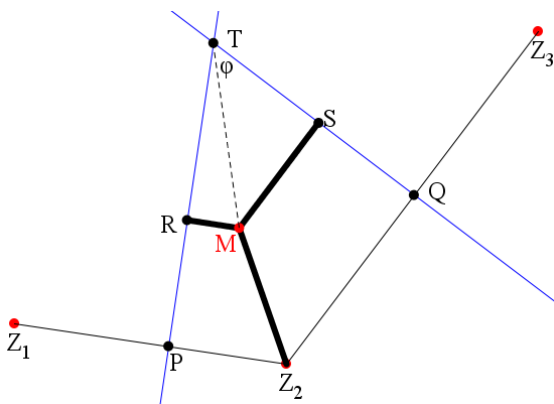


Abb. 13: Situation für drei Kreise

Beide Leitgeraden sind leicht zu konstruieren. Ihr Schnittpunkt sei T.

Da $\frac{|MS|}{|MR|}$ bekannt ist, lässt sich die Gerade g durch T und M konstruieren,

obwohl man die Lage von M auf g noch nicht kennt. Damit hat man auch den Winkel φ .

Ferner ist $\frac{|MZ_2|}{|MS|}$ bekannt, ebenso $\sin \varphi = \frac{|MS|}{|TM|}$ und damit $\frac{|MZ_2|}{|MT|}$.

M liegt auf dem entsprechenden APOLLONIUSkreis, den man nun mit g schneiden muss.

Eine Variante zu NEWTONs Lösung, die ohne Kegelschnitte auskommt, findet sich bei Casey (1888), S. 123 ff.

Wenn man auf Hyperbeln achtet ...

Es lohnt sich, die Hyperbeln durch einen Dreieckspunkt, wobei die beiden anderen Dreieckspunkte Brennpunkte sind, genauer in den Blick zu nehmen (Abb. 14).

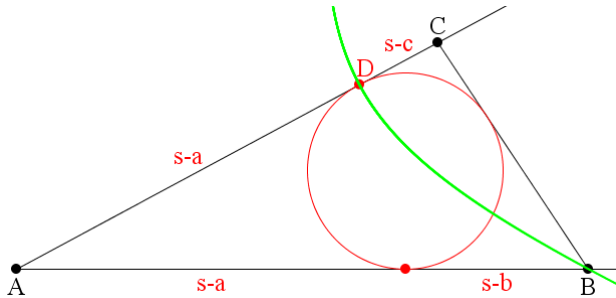


Abb. 14: Hyperbel im Dreieck

Mit $s = \frac{a+b+c}{2}$ liegt auf der Hyperbel durch B mit den Brennpunkten A und C auch der B gegenüberliegende Inkreisberührungspunkt D wegen

$$|DA| - |DC| = s - a - (s - c) = c - a = |BA| - |BC|.$$

Nachbemerkung

Einen etwas anders gestalteten Zugang zu Berührungskreisen findet man bei Walser 2015 und Walser 2016.

Literatur

Casey, John 1888: A sequel to the first six books of the elements of Euclid. Dublin: Hodges, Figgis, & Co.

Dergiades, Nikolaos 2007: The Soddy Circles. In: Forum geometricorum 7, S. 191 – 197. <http://forumgeom.fau.edu/FG2007volume7/FG200726.pdf>.

Humboldt, Wilhelm von 1809: Der Königsberger und der litauische Schulplan. In: Werke IV, Wiss. Buchgesellschaft.

Newton, Isaac 1687: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Engl. Übersetzung etwa bei Prometheus Books, Amherst, N.Y.

Walser, Hans 2015: Kegelschnitte im Dreieck. https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kegelschn_i_3eck/Kegelschn_i_3eck.pdf.

Walser, Hans 2016: Der Inkreis.
<http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20161111/Skript.pdf>.

Weinert, Franz 2001: Leistungsmessungen in Schulen. Beltz.

(Alle Links überprüft am 24. 9. 2019)

Die Thalesfigur dynamisch betrachtet – ein elementargeometrisches Problemfeld

Günter Graumann

Zusammenfassung. Eine besondere Sicht auf das Problemfeld, das sich um den Satz des Thales herum rankt, soll hier vorgestellt werden. Es geht dabei um die Beschreibung von abhängigen Größen bzw. Bahnkurven, wobei der variable Punkt sich auf dem Thaleskreis bewegt. Zuerst werden die Bahnkurven von besonderen Dreieckspunkten und die Veränderungen der Seitenlängen und des Flächeninhalts erörtert, dann werden mögliche Variationen des Themas aufgezählt und zum Schluss werden die Bahnkurven von Rechteckpunkten bei der Erzeugung des Thaleskreises durch das Einfügen eines Rechtecks zwischen zwei feste Punkte diskutiert. Zur Motivation und Anregung von Vermutungen sollte man zunächst mit Dynamischer Geometrie Software (DGS) arbeiten und danach gegebenenfalls eine exakte analytische Beschreibung mittels elementargeometrischen und/oder einfachen vektorgeometrischen Methoden erarbeiten.

Vorwort

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und trigonometrischer Erkenntnisse lässt sich eine ganze Reihe interessanter Probleme behandeln. Allerdings wird in der Schule heute die Trigonometrie teilweise nicht mehr behandelt und im Geometrieunterricht der Jahrgänge 11/12 kommt in der Regel nur noch Analytische Geometrie in Form von Linearer Algebra vor. Wie schon Hans Schupp (2000) vor 20 Jahren festgestellt hat, gibt es viele elementargeometrische Aufgabenstellungen für die Jahrgänge 10 bis 12, die den Geometrieunterricht bereichern könnten und ein stärker problemorientiertes/prozessorientiertes Bild der Elementargeometrie vermitteln. Aber auch in den Jahrgängen 8 und 9 kann man den üblichen Stoff durch neuartige Betrachtungsweisen bereichern und die Aktivität von Schülerinnen und Schülern anregen.

In dem vorliegenden Aufsatz wird eine neue Sicht auf den Satz des Thales vorgeschlagen, wobei es nicht um einen zusätzlichen Kurs geht; es können je nach Möglichkeit einzelne Aspekte in den Unterricht eingebaut werden. Solche Aktivitäten ermutigen Studierende, ein bekanntes Theorem in einem breiteren Kontext zu sehen und nach möglichen Problemen in einem bestimmten Problemfeld zu suchen. Das Bild (view) von Mathematik ist damit nicht nur die Anwendung von Rechenverfahren/Algorithmen und das Durchführen von Beweisen, sondern betrifft auch das Suchen und Finden

von Zusammenhängen und das Entdecken von Sätzen bzw. Vermutungen. Außerdem werden die hiermit zusammenhängenden Kompetenzen trainiert bzw. ihr Erwerb angebahnt.

Die Grundfigur

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C und fester Basis \overline{AB} . Den Mittelpunkt von \overline{AB} nennen wir O . Die Bahnkurve von C ist dann nach der Umkehrung des Satzes von Thales (den wir als bekannt voraussetzen) ein Halbkreis (bzw. Kreis) über \overline{AB} , d. h. ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $|OA| = \frac{1}{2} \cdot c$.

Wie in der Dreieckslehre üblich sei dabei $c = |AB|$, $b = |AC|$ und $a = |BC|$. Außerdem seien die Winkelmaße bei A und B mit α und β bezeichnet. Das Winkelmaß des „Leitstrahls“ \overline{OC} mit der x -Achse nennen wir φ .

Wandert C von A aus über den Thaleskreis nach B , so wandert φ bzw. α von 180° bzw. 90° (kleiner werdend) bis 0° , während β von 0° (größer werdend) bis 90° wandert. Mit Hilfe des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck und des Thalesatzes ergibt sich dabei $\alpha + \beta = 90^\circ$ bzw. $\alpha = 90^\circ - \beta$ und $\beta = 90^\circ - \alpha$ sowie $\varphi = 2 \cdot \alpha$ bzw. $\varphi = 180^\circ - 2 \cdot \beta$.

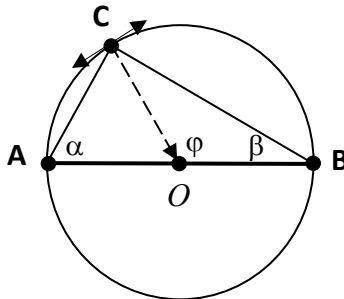


Abb. 1: Die Ausgangsfigur

Zur analytischen Beschreibung der Situation wählen wir O als Koordinatenursprung und OB als x -Achse, so dass $A = \left(-\frac{1}{2} \cdot c \mid 0\right)$ und $B = \left(+\frac{1}{2} \cdot c \mid 0\right)$ gilt. Dem Punkt C auf dem Thaleskreis geben wir die Koordinaten $(u \mid v)$.

Für die kartesischen Koordinaten von C gilt aufgrund trigonometrischer Gesetzmäßigkeiten dabei $C = (u|v) = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos \varphi \mid \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin \varphi\right)$ bzw.

$$C = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos (180^\circ - 2 \cdot \beta) \mid \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin (180^\circ - 2 \cdot \beta)\right) = \left(-\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos 2 \cdot \beta \mid \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin 2 \cdot \beta\right),$$

d. h. es ist $u = -\frac{1}{2} \cdot c \cdot \cos 2 \cdot \beta$ und $v = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sin 2 \cdot \beta$.

Der Parameter u wandert dabei von $-\frac{1}{2} \cdot c$ bis $+\frac{1}{2} \cdot c$, während v zunächst von 0 bis $\frac{1}{2} \cdot c$ (für u von $-\frac{1}{2} \cdot c$ bis 0) und danach von $\frac{1}{2} \cdot c$ bis 0 (für u von 0 bis $+\frac{1}{2} \cdot c$) wandert.

Spuren von besonderen Punkten des Dreiecks

a) Der *Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten* (Mittelpunkt des Umkreises, genannt U) ist offensichtlich O , d. h. die Spur von U ist nur der *Punkt* O .

b) Für den *Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden* (Mittelpunkt des Inkreises, genannt I) gilt $|\angle BAI| = \frac{1}{2} \cdot \alpha$ und $|\angle IBA| = \frac{1}{2} \cdot \beta$. Die Summe der beiden Winkelmaße ist also $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$. Deshalb ist das Winkelmaß bei I konstant gleich 135° , denn $|\angle AIB| = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Nach der Umkehrung des Satzes vom Umfangswinkel ist damit die *Spur von I ein Kreisbogen von A nach B* symmetrisch zur y-Achse (Maximum $y_0 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \tan 22,5^\circ \approx 0,207 \cdot c$).

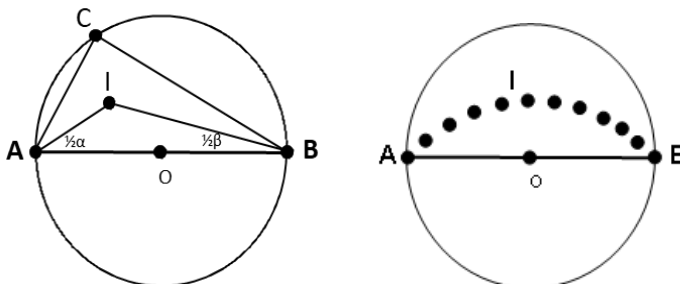


Abb. 2: Inkreismittelpunkt I

c) Wegen $\gamma = 90^\circ$ ist $h_a = b$ und $h_b = a$ und damit gilt für den *Schnittpunkt der drei Höhen* $H = C$. Die *Spur von H* ist also der *Thaleskreis*.

d) Für den *Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden* (Schwerpunkt, genannt S) gilt offensichtlich, dass eine Seitenhalbierende gleich \overline{CO} ist. Nach dem Satz über den Schwerpunkt teilt dann S die Strecke \overline{CO} im Verhältnis 2:1 und es ist $|OS| = \frac{1}{3} \cdot |OC| = \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot c) = \frac{1}{6} \cdot c$. Die *Spur von S* ist also ein Kreis mit Mittelpunkt O und dem Radius $\frac{1}{6} \cdot c$.

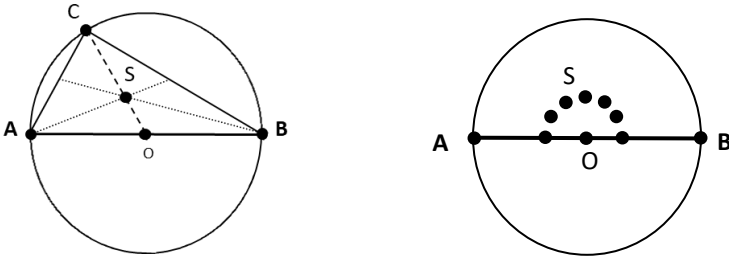


Abb. 3: Schwerpunkt S

e) Für die *Eckpunkte des Mittendreiecks* M_a, M_b, M_c gilt zunächst $M_c = O$.

Da M_a der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} ist, hat er die Koordinaten

$$x = u + \frac{1}{2} \cdot (\frac{c}{2} - u) = \frac{u}{2} + \frac{c}{4} \text{ und } y = \frac{v}{2}. \text{ Wegen } u^2 + v^2 = (\frac{1}{2} \cdot c)^2 \text{ gilt}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \cdot u^2 + \frac{1}{4} \cdot u \cdot c + (\frac{1}{4} \cdot c)^2 + \frac{1}{4} \cdot v^2 = \frac{1}{4} \cdot (u^2 + v^2) + \frac{1}{4} \cdot (u \cdot c + \frac{1}{4} \cdot c^2) = \frac{1}{8} \cdot c^2 + \frac{1}{4} \cdot u \cdot c$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{4} \cdot c)^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot c + \frac{1}{16} \cdot c^2 = \frac{1}{8} \cdot c^2 + \frac{1}{4} \cdot u \cdot c - \frac{1}{2} \cdot c \cdot (\frac{u}{2} + \frac{c}{4}) + \frac{1}{16} \cdot c^2 \\ &= \frac{1}{8} \cdot c^2 + \frac{1}{4} \cdot u \cdot c + \frac{1}{16} \cdot c^2 - \frac{1}{4} \cdot c \cdot u - \frac{1}{8} \cdot c^2 = (\frac{c}{4})^2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also als *Spur für M_a* ein Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{c}{4} | 0)$ und dem

Radius $\frac{c}{4}$. Sein Maximum für $C = (0 | \frac{c}{2})$ ergibt sich als $v = \frac{c}{4}$. Analog erhält

man als *Spur für M_b* einen Kreis mit Mittelpunkt $(-\frac{c}{4} | 0)$ und Radius $\frac{c}{4}$.

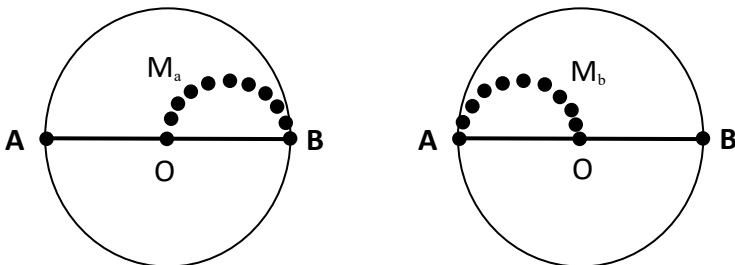


Abb. 4: Seitenmittelpunkte M_a und M_b

Veränderung von Seitenlängen, Höhen und Flächeninhalt

a) Die Länge von \overline{AB} ist konstant gleich c . Zur Bestimmung von $a(u)$ benutzen wir den Satz von Pythagoras und erhalten

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}c - u\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}c^2 - c \cdot u + u^2 + v^2 = \frac{1}{2}c^2 - c \cdot u \text{ wegen } u^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2.$$

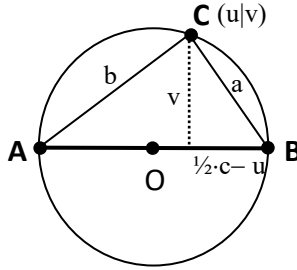


Abb. 5: Angaben zur Berechnung der Seitenlänge $a(u)$

Damit ist $a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot c^2 - c \cdot u}$ oder $a^2 + c \cdot u = \frac{1}{2} \cdot c^2$ bzw. $\frac{a^2}{\frac{1}{2}c \cdot c} + \frac{u}{\frac{1}{2}c} = 1$. Die Seitenlänge $a(u)$ verändert sich also von $a = c$ [für $u = -\frac{1}{2}c$] zu $a = 0$ [für $u = \frac{1}{2}c$] entlang eines *Parabelbogens*.

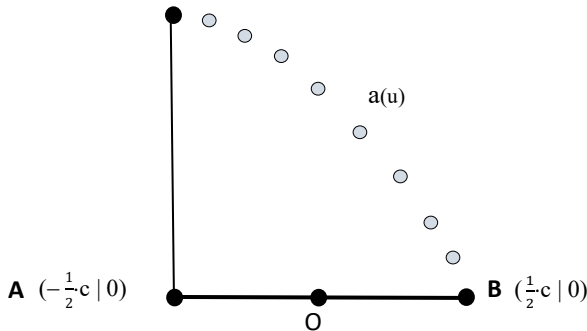


Abb. 6: Veränderung der Seitenlänge a

Wegen $b(u) = a(-u)$ sind die Graphen von $a(u)$ und $b(u)$ symmetrisch zur y -Achse, d. h. $b(u)$ verändert sich von 0 zu c entlang eines Parabelbogens, der aus $a(u)$ durch Spiegelung an der y -Achse entsteht.

b) Wegen $\gamma = 90^\circ$ ist $h_a = b$ und $h_b = a$. Da die Höhe h_c von C senkrecht auf der x -Achse steht, gilt offensichtlich $h_c = v$. Zusammen mit $u^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2$

haben wir dann $h_c(u) = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot c^2 - u^2}$ oder $h_c^2 + u^2 = \frac{1}{4} \cdot c^2$. Der Graph der Kurve $h_c(u)$ ist also identisch mit dem Thaleskreis.

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ergibt sich mit \overline{AB} als Grundlinie zu $A(u) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \cdot c^2 - u^2}$. Durch einfache algebraische Umformungen erhält man damit $\frac{A(u)^2}{\frac{c^2 \cdot c^2}{4 \cdot 4}} + \frac{u^2}{\frac{c \cdot c}{2 \cdot 2}} = 1$.

Eine solche Gleichung beschreibt bekanntermaßen eine Ellipse mit O als Mittelpunkt und den Halbachsen $\frac{1}{2} \cdot c$ und $\frac{1}{4} \cdot c^2$. (Für $c = 2$ ist die Ellipse identisch mit dem Thaleskreis.)

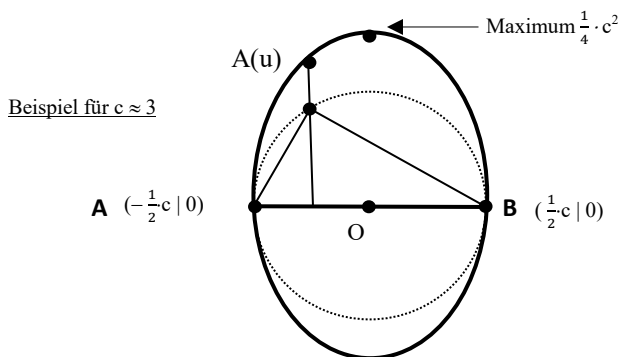


Abb. 7: Veränderung des Flächeninhalts $A(u)$

Variationen der Problemstellung

Eine Erweiterung der genannten Untersuchungen ergibt sich zunächst durch die Betrachtung weiterer besonderer Punkte.

- Die Eckpunkte A_1, B_1 der auf den Seiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke bewegen sich auf Kreisen durch O und A bzw. O und B , siehe Abb. 8. (Eine durch Berechnungen ermittelte Feststellung.)
- Der Fermat-Punkt (d. h. Schnittpunkt von A_1A und B_1B) bewegt sich auf einem Kreisbogen durch A und B , siehe Abb. 9. (Nur mit GeoGebra ermittelt.)
- Die Mittelpunkte M_a und M_b der Kathetenquadrate bewegen sich auf Kreisen. (Eine durch Berechnungen ermittelte Feststellung.)

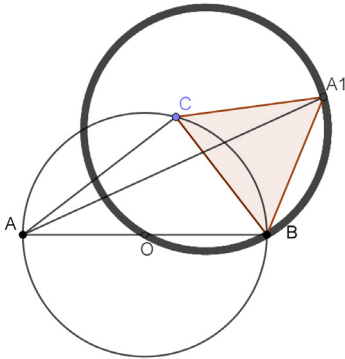


Abb. 8: Spur des Eckpunkt A_1 des aufgesetzten Dreiecks

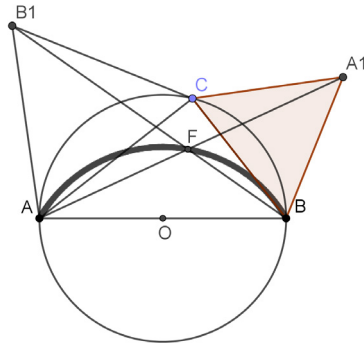


Abb. 9: Spur des Fermat-Punktes F

- Andere Punkte, deren Spuren man untersuchen könnte, wären etwa die Mittelpunkte der Ankreise, der Mittenpunkt (Schnittpunkt der drei Verbindungen von Mittelpunkten der Ankreise mit zugehörigen Seitenmittelpunkten), der Nagelpunkt (Schnittpunkt der drei Verbindungen von Berührungspunkten der Ankreise mit gegenüberliegenden Dreieckspunkten) oder der Napoleonpunkt (Schnittpunkt der drei Verbindungen von Schwerpunkt des aufgesetzten gleichseitigen Dreiecks mit gegenüberliegendem Dreieckspunkt).

Eine andere Erweiterung erfolgt durch den Übergang ins Dreidimensionale.

- Rotiert man die Ausgangsfigur um die x -Achse, so erhält man eine Thaleskugel über der Strecke \overline{AB} . Jeder Punkt C der Thaleskugel bildet dann mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck. Alle zugehörigen Inkreispunkte und Schwerpunkte erhält man aus den schon bekannten Kurven im zweidimensionalen Fall durch Rotation an der x -Achse, d. h. etwa für I ein Rotationskreissegment und für S eine kleine Innenkugel. Die Mittelpunkte der Seiten bilden ebenfalls kleine Kugeln.

Weitergehende Überlegungen werden dadurch angeregt, dass man sich im zweidimensionalen Fall vom Thaleskreis als Bahnkurve für C löst.

- Lässt man etwa C auf der y -Achse wandern, so erhält man stets gleichschenklige Dreiecke und die oben besprochenen besonderen Punkte wandern alle auf der y -Achse.
- Lässt man C auf einer Parallelen zur x -Achse wandern, so haben alle Dreiecke den gleichen Flächeninhalt, der Umkreismittelpunkt wandert auf der y -Achse und der Schwerpunkt wandert auf einer Parallelen zur x -Achse mit einem Drittel des Abstandes zur x -Achse.

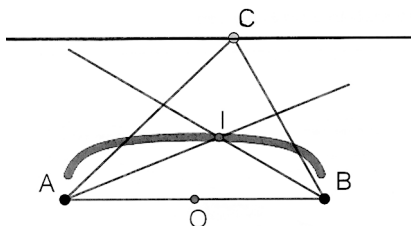


Abb. 10: Spur des Inkreismittelpunktes I mit C auf einer Parallelen zur x -Achse

- Lässt man C auf einer Geraden durch O wandern, so wandert der Schwerpunkt auch auf dieser Geraden und der Umkreismittelpunkt wandert auf der y -Achse.

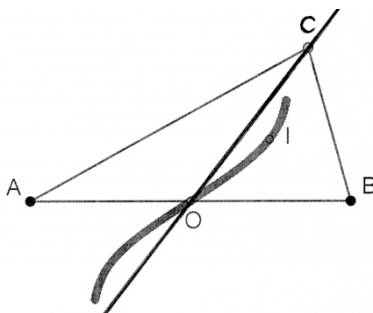


Abb. 11: Spur des Inkreismittelpunktes I , wenn C auf einer Geraden durch O wandert

- Lässt man C auf einem Kreisbogen durch A und B wandern, so haben (nach dem Umfangswinkelsatz) alle Dreiecke bei C das gleiche Winkelmaß.
- Weitere Kurven für C wären auch Ellipsen, die durch A und B verlaufen und O als Mittelpunkt haben, oder eine zur y -Achse symmetrische Parabel.

Spuren der Ecken eines Rechtecks, das ABC überdeckt und C als eine Ecke hat

Eine in der Schule oft verwendete Erzeugung des Thaleskreises ist die Folgende: Wählt man zwei feste Punkte A, B (etwa mit Nadeln fixiert) und schiebt in die Lücke zwischen diese beiden Punkte eine Ecke von einem (nicht zu kleinen) Rechteck (etwa einem DIN-A4-Blatt), so beschreibt aufgrund der Umkehrung des Satzes von Thales die obere Ecke C bei der Bewegung des Rechtecks einen Halbkreis, den Thaleskreis.

Auf welchen Spuren bewegen sich die drei anderen Ecken des Rechtecks? Diese Frage hatte ich vom Kollegen Alfst Nickelsen erhalten. Da mir keine Antwort bekannt war, habe ich die folgende Lösung produziert.

Wir wählen ein Koordinatensystem wie oben angegeben, wobei wir zusätzlich $|OA| = |OB| = 1$ setzen (d. h. $c = 2$ wählen); der Typ der Bahnkurve ändert sich dabei nicht, denn eine zentrische Streckung von O aus ändert nicht den Typ von Kurven.

Das Rechteck mit C als Ecke auf dem Thaleskreis möge R, S, T als weitere Ecken haben. Wir verschieben das Rechteck $CRST$ mit \overrightarrow{CO} und erhalten die Eckpunkte R', S', T', C' mit $C' = O$.

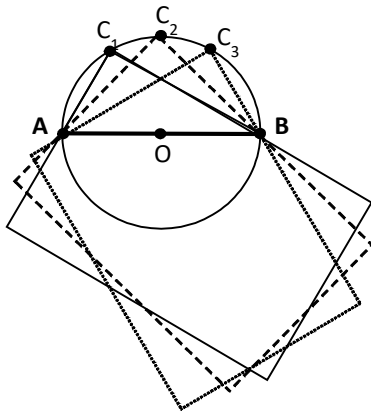


Abb. 12: Bewegen eines Rechtecks zwischen zwei festen Punkten

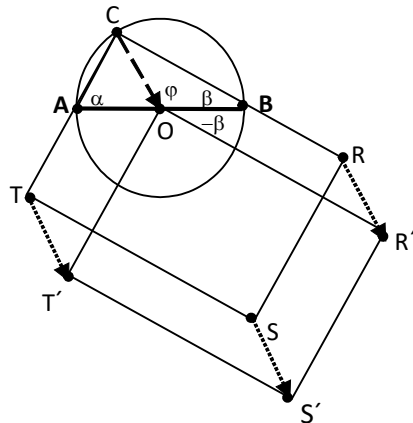


Abb. 13: Rechteck $CRST$ und verschobenes Rechteck $OR'S'T'$

Offensichtlich gilt mit Verwendung von $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC}$ dann:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OR'} - \overrightarrow{CO} \text{ bzw. } \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OR'} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'} - \overrightarrow{CO} \text{ bzw. } \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS'} - \overrightarrow{CO} \text{ bzw. } \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS'} + \overrightarrow{OC}$$

Außerdem setzen wir $|\overrightarrow{OR'}| = |\overrightarrow{CR}| = r$, $|\overrightarrow{OT'}| = |\overrightarrow{OT}| = t$, $|\overrightarrow{OS'}| = |\overrightarrow{CS}| = s$, wobei nach dem Satz von Pythagoras $s = \sqrt{r^2 + t^2}$ gilt. Damit das Rechteck nicht durch die Lücke von A und B rutscht, muss $r, t > 2$ gelten.

Wir wählen zunächst β als Parameter, der bei Wanderung von C auf dem Thaleskreis von A bis B die Werte 0° bis 90° annimmt. Wie oben gilt

$$\varphi = 180^\circ - 2 \cdot \beta = 2 \cdot \alpha, \quad \alpha = 90^\circ - \beta \text{ und } \cos \varphi = -\cos 2 \cdot \beta = \sin^2 \beta - \cos^2 \beta$$

sowie $\sin \varphi = \sin 2 \cdot \beta = 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta$.

Nach dem Wechselwinkelsatz ist das Winkelmaß von $\angle(BOR')$ gleichgroß zu dem Winkelmaß von $\angle(OBC)$, nur in umgekehrter Drehrichtung, also gleich $-\beta$. Damit erkennt man, dass sich beim Bewegen von C auf dem Thaleskreis der Vektor $\overrightarrow{OR'}$ um O dreht. Da die Länge $|\overrightarrow{OR'}|$ konstant ist, bewegt sich R' also auf einem Kreis um O mit dem Winkelmaß $-\beta$ von 0° bis -90° . Entsprechend bewegt sich T' auf einem Kreis um O mit Winkelmaß von -90° bis -180° . Der Vektor $\overrightarrow{OS'}$ bewegt sich aus dem gleichen Grund um O und zwar mit dem Winkelmaß $(-\sigma)$ bis $(-\sigma - 90^\circ)$, wobei $\sigma = |\angle(S'OR')$ ein festes (von r und t abhängiges) Winkelmaß ist mit $\cos \sigma = \frac{r}{s} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + t^2}}$ und $\sin \sigma = \frac{t}{s} = \frac{t}{\sqrt{r^2 + t^2}}$.

Aufgrund der Beschreibung von Drehungen um O (die wir hier als bekannt voraussetzen) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= (\cos \varphi | \sin \varphi) = (\cos (180^\circ - 2\beta) | \sin (180^\circ - 2\beta)) \\ &= (-\cos 2\beta | \sin 2\beta) = (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta | 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OR'} = (r \cdot \cos(-\beta) | r \cdot \sin(-\beta)) = (r \cdot \cos \beta | -r \cdot \sin \beta)$$

$$\overrightarrow{OT'} = (t \cdot \cos(-\beta - 90^\circ) | t \cdot \sin(-\beta - 90^\circ)) = (-t \cdot \sin \beta | -t \cdot \cos \beta)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS'} &= (s \cdot \cos(-\beta - \sigma) | s \cdot \sin(-\beta - \sigma)) \\ &= (s \cdot \cos \beta \cdot \cos \sigma - s \cdot \sin \beta \cdot \sin \sigma | -s \cdot \sin \beta \cdot \cos \sigma - s \cdot \cos \beta \cdot \sin \sigma) \\ &= (r \cdot \cos \beta - t \cdot \sin \beta | -r \cdot \sin \beta - t \cdot \cos \beta) \end{aligned}$$

Hinweis: Die Gleichung für $\overrightarrow{OS'}$ hätte man auch über $\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OR'} + \overrightarrow{OT'}$ erhalten können.

Durch Addition von \overrightarrow{OC} zu \overrightarrow{OR} bzw. \overrightarrow{OT} bzw. \overrightarrow{OS} erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (r \cdot \cos \beta + \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \mid -r \cdot \sin \beta + 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta) \\ \overrightarrow{OT} &= (-t \cdot \sin \beta + \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \mid -t \cdot \cos \beta + 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta) \\ \overrightarrow{OS} &= (r \cos \beta - t \sin \beta + \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \mid -r \sin \beta - t \cos \beta + 2 \sin \beta \cos \beta)\end{aligned}$$

Wir haben damit die Parameterdarstellung für die Bahnkurven von R , T und S erhalten; allerdings lässt sich an ihnen nicht einfach erkennen, um welche Typen von Kurven (Funktionsgraphen) es sich handelt.

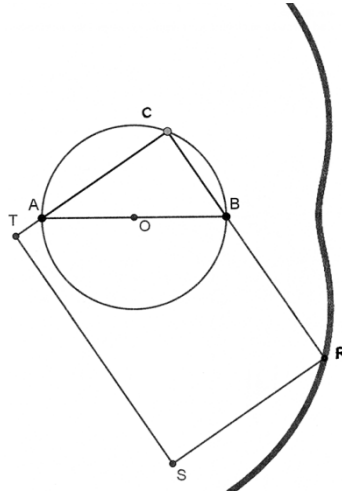


Abb. 14: Spur des Verlaufes von R (ermittelt mit GeoGebra)

Umwandlung der Parameterdarstellung von R in eine Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten x und y

Wir beginnen mit \overrightarrow{OR} und verwenden dabei die kartesischen Koordinaten x und y für \overrightarrow{OR} . Aufgrund der obigen Parameterdarstellung von \overrightarrow{OR} gilt

$$x = r \cdot \cos \beta + \sin^2 \beta - \cos^2 \beta \quad \text{und} \quad y = -r \cdot \sin \beta + 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta.$$

Der Versuch diese beiden Gleichungen in eine lineare oder quadratische Gleichung der Form $k_4 \cdot x^2 + k_3 \cdot x + k_2 \cdot y^2 + k_1 \cdot y + k_0 = 0$ (Gerade oder Kegelschnitt) zu bringen, führt zu keiner Gleichung, in der β eliminiert werden kann.

Wir versuchen deshalb, β auf andere Weise zu eliminieren, und zwar indem wir $\cos \beta$ (und damit auch $\sin \beta$) aus der Gleichung von x heraus ziehen und dann in die Gleichung von y einsetzen.

Zunächst ersetzen wir $\sin^2 \beta$ durch den Ausdruck $(1 - \cos^2 \beta)$ und erhalten $x = r \cdot \cos \beta + 1 - 2 \cdot \cos^2 \beta \Leftrightarrow \cos^2 \beta - \frac{r}{2} \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$, woraus sich ergibt:

$$\cos \beta = \frac{r}{4} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}}.$$

Mit dem Negativzeichen vor der Wurzel ist $\cos \beta$ immer eindeutig definiert, denn mit $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ gilt $(r - 1) \geq x \geq 1$ bzw. $-\frac{r-1}{2} \leq -\frac{x}{2} \leq -\frac{1}{2}$ und mit $0 \leq (\frac{r}{4} - 1)^2 = (\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{r-1}{2})$ folgt $0 \leq \frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{r^2}{16}$.

Damit ist einerseits $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}}$ immer reell und aufgrund der letzten Ungleichung folgt $0 \leq \frac{r}{4} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}} = \cos \beta$ und $\cos \beta = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}} \leq 1$ wegen $(\frac{r}{4} - 1)^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}$, so dass $\cos \beta$ immer definiert ist.

Weiterhin erhalten wir:

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}}}.$$

Setzt man die Ausdrücke für $\cos \beta$ und $\sin \beta$ in die obige Gleichung $y = -r \cdot \sin \beta + 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta$ ein, so erhält man

$$y = -\frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{x}{2}}$$

Will man hieraus eine Gleichung höheren Grades (ohne Wurzelausdrücke) ableiten, so muss man mehrfach sortieren und quadrieren und erhält schließlich:

Die Koordinaten x und y des Punktes R genügen der folgenden Gleichung vierten Grades:

$$y^4 - (2 + r^2) \cdot y^2 + 2 \cdot x^2 y^2 + x^4 - (2 + r^2) \cdot x^2 + 2r^2 \cdot x + (1 - r^2) = 0$$

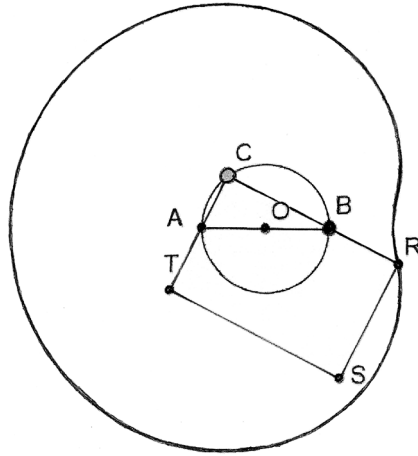


Abb. 15: Kurve der zu R gehörenden Gleichung vierten Grades für $r = 3$

Alternative Herleitung der impliziten Gleichung von R (ohne Trigonometrie)

Zunächst gilt, dass $(u|v)$ auf dem Thaleskreis mit $-1 \leq u \leq 1$ und $0 \leq v \leq 1$ liegt. Weiterhin ist B ein Punkt der Strecke \overline{CR} (d. h. die Steigung von R nach B ist die gleiche wie die Steigung von C nach B). Außerdem hat die Strecke \overline{CR} die konstante Länge r .

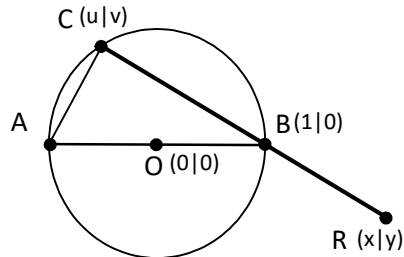


Abb. 16: Thaleskreis mit der Ecke R des eingeschobenen Rechtecks

Damit haben wir:

- (I) $u^2 + v^2 = 1$ bzw. $v^2 = 1 - u^2$ oder $v = \sqrt{1 - u^2}$
- (II) $(y - 0) : (x - 1) = (v - 0) : (u - 1)$
- (III) $(y - v)^2 + (x - u)^2 = r^2$ bzw. $y^2 - 2vy + x^2 - 2ux = r^2 - (v^2 + u^2)$

Zunächst ist klar, dass in (II) $u = 1$ nur mit $x = 1$ möglich ist. Nach (I) ist dann $v = 0$ und mit (III) folgt $y = \pm r$, d. h. der Sonderfall $u = 1$ ist wie zu erwarten gleichbedeutend mit $R = (1 | \pm r)$. Wir können deshalb mit $u \neq 1$, d. h. $(u - 1) \neq 0$ und $(x - 1) \neq 0$ weiterrechnen.

Dann ist (II) gleichbedeutend mit (IIa) $y \cdot (u - 1) = v \cdot (x - 1) = v \cdot x - v$ bzw. (IIb) $y = \frac{x \cdot v}{u - 1} - \frac{v}{u - 1}$ bzw. (IIc) $v = y \cdot \frac{u - 1}{x - 1}$.

Man kann nun (I) in (III) einsetzen und erhält

$$(IV) y^2 - 2v \cdot y + x^2 - 2ux = r^2 - 1.$$

Mittels einfacher Umformungen und erneuter Verwendung von (IIb) folgt

$$y^2 + x^2 + 2x - 2u = r^2 + 1.$$

In dieser Gleichung 2. Grades zwischen x und y ist aber immer noch der Parameter u enthalten. Um u nur noch abhängig von x und y zu erhalten, setzen wir (IIc) in (IV) ein und erhalten schließlich nach einigen Umformungen die gleiche implizite Gleichung vierten Grades wie oben.

Umwandlung der Parameterdarstellung von T in Gleichungen zwischen den kartesischen Koordinaten von T

Man kann in analoger Weise mit \overrightarrow{OT} beginnen und für die kartesischen Koordinaten x, y von \overrightarrow{OT} eine implizite Gleichung vierten Grades erhalten.

Man kann aber auch mit α anstatt β arbeiten und den an der y -Achse gespiegelten Fall zu R betrachten. Auf diese Weise erhält dann folgendes Ergebnis:

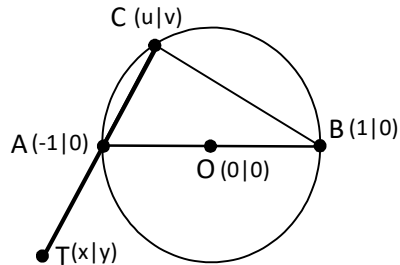


Abb. 17: Thaleskreis mit der Ecke T des eingeschobenen Rechtecks

Für die Koordinaten x, y von T ergibt sich ebenfalls eine Gleichung vierten Grades, die zu der Gleichung von R sehr ähnlich ist, nämlich:

$$y^4 - (t^2 + 2) \cdot y^2 + 2 \cdot y^2 x^2 + x^4 - (t^2 + 2) \cdot x^2 - 2 \cdot t^2 \cdot x + (1 - t^2) = 0$$

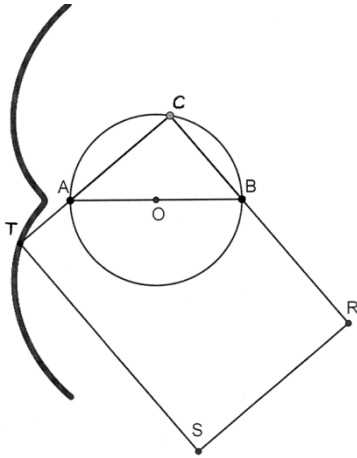


Abb. 18: Spur von T

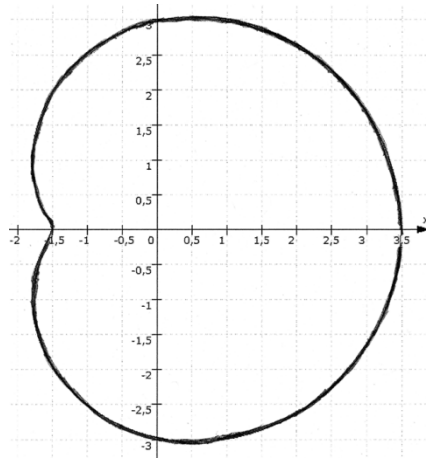


Abb. 19: Kurve zur Gleichung von T für $t = 2,5$

Umwandlung der Parameterdarstellung von S in Gleichungen zwischen den kartesischen Koordinaten von S

Es seien jetzt mit x, y die Koordinaten von \overline{OS} bezeichnet. Aus der Gleichung von \overline{OS} oben ergibt sich damit

$$x = r \cdot \cos \beta - t \cdot \sin \beta + \sin^2 \beta - \cos^2 \beta, \quad y = -r \cdot \sin \beta - t \cdot \cos \beta + 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta.$$

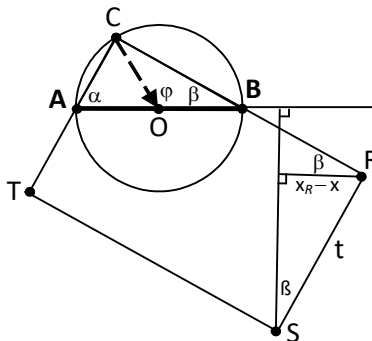


Abb. 20: Thaleskreis mit der Ecke S des eingeschobenen Rechtecks

Um darin $\sin \beta$ und $\cos \beta$ ersetzen zu können, stellen wir dazu zunächst drei Gleichungen auf, die sich an dem Rechteck $CRST$ orientieren und elementargeometrisch begründet sind.

(I) $\sin \beta = (x_R - x):t$ und $\cos \beta = (y_R - y):t$,

wobei $(x_R | y_R)$ die Koordinaten von R sind und $t = |RS|$ gilt.

(II) $(x_R - x)^2 + (y_R - y)^2 = t^2$ (wegen $|RS| = t$)

(III) $(y_R - y):(x_R - x) = -(x_R - 1):(y_R - 0)$ (wegen $CR \perp RS$)

Mittels mehrerer Umformungen und Einsetzungen erhält man zunächst

$$\sin \beta = -\frac{1}{2t} \cdot (y^2 + x^2 - t^2 - 1) + \frac{r}{2t} \cdot \sqrt{y^2 + x^2 - 2x + 1 - t^2} \text{ und}$$

$$\cos \beta = \frac{r}{4} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot y^2 + \frac{t^2+1}{4} + \frac{r}{2} \cdot \sqrt{y^2 + x^2 - 2x + 1 - t^2}}$$

Diese Ausdrücke können wir dann in die Gleichungen von x und y einsetzen. Nach umfangreichen, elementaren algebraischen Umformungen gelangt man zunächst zu einer Gleichung der folgenden Form:

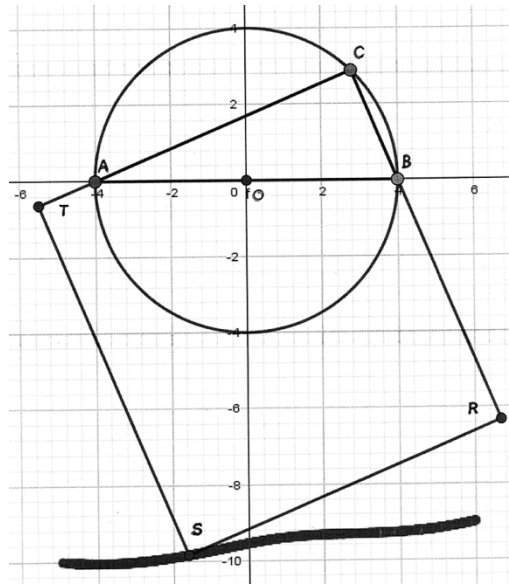
$$\left(\frac{r}{2t} \cdot \frac{1}{2t^2} \cdot (y^6 + x^6) + \dots\right) \cdot \sqrt{y^2 + x^2 - 2x + 1 - t^2} = \left(\frac{1}{4t^2}\right)^2 \cdot (y^8 + x^8) \dots,$$

wobei jeweils an Stelle der drei Punkte niedrigere Potenzen von x und y stehen.

Quadrieren wir nun beide Seiten, so ergeben sich auf der linken Seite der Gleichung die höchsten Terme in y und x mit y^{14} bzw. x^{14} und auf der rechten Seite der quadrierten Gleichung ergeben sich die höchsten Terme in x und y zu y^{16} und x^{16} . Niedrigere Potenzen können vermutlich noch zusammenfallen oder wegfallen, nicht aber diese höchsten Potenzen. Ob sich der gesamte geordnete Ausdruck noch durch einen Summenterm dividieren lässt ist nicht klar, aber eher unwahrscheinlich, so dass folgt:

Die Koordinaten x, y der Punktes S beschreiben vermutlich eine Gleichung der Ordnung 16.

Diese Ergebnisse bezüglich der Gleichungen für R, T, S sind vermutlich ein Grund dafür, dass ihre Bahnkurven bisher nicht behandelt wurden.

Abb. 21: Spur von S

Schlussbetrachtung

Der Satz des Thales ist ein Thema, das zum normalen Geometrieunterricht gehört. Aber ein guter Unterricht sollte auch zeigen, dass man oft neue interessante Aspekte finden kann, indem man das Thema aus einem anderen Blickwinkel betrachtet bzw. das gegebene Problem variiert. Dadurch erhalten die Schülerinnen und Schüler einen breiteren Einblick in die Mathematik und lernen, Probleme selbst zu finden.

Es ist nicht wichtig, welche anderen Aspekte oder Varianten verwendet werden. Aber die Schülerinnen und Schüler müssen aktiv sein, indem sie ein Problemfeld erforschen, und die Lehrerin bzw. der Lehrer muss den Schülerinnen und Schülern einen Handlungsspielraum geben, ohne sich an einen engen, festen Lehrplan zu halten. Eine solche Problembehandlung ist gut für eine evidenzbasierte Lehre (vgl. z.B. Hattie 2009 und Reiss & Bernhard 2014 sowie Polya 1949).

Der vorliegende Beitrag soll nur Anregungen geben. Die oben genannten Beispiele sind natürlich keine genaue Vorbereitung auf den Unterricht – und wollen es auch nicht sein.

Bezüglich der Jahrgangsstufe würde ich sagen, dass die eingangs genannten Themen in Klassen der Stufe 8 oder 9 (oder darüber hinaus) behandelt werden können. Die Themen über die Diagramme der Höhe und des Flächeninhalts sowie der Seitenlängen können in der Klasse 9 oder 10 (oder darüber hinaus) behandelt werden. Das letzte Thema über die Spuren mit Funktionen vom Grad 4 und höher sollte dann nur speziellen Schülern gegeben werden, wobei das Ergebnis mit allen Schülern diskutiert werden kann, damit auch Beispiele für einige Funktionen höheren Grades eine Bedeutung erhalten.

Literatur

- Graumann, G. (2011). Reflecting Problem Orientation in Mathematics Education within Teacher Education. In: Paditz, L. & Rogerson, A. (Eds.) MEC21 - Proceedings of the 11th International Conference: *Turning Dreams into Reality: Transformations and Paradigm Shifts in Mathematics Education* – Grahamstown, South Africa, September 11-17, 2011, S. 116 – 121.
Einzusehen auch unter: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-82503>.
- Graumann, G. (2015). Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts eingebettet in ein ganzheitliches Konzept von Menschenbildung. In: *mathematica didactica*, Themenheft 2015 „Mathematik und Bildung“, 38. Jahrgang, 2015, Heft 1, Franzbecker: Hildesheim, S. 92 -110.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London.
- KMK [Kultusministerkonferenz] (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Bonn.
- KMK [Kultusministerkonferenz] (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Bonn.
- Polya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*, New York.
- Reiss, K. & Bernhard, M. (2014). Hatties Visible Learning im Kontext der Mathematikdidaktik. In: Terhart (Ed.). *Die Hattie-Studie in der Diskussion*, Seelze.
- Schupp, H. (2000). Geometrie in der Sekundarstufe II. In: *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)* 21, No. 1, S. 50-66.

Erkenntnisgewinn durch Perspektivwechsel: Die Pellsche Gleichung

Hartmut Müller-Sommer

Zusammenfassung. In diesem Beitrag wird die Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ in den Blick genommen. Sie hat in der Geschichte der Zahlentheorie eine besondere Bedeutung. Eine Veränderung der Perspektive auf die Lösungen dieser Gleichung führt zu einer (vielleicht neuen) geometrischen Interpretation dieser Lösungen und deckt überraschende Zusammenhänge zum Dreieckssatz von Stewart und zum Kreis des Apollonius auf.

Einleitung

Eine Gleichung der Form $x^2 - dy^2 = 1$ wird Pellsche Gleichung genannt. Dabei ist d eine nicht quadratische natürliche Zahl. Gesucht sind alle positiven ganzzahligen Lösungen x und y . Die Namensgebung ist auf ein Versehen von Euler zurückzuführen, der die Behandlung dieser Gleichung irrtümlicherweise dem englischen Mathematiker John Pell (17. Jh.) zuschrieb.

Eigentlich müsste die Gleichung nach dem indischen Mathematiker Brahmagupta (7. Jh.) oder nach Fermat (17. Jh.) benannt werden, denn sie waren die ersten, die sie systematisch behandelten. Fermat und Brahmagupta entwickelten Methoden zum Lösen der Gleichung für bestimmte Werte von d , konnten aber nicht nachweisen, dass ihre Methode auch in anderen Fällen zum Ziel führt.

Bereits 400 Jahre vor unserer Zeitrechnung traten solche Gleichungen in der griechischen Mathematik auf, insbesondere die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ bei der Suche nach möglichst genauen rationalen Näherungswerten für $\sqrt{2}$.

Für Lösungen $(x; y)$ mit großen Werten x, y strebt nämlich der Quotient $\frac{x}{y}$ gegen \sqrt{d} :

$$x^2 - dy^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \sqrt{d + \frac{1}{y^2}} \approx \sqrt{d}.$$

Neben der trivialen Lösung $x = 1$ und $y = 0$ gibt es für die Pellsche Gleichung unendlich viele weitere Lösungen. Die kleinste Lösung $(x_1; y_1)$ mit $y_1 > 0$ wird als Fundamentallösung bezeichnet. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ die Fundamentallösung $(3; 2)$. Für die Fundamen-

tallösungen sind keinerlei Regelmäßigkeiten erkennbar. Kleine Veränderungen von d können zu großen Unterschieden bei den Fundamentallösungen führen.

Beispiel: $d = 60$: $x_1 = 31$, $y_1 = 4$; $d = 61$: $x_1 = 1.766.319.049$,
 $y_1 = 226.153.980$

Aus der Fundamentallösung $(x_1; y_1)$ ergeben sich *alle* weiteren Lösungen $(x_n; y_n)$ durch $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ (vgl. Burton et al. 2005, S. 374).

Die Fundamentallösung lässt sich mit der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{d} ermitteln. Dabei kann die konkrete Berechnung sehr aufwendig sein, da die Zahlen der Fundamentallösung unerwartet groß sein können.

Euler und Lagrange entwickelten ein Jahrhundert nach Fermat die Theorie der Kettenbrüche und leisteten damit wichtige Beiträge zur Lösung der Pellschen Gleichung. Lagrange veröffentlichte 1768 den ersten strengen Beweis dafür, dass sich alle Lösungen der Pellschen Gleichung aus der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{d} ergeben. Dabei findet man die Lösungen als Zähler und Nenner bestimmter Näherungsbrüche von \sqrt{d} .

Die nachfolgenden Überlegungen zeigen, dass uns der Dreieckssatz von Stewart einen überraschenden geometrischen Zugang zu den Lösungen der Pellsche Gleichung eröffnet.

Der Satz von Stewart

Der folgende Satz ist benannt nach dem schottischen Mathematiker Matthew Stewart (1717-1785), der ihn 1746 veröffentlichte. Der Satz wird häufig benutzt, um die Länge von Eckentransversalen im Dreieck zu bestimmen. Seine Bedeutung ist damit aber bei Weitem nicht ausgeschöpft. Dörrie schreibt 1950:

„Einer der wichtigsten metrischen Sätze der ebenen Geometrie ist der viel zu wenig bekannte Satz von Stewart.“ (Dörrie 1950, S. 346)

Satz: In einem Dreieck ABC teile die Eckentransversale CT die gegenüberliegende Seite AB in die Abschnitte $|AT| = m$ und $|TB| = n$. Dann gilt:

$$ma^2 + nb^2 = c(t^2 + mn).$$

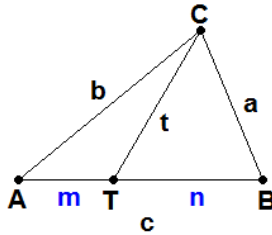


Abb. 1: Satz von Stewart

Die Winkel $\angle BTC = \varphi$ und $\angle CTA = 180^\circ - \varphi$ sind Supplementwinkel, d. h. es gilt $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$. Zum Beweis dieses Satzes wendet man den Kosinussatz auf die Dreiecke TBC und ATC an und gelangt so nach wenigen Umformungen unter Beachtung der Kosinus-Beziehung zur Gleichung von Stewart.

In der Literatur erscheint dieser Satz als „statischer“ Satz. Sein dynamischer Charakter wird aber erkennbar, wenn wir Abbildung 1 aus einem veränderten Blickwinkel betrachten und uns den Dreieckspunkt C beweglich vorstellen: Für alle Dreieckspunkte C auf einem Kreis um T ist $ma^2 + nb^2$ konstant. Die Konstante hängt bei festen Punkten A , B und T nur vom Radius t ab und ist durch $c(t^2 + mn)$ gegeben.

Spezialfälle

Gilt $m = n = \frac{1}{2}c$, so liegen die Kreise um T mit dem Radius t konzentrisch zum Thaleskreis über AB . Multiplizieren wir die Gleichung von Stewart mit $\frac{1}{2}c$, so erhalten wir $a^2 + b^2 = 2 \left(t^2 + \frac{1}{4}c^2 \right) = 2t^2 + \frac{1}{2}c^2$. Für alle Punkte C auf einem solchen Kreis ist also $a^2 + b^2$ konstant (Abb. 2a)! Dieser Satz wurde bereits vom persischen Mathematiker Al-Sijzī um 980 n. Chr. angegeben und bewiesen (Hogendijk, 1996).

Wählt man zusätzlich auch $t = \frac{1}{2}c$, so ist der Kreis um T der Thaleskreis über AB . Der Satz von Stewart geht dann über in den pythagoreischen Satz $a^2 + b^2 = c^2$ (Abb. 2b). In Abbildung 2 sind auch die zugehörigen Flächenaussagen veranschaulicht.

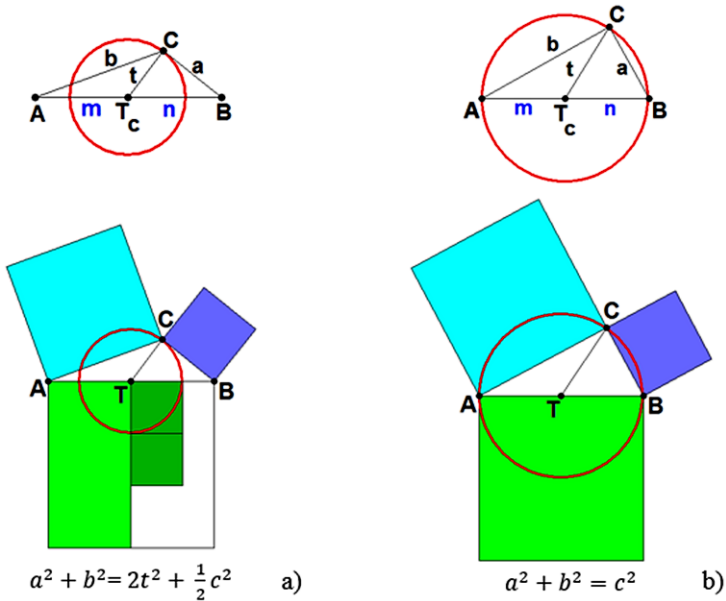


Abb. 2: Spezialfälle: a) der Satz von Al-Sijzī, b) der Satz des Pythagoras

Wählen wir $m = t = \frac{1}{4}c$ und $n = \frac{3}{4}c$, so liefert der Satz von Stewart die Gleichung $a^2 + 3b^2 = c^2$ (Abb. 3a). Für $m = \frac{1}{4}c$, $n = \frac{3}{4}c$ und $t = \frac{\sqrt{5}}{4}c$ erhalten wir $a^2 + 3b^2 = 2c^2$ (Abb. 3b).

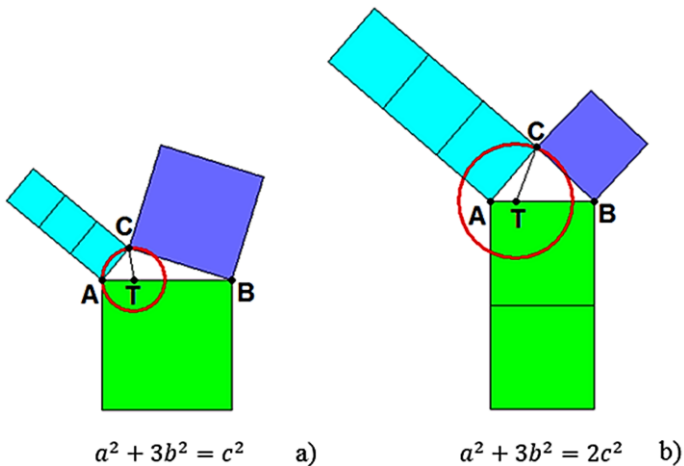


Abb. 3: Veranschaulichung weiterer Spezialfälle

Der Satz von Stewart und die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$

In Abbildung 4 liegt der Punkt T außerhalb der Strecke AB . Richten wir nun einen leicht veränderten Blick auf diese Figur und wenden den Satz von Stewart auf das Dreieck TBC an, so erhalten wir die Beziehung

$$ma^2 + nt^2 = (m + n)(b^2 + mn).$$

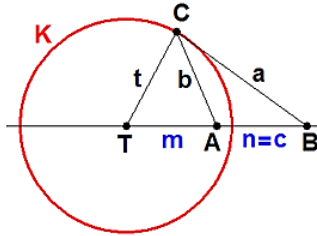


Abb. 4: T liegt außerhalb von AB .

Gilt außerdem $m = n$, wie in Abbildung 4, so folgt

$$a^2 + t^2 = 2b^2 + 2m^2 \iff a^2 - 2b^2 = 2m^2 - t^2.$$

Für alle Dreieckspunkte C auf dem Kreis K ist also $a^2 - 2b^2$ konstant und nimmt den Wert $2m^2 - t^2$ an. Wählen wir nun zusätzlich $m = n = t = 1$, so gilt $a^2 - 2b^2 = 1$ für alle Punkte C auf dem Einheitskreis um T_0 (Abb. 5). Wir bezeichnen diesen Kreis mit K_0 . Durch die weiteren Untersuchungen wird die gewählte Indizierung nachträglich auch eine konkrete inhaltliche Bedeutung erhalten.

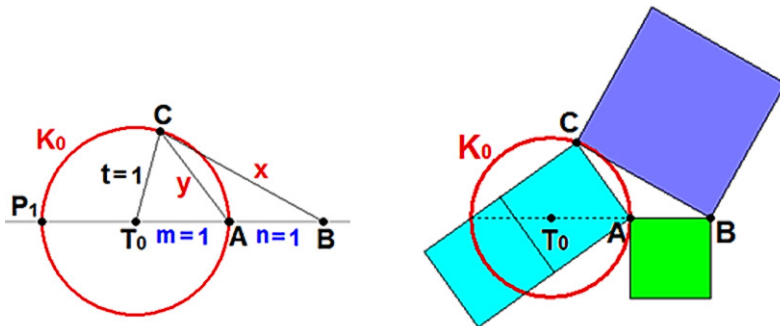


Abb. 5: Für alle Punkte C auf K_0 gilt $x^2 - 2y^2 = 1$.

Damit haben wir eine **veränderte Perspektive** auf die Lösungen der Pell'schen Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ hergestellt! Die *ganzzahligen Seitenlängen* x und y des Dreiecks ABC in Abbildung 5 sind offenbar Lösungen der Pell'schen Gleichung.

Wir suchen diejenigen Dreieckspunkte C auf dem Kreis K_0 in Abbildung 5, die zu solchen ganzzahligen Seitenlängen führen. Für $C = A$ ergibt sich offenbar die triviale Lösung $(x_0; y_0) = (1; 0)$. Auf K_0 liegt nur noch ein weiterer Punkt mit der geforderten Eigenschaft: Es ist der linke Schnittpunkt P_1 des Kreises K_0 mit der Geraden AB ; er liefert die Fundamentallösung $(x_1; y_1) = (3; 2)$. Angespornt durch die neue geometrische Deutung suchen wir nach weiteren Lösungen der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$.

Wir gelangen zu größeren Lösungen, indem wir einen neuen (größeren) Kreis K_1 konstruieren, dessen *rechter* Schnittpunkt mit AB nun zur Fundamentallösung $(x_1; y_1) = (3; 2)$ führt und daher ebenfalls mit P_1 bezeichnet wird. Hierzu vergrößern wir die Dreiecksgrundseite AB , indem wir den Punkt A festhalten und den Punkt B so weit nach rechts auf den Punkt B_1 verschieben, bis die neue Grundseite AB_1 die Länge $x_1 + y_1 = 5$ erreicht. Der *rechte* Schnittpunkt P_1 von K_1 wird dann so in das Innere von AB_1 gelegt, dass gilt $|AP_1| = y_1 = 2$ und $|P_1B_1| = x_1 = 3$. Wie in den Abbildungen 4 und 5 muss dann der Mittelpunkt T_1 des neuen Kreises K_1 die Bedingung $|T_1A| = |AB_1| = 5$ erfüllen. K_1 hat daher den Radius $t_1 = |T_1A| + |AP_1| = 5 + 2 = 7$ (Abb. 6).

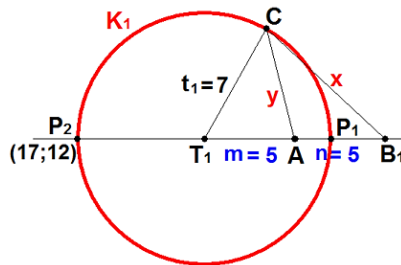


Abb. 6: Konstruktion von K_1 und $(x_2; y_2) = (17; 12)$

Für alle Punkte C auf K_1 ist nach der obigen Herleitung $x^2 - 2y^2$ konstant. Da aber der rechte Schnittpunkt P_1 nach Voraussetzung die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ erfüllt, gilt dies auch für alle Punkte C auf dem Kreis K_1 .

Es gibt auf K_1 nur noch einen weiteren Punkt C , der zu Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen x und y führt. Dies ist der linke Schnittpunkt P_2 mit der Geraden AB_1 ; er liefert die Lösung $(x_2; y_2) = (17; 12)$. Damit ist die Konstruktion der weiteren Lösungen vorgezeichnet: Man konstruiert wieder einen größeren Kreis K_2 und eine größere Dreiecksseite AB_2 der Länge $x_2 + y_2 = 29$, legt den rechten Schnittpunkt P_2 von K_2 , der zur Lösung $(x_2; y_2)$ führte, in das Innere von AB_2 und bestimmt in analoger Weise Mittelpunkt und Radius von K_2 .

Die so definierte Folge von Kreisen K_n führt zu einer Folge von Schnittpunkten P_{n+1} mit der Geraden AB_n , die wir als ganzzahlige Lösungen $(x_{n+1}; y_{n+1})$ der Pellischen Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ deuten können, da hier stets ganzzahlige Streckenlängen addiert werden.

Wir werden weiter unten erkennen, dass mit diesem „Schnittpunktverfahren“ tatsächlich *alle* Lösungen der Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ erfasst werden. Interessanterweise erhält hier auch die triviale Lösung $(1; 0)$, die in der Theorie der Pellischen Gleichung eigentlich keine Rolle spielt, eine konkrete geometrische Bedeutung: Diese Lösung wird durch den rechten Schnittpunkt $A = P_0$ des Kreises K_0 dargestellt.

Lösungen der Pellischen Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$

Anknüpfend an die Untersuchungen im letzten Abschnitt erhalten wir aus der Gleichung $mx^2 + nt^2 = (m + n)(y^2 + mn)$ für $m = \frac{n}{2}$ die Beziehung

$$x^2 + 2t^2 = 3(y^2 + mn) \iff x^2 - 3y^2 = \frac{3}{2}n^2 - 2t^2.$$

Wählen wir zusätzlich $n = 1$ und $t = m = \frac{1}{2}$, so folgt $x^2 - 3y^2 = 1$ für alle Dreieckspunkte C auf dem Kreis K_0 (Abb. 7).

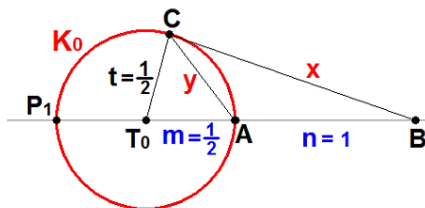


Abb. 7: Geometrische Konstruktion zur Fundamentallösung $(x_1; y_1) = (2; 1)$

Der Punkt A in Abb. 7 lässt sich als triviale Lösung $(x_0; y_0) = (1; 0)$ deuten und der linke Schnittpunkt P_1 liefert uns wieder die Fundamentallösung, in diesem Fall $(x_1; y_1) = (2; 1)$. Das im letzten Abschnitt beschriebene „Schnittpunktverfahren“ führt uns auch in diesem Fall zu weiteren Lösungen. Unter Beachtung der Vorgabe $m = \frac{n}{2}$ bzw. $|T_n A| = \frac{1}{2} |AB_n|$ kann sich der Leser leicht davon überzeugen, dass mit $(x_2; y_2) = (7; 4)$ und $(x_3; y_3) = (26; 15)$ zwei weitere Lösungen der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ gegeben sind (Abb.8).

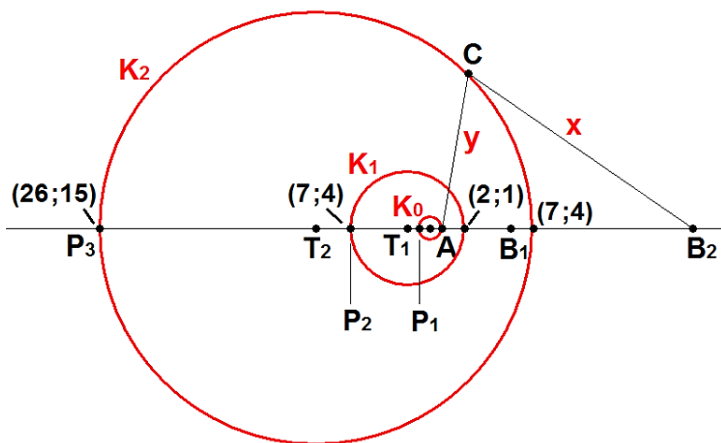


Abb. 8: Das Schnittpunktverfahren für die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$, dargestellt am Beispiel der Kreise K_0 , K_1 und K_2

Auch hier wird sich zeigen, dass es neben den Schnittpunkten der Kreise K_n keine weiteren Kreispunkte gibt, die zu Lösungen der Pellschen Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ führen.

Rekursionsgleichungen

Das Schnittpunktverfahren übertragen wir nun auf die allgemeine Pellsche Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$. Wir gehen von der Lösung $(x_n; y_n)$ aus und berechnen hieraus die Lösung $(x_{n+1}; y_{n+1})$. Sie ergibt sich aus dem linken Schnittpunkt P_{n+1} des Kreises K_n mit der Geraden AB_n (Abb. 9).

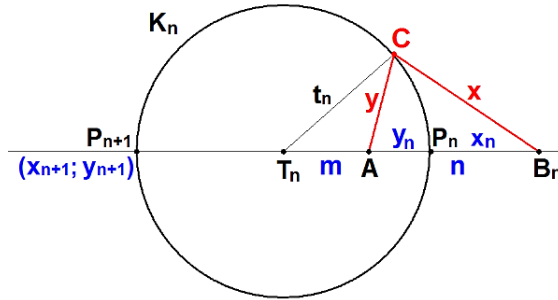


Abb. 9: Herleitung der Rekursionsgleichungen

Die Grundseite des Dreiecks $AB_n C$ hat nach Konstruktionsvoraussetzung die Länge $|AB_n| = n = x_n + y_n$ und für den inneren Punkt P_n gilt $|AP_n| = y_n$ und $|P_n B_n| = x_n$.

Mit der Wahl von $m = \frac{n}{d-1}$ wird der Mittelpunkt T_n des Kreises K_n festgelegt und erreicht, dass auf der linken Seite der umgeformten Gleichung von Stewart der Term $x^2 - dy^2$ auftritt. Wählen wir den Radius $t_n = m + y_n$, so verläuft K_n durch den Punkt P_n . Für alle Punkte $C \in K_n$ ist dann $x^2 - dy^2$ konstant. Da aber der Punkt P_n nach Voraussetzung die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ erfüllt, gilt dies auch für *alle* Punkte $C \in K_n$.

Aus $x_{n+1} = 2t_n + x_n$ und $y_{n+1} = x_{n+1} - x_n - y_n$ erhalten wir die Rekursionsgleichungen

$$x_{n+1} = px_n + (p+1)y_n \quad \text{und} \quad y_{n+1} = (p-1)x_n + py_n \quad (1)$$

mit $p = \frac{d+1}{d-1}$ und $n = 0, 1, 2, \dots$

Die beiden Gleichungen lassen sich mithilfe der Matrix-Schreibweise zusammenfassen:

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ p-1 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}_n = M_d^n \cdot \vec{x}_0 \quad (2)$$

Dabei ist $M_d = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ p-1 & p \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mit Gleichung (2) lassen sich die Lösungen schnell berechnen. Die beiden folgenden Tabellen zeigen einige Ergebnisse für $d = 2$ und $d = 3$.

$$d = 2: M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

n	0	1	2	3	4	5	...
x_n	1	3	17	99	577	3363	...
y_n	0	2	12	70	408	2378	...
x_n/y_n	-	1,5	1,41667	1,41429	1,41422	1,41421362	...

$$d = 3: M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \sqrt{3} = 1,73205080 \dots$$

n	0	1	2	3	4	5	6	...
x_n	1	2	7	26	97	362	1351	...
y_n	0	1	4	15	56	209	780	...
x_n/y_n	-	2	1,75	1,733	1,73214	1,732057	1,732051	...

Abb. 10: Ergebnisse des Schnittpunktverfahrens für $d = 2$ und $d = 3$

Wie bereits in der Einleitung erklärt, streben die Quotienten x_n/y_n mit wachsendem n jeweils (von oben her) gegen \sqrt{d} . Die Ergebnisse in den Tabellen bestätigen dies.

Die Annäherung von $\frac{x}{y}$ an \sqrt{d} gilt selbstverständlich nicht nur für die ganzzahligen Lösungen der Pellischen Gleichung. Wird beispielsweise für den Fall $d = 3$ der Punkt C auf dem Kreis K_2 langsam vom rechten Schnittpunkt P_2 mit der Lösung $(7; 4)$ in Richtung des linken Schnittpunktes P_3 mit der Lösung $(26; 15)$ bewegt, so lässt sich mit einem DGS die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$ sehr schön beobachten: Ausgehend vom Wert 1,75 nähert er sich allmählich dem Wert $\frac{26}{15} \approx 1,733$ an.

Auch für Werte $d > 3$ erzeugen die Rekursionsgleichungen Lösungen der Pellischen Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$. Diese Lösungen sind zwar rational, aber in der Regel nicht mehr ganzzahlig, da auch die Koeffizienten p nicht mehr ganzzahlig sind. Vom Ansatz her liefert unser Verfahren als Lösungen stets die Abstände der *Schnittpunkte* P_{n+1} von den Punkten B_n und A : $x_{n+1} = |P_{n+1} B_n|$ und $y_{n+1} = |P_{n+1} A|$. Andere Punkte auf den Kreisen K_n , die ja auch die Pellische Gleichung erfüllen, werden damit gar nicht erfasst!

Unsere geometrische Deutung liefert jedoch insgesamt eine Lagebeschreibung der „Lösungspunkte“ und zeigt, dass es zu *jeder* ganzzahligen Lösung der Pellischen Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ einen ganz bestimmten Lösungspunkt C auf einem ganz bestimmten Kreis K_n geben muss.

Beispiel: Für den Fall $d = 7$ ist $(8; 3)$ die Fundamentallösung. Diese Lösung wird aber in unserem Verfahren beim Schritt von P_3 nach P_4 „übersprungen“, denn mit $M_7 = \begin{pmatrix} 4/3 & 7/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 23/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 \approx \begin{pmatrix} 5,5 \\ 2,0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 12,1 \\ 4,5 \end{pmatrix}.$$

Folglich muss der Lösungspunkt C der Fundamentallösung $(8; 3)$ auf dem Kreis K_3 liegen, was sich experimentell mit einem DGS bestätigen und auch rechnerisch nachweisen lässt (Abb. 11).

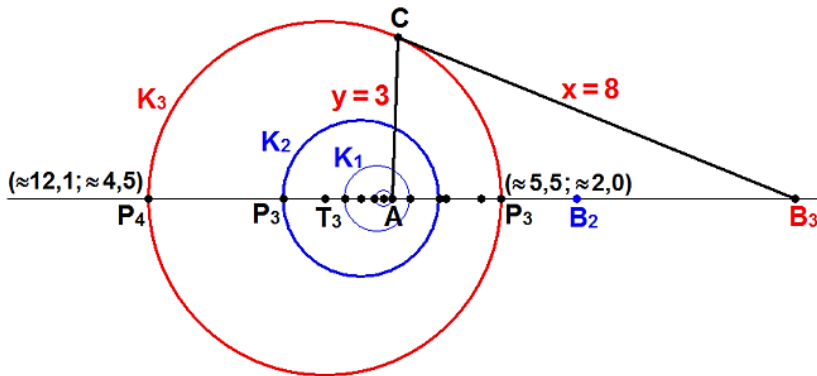


Abb. 11: $x^2 - 7y^2 = 1$: Der Lösungspunkt von $(8; 3)$ liegt auf K_3 .

Den Lösungspunkt der nachfolgenden Lösung $(127; 48)$ finden wir erst wieder auf dem Kreis K_6 in der Nähe des linken Schnittpunktes P_7 .

Rückblick und Ausblick

Es ist eigentlich überraschend, dass sich für die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ scheinbar *alle* Lösungen der Pellischen Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ aus den *Schnittpunkten* der Kreise K_n , ableiten lassen. Zu begründen wäre aber noch, dass es tatsächlich keine weiteren Kreispunkte gibt, die zu Lösungen

der Gleichung führen. Unsere Argumentation stützt sich dabei auf einen Satz aus der Theorie der Pellischen Gleichung, der bereits in der Einleitung erwähnt wurde:

Satz: Ist $(x_1; y_1)$ die Fundamentallösung der Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$, so erhält man alle weiteren positiven ganzzahligen Lösungen aus der Gleichung

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Dass die durch Gleichung (3) erzeugten Zahlenpaare $(x_n; y_n)$ wieder Lösungen der Pellischen Gleichung sind, lässt sich durch vollständige Induktion zeigen. Der Nachweis, dass es neben diesen Lösungen aber keine weiteren gibt, ist nicht trivial. Auf einen Beweis müssen wir hier verzichten (vgl. Burton et al. 2005, S. 374).

Aus (3) lassen sich Rekursionsgleichungen für x_{n+1} und y_{n+1} ableiten:

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^n \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) \\ &= (x_1x_n + dy_1y_n) + (y_1x_n + x_1y_n)\sqrt{d} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf

$$x_{n+1} = x_1x_n + dy_1y_n \quad \text{und} \quad y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Für $d = 2$ und $d = 3$ geht (4) über in

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n \quad \text{und} \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

bzw. $x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$ und $y_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Von den unterschiedlichen Startwerten abgesehen stimmen diese Rekursionsgleichungen offensichtlich für die Fälle $d = 2$ und $d = 3$ mit unseren Rekursionsgleichungen (2) überein! Dies bedeutet: Unser Schnittpunktverfahren liefert für diese Fälle tatsächlich *alle* Lösungen!

Eine Besonderheit tritt beim Fall $d = 5$ auf: Hier stellt (9; 4) die Fundamentallösung dar und Gleichung (4) liefert daher

$$x_{n+1} = 9x_n + 20y_n \quad \text{und} \quad y_{n+1} = 4x_n + 9y_n.$$

Mit dem Schnittpunktverfahren erhalten wir aber für die dritte Potenz der Matrix M_5 die gleichen Koeffizienten: $M_5^3 = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. Unser Verfahren liefert somit auch für $d = 5$ alle Lösungen, allerdings erst nach jeweils drei „Sprüngen“.

Die Tatsache, dass sich der Quotient $\frac{x}{y}$ für große Lösungen x und y immer mehr dem Wert von \sqrt{d} annähert, liefert noch nebenbei eine schöne geometrische Entdeckung: Die Kreise K_n stellen näherungsweise *Apolloniuskreise* bezüglich der Strecken AB_n dar, d. h., die Punkte P_n und P_{n+1} teilen dabei die Strecke AB_n annähernd harmonisch. Es gilt demnach $|P_n B_n| : |AP_n| \approx |P_{n+1} B_n| : |P_{n+1} A|$ bzw. $x_n : y_n \approx x_{n+1} : y_{n+1}$. Und mit wachsender Schrittzahl n wird diese Näherung immer besser. Dann ist auch der Quotient $\frac{x}{y}$ für einen Kreis K_n praktisch konstant. Die Strecke CP_n ist somit näherungsweise die Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \angle ACB_n$ und CP_{n+1} näherungsweise die Winkelhalbierende des dazugehörigen Nebenwinkels. Abbildung 12 veranschaulicht diesen Sachverhalt für die Pell'sche Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ am Beispiel der Kreise K_1 und K_2 .

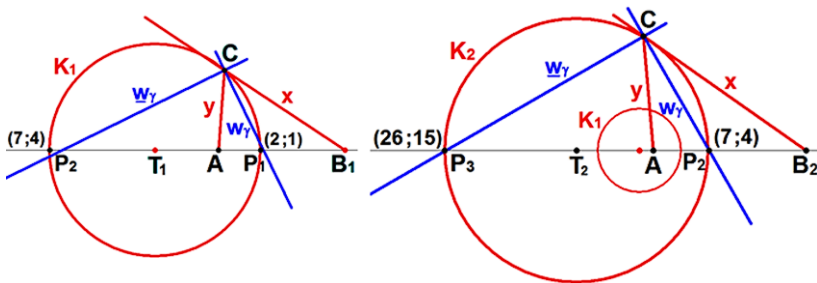


Abb. 12: Die Kreise K_1 und K_2 als Quasi-Apolloniuskreise

Literatur

- Burton, D. M., Dalkowski, H. (2005). Handbuch der elementaren Zahlentheorie, Heldermann Verlag.
- Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.(1983). Zeitlose Geometrie, Klett Studienbücher.
- Dörrie, H. (1950). Ebene und sphärische Trigonometrie, Verlag Oldenburg.
- Hogendijk, J.P. (1996). al-Sijzī's Treaties on Geometrical Problem solving, Fatemi Publishing & Co. Teheran.

Weil, A. (1992). Zahlentheorie – Ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre, Birkhäuser.

Vom Bildungswert der Dualität¹

Klaus Volkert

Zusammenfassung. Der nachfolgende Artikel behandelt einige Aspekte der Dualität im Bereich der Polyedertheorie und der projektiven Geometrie. Er möchte an Hand von Beispielen zeigen, dass auch ohne eine tiefgreifende Behandlung der projektiven Geometrie interessante Fragen behandelt werden können, die einen adäquaten Eindruck vom Dualitätsprinzip und seiner Nützlichkeit geben. Schließlich fragen wir, worin denn der Bildungswert der Dualität bestehen könnte.

Im Vorwort zur „Geometrie der Lage“, dem 1847 erschienen Hauptwerk Karl Christian von Staudts (1798–1867), findet sich folgende bemerkenswerte Passage:

Wenn es für den Geübtern keine Uebung mehr ist, zu dem einen von zwei reciproken Sätzen den andern zu suchen, so ist diess doch für den Anfänger eine zweckmässige Aufgabe, welche ihn veranlasst, durch eigene Thätigkeit Gebilde zur Anschauung zu bringen. Dass aber das Gesetz der Reciprocität jeden für die Geometrie empfänglichen Schüler mehr anrege, als irgend ein einzelner Satz, wird jeder Lehrer erfahren, der seine Schüler auf dasselbe aufmerksam macht. Vielleicht wird diese Schrift einige Lehrer bestimmen, ihrem Unterrichte in der Geometrie des Masses das Wesentliche aus der Geometrie der Lage voranzuschicken, damit ihre Schüler gleich Anfangs denjenigen Ueberblick über die Wissenschaft gewinnen, ohne welchen das rechte Verständniss der einzelnen Sätze und ihrer Beziehung zum Ganzen nicht wohl möglich ist.²

Nun denkt man vielleicht, es handele sich hier um einen der vielen weltfremden Vorschläge von Universitätsprofessoren zur Verbesserung des Mathematikunterrichts. Dem ist aber nicht so. Nach Abschluss seines Studiums in Göttingen bei Gauß wurde von Staudt 1822 Mathematiklehrer am Gymnasium in Würzburg, 1827 wechselte er nach Nürnberg, wo er am Gymnasium und an der polytechnischen Schule unterrichtete. Erst 1835 – also nach rund 13 Jahren Schuldienst – erfolgte seine Berufung nach Erlangen – trotz der Tatsache, dass von Staudt kaum etwas veröffentlicht hatte. Zu seinen Gunsten sprach vor allem sein hohes Ansehen als Lehrer. Wenn von Staudt

¹ Der Titel ist inspiriert durch die Arbeit „Vom Bildungswert der Geometrie“ von F. Hohenberg, einem bemerkenswerten Versuch aus dem Jahr 1966 die klassische Geometrie gegen die Kritik der Neuen Mathematik zu verteidigen. Die Beschreibung der Abwärtsspirale der Geometrie am Ende dieses Artikels hat nichts von ihrer Aktualität verloren.

² Von Staudt 1847, p. IV.

vom Mathematikunterricht sprach, dann wusste er aus reicher Erfahrung, wovon er sprach.

Ähnliches lesen wir bei Th. Reye (1838–1919), der auf die Dualität sogar in seiner Strassburger Rektoratsrede³ 1882 einging:

Nichts, was für den Anfänger anregender wäre, ihn mehr zum Selbstschaffen anspornte, als dieses Dualitäts-Princip. Um Ihnen dasselbe zum Bewusstsein zu bringen, brauche ich nur einige elementare, direct darauf hinweisende Sätze einander gegenüber zu stellen, ...

Zwei Punkte bestimmen eine Gerade; nämlich ihre Verbindungslinie.

Eine Gerade und ein nicht auf ihr liegender Punkt bestimmen eine Ebene.

Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene.

Zwei Geraden, die einen Punkt gemein haben, liegen in einer Ebene.

Zwei Ebenen bestimmen eine Gerade, nämlich ihre Schnittgerade.

Eine Gerade und eine nicht durch sie gehende Ebene bestimmen einen Punkt.

Drei Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, bestimmen einen Punkt.

Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, haben einen Punkt gemein.”⁴

Es scheint also etwas an der Dualität aus didaktischer Sicht „dran zu sein“. Dem möchte ich im Folgenden nachgehen. Dabei liegt ein Einwand auf der Hand: Dualität gibt es doch nur in der projektiven Geometrie. Somit sind Vorschläge zu ihrer Behandlung im Geometrieunterricht unrealistisch.⁵ Wir werden sehen, dass dies nur bedingt stimmt.

Wenn hier vom Bildungswert der Dualität die Rede ist, so ist damit gemeint, dass die Beschäftigung mit diesem Thema zu tiefgreifenden mathematischen, vielleicht sogar außermathematischen Erkenntnissen, führen kann. Dualität ist ein Prinzip, kein Satz und auch keine Methode. Damit

³ Nach dem deutsch-französischen Krieg 1870/71 stand Straßburg als Stadt im Reichsland Elsass-Lothringen unter preußischer Regierung. Die alte Universität wurde als deutsche Universität neugegründet und Kaiser-Wilhelm-Universität genannt. Reye hatte langjährige Erfahrung im Geometrieunterricht am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich und an der Technischen Hochschule Aachen, seinen Stationen vor Straßburg, wohin er 1872 berufen wurde.

⁴ Reye 1886, p. 42. Die letzte Aussage auf der rechten Seite gilt natürlich nur in der projektiven Ebene.

⁵ Zu Versuchen, die projektive Geometrie in den Schulunterricht einzuführen, vgl. man Kitz 2015.

geht sie weit über das hinaus, was Lernziele üblicherweise formulierten. Ein Anschluss an die allgemeine Diskussion zum Begriff Bildung ist hier jedoch nicht beabsichtigt.

Arten von Dualität

Die heutige Mathematik ist voller Dualitäten⁶ – und keineswegs nur solchen, die sich auf die Geometrie beziehen. Historisch gesehen tritt eine Dualität schon ganz früh auf, nämlich in Euklids „Elementen“. Diese ist allerdings noch implizit, heißt, sie wird nicht thematisiert und auch nicht terminologisch gefasst. Im vierten Buch beschäftigt sich Euklid damit, einem gegebenen Kreis (meist) regelmäßige Vielecke ein- und umzubeschreiben und umgekehrt. Während er für Drei- und Viereck keinen Zusammenhang zwischen den beiden Fällen des Ein- und Umbeschreibens herstellt, führt er beim regelmäßigen Fünfeck den umbeschriebenen Fall auf den einbeschriebenen zurück:

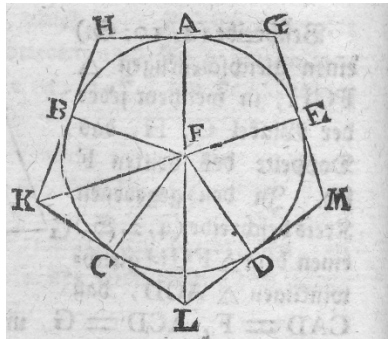


Abb. 1. Umbeschriebenes regelmäßiges Fünfeck
(Figur zu Buch IV, Satz 11 aus Lorenz 1818, p. 78)

Das umbeschriebene Polygon ergibt sich, indem man die Tangenten an den Kreis in den Eckpunkten des einbeschriebenen zieht. Dies lässt sich auch umkehren: Hat man das umbeschriebene Vieleck, so liefern dessen Berührungspunkte das einbeschriebene. Zweimal angewendet liefert der Prozess die Ausgangsfigur exakt zurück: ein typische Dualität.⁷ Die beiden zueinander dualen Polygone hängen aufs Engste zusammen: Jede Symmetrieachse wie

⁶ Vgl. Etwein/Voelke/Volkert 2019 sowie den geplanten Fortsetzungsband.

⁷ Es handelt sich um einen Sonderfall der Polarreziprozität (siehe weiter unten), bei dem Pol und Polare inzidieren.

auch jede Deckdrehung des einen ist auch eine des anderen, sie haben denselben Symmetriety. Ästhetisch wertvoll ist es, wenn man den Umkreis des umbeschriebenen Fünfecks konstruiert und diesem wieder das Fünfeck umbeschreibt etc.

Wesentlich bekannter ist das dreidimensionale Analogon dieser Konstruktion – zu einem Platonischen Körper den dualen zu konstruieren. Dies wird erst im fünfzehnten Buch der „Elemente“ thematisiert, das nicht von Euklid sondern aus der Spätantike⁸ stammt. Die Dualität ist hier ein spezieller Fall, der aber als solcher noch nicht hervorgehoben wird, des Einbeschreibens.

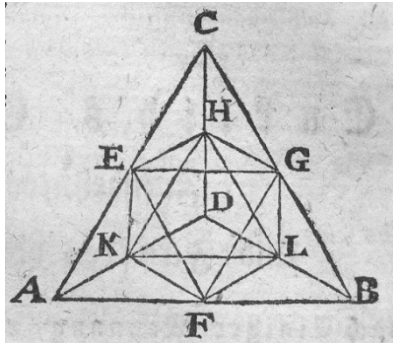


Abb. 2. Mit Hilfe der Kantenmitten wird einem Tetraeder ein Oktaeder einbeschrieben (Figur zu Buch XV, Satz 2 aus Lorenz 1818, p. 436)

Ein duales Paar von Platonischen Körpern tritt im dritten Satz des XV. Buches kommentarlos auf, siehe Abb. 3. Die Konstruktion verläuft über die Mittelpunkte der den Würfel begrenzenden Quadrate, dessen Inkugel kommt nicht ins Spiel. Allerdings sind diese Mittelpunkte gerade die Punkte, in denen die Inkugel den Würfel berührt. Legt man an diese die Tangentialebenen so erhält man in völliger Analogie zum ebenen Fall das umbeschriebene Polyeder – und natürlich lässt sich diese Vorgehensweise umkehren.⁹ Die Inkugel des größeren, umschreibenden Körpers ist identisch mit der Umkugel des kleineren, einbeschriebenen.

⁸ Es wird (auch bei Lorenz) Hysikles von Alexandria zugeschrieben.

⁹ Im dreizehnten Buch behandelt Euklid die Aufgabe, gegebenen Kugeln Platonische Körper einzubeschreiben (Sätze 13, 14, 15, 16 und 17). Inkugeln kommen explizit bei Euklid nicht vor. Dank an Frank Etwein (Wuppertal) für seine Hilfe in Sachen Polyederdualität.

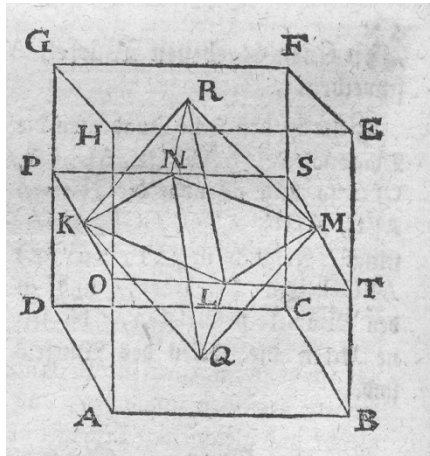


Abb. 3. Mit Hilfe der Flächenmittelpunkte wird einem Würfel ein Oktaeder eingeschrieben.
(Figur zu Buch XV, Satz 3 aus Lorenz 1818, p. 436)

Auch hier gelten analoge Aussagen wie im Fall der dualen Polygone: Duale Platonische Körper besitzen dieselbe Symmetrie. Arbeitet man mit In- und Umkugel, so ist der Duale des Dualen des Ausgangskörpers exakt wieder dieser Körper.¹⁰ Während die Betrachtung von Anzahlen im ebenen Fall wenig von Interesse ist – die Anzahl von Kanten und Ecken ist ja gleich, dual zum n -Seit ist folglich ein n -Eck – ist sie bei Körpern aufschlussreich. Bei dualen Körpern vertauschen sich die Anzahlen von Ecken und Flächen, dualisiert man zweimal, so ist man wieder am Ausgangspunkt. Die Anzahl der Kanten bleibt unverändert.¹¹ Ein Rätsel bleibt: Was wäre denn, wenn man Kanten und Ecken vertauschen würde, wie das in Abbildung 2 zu sehen ist? Ließe sich diese Vorgehensweise zu einer Dualität erweitern?

¹⁰ Nimmt man die Mittelpunkte im dualen Körper, so bekommt man bekanntlich nur einen dem Ausgangskörper ähnlichen und ihm ähnlich gelegenen Körper.

¹¹ „Schaut“ man ganz genau hin, so sieht man, dass die Kanten sich paarweise zuordnen lassen: Jeder Kante des Ausgangskörpers entspricht eine senkrechte Kante des dualen Körpers. Dabei muss man allerdings den Begriff senkrecht auf windschiefe Geraden verallgemeinern. Man erhält so eine „natürliche“ Entsprechung von Kanten zu Kanten, die weder bei Ecken noch bei Seitenflächen ein Pendant hat. Diese Einsichten helfen, regelmäßige Polytope im vierdimensionalen Raum zu dualisieren.

Die Verkettung von Um- und Inkugeln, von ein- und umbeschriebenen Platonischen Körpern hat Kepler benutzt, um den Aufbau des Planetensystems zu erklären.

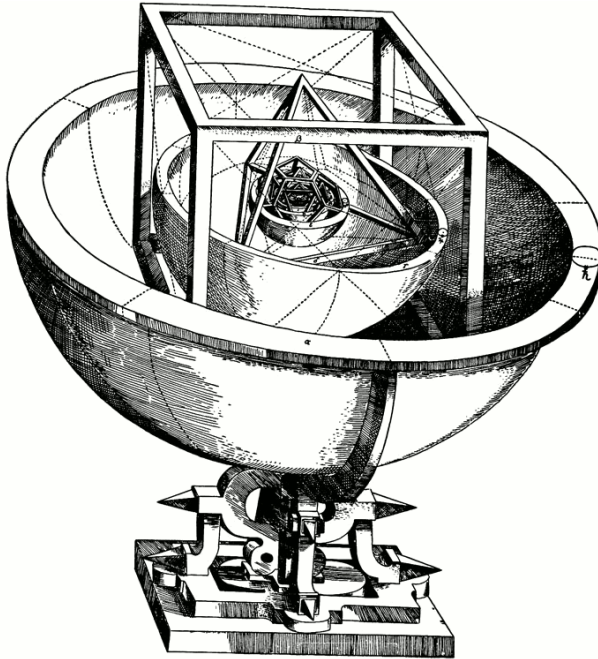


Abb. 4. Keplers Modell des Sonnensystems aus seiner Schrift „Mysterium Cosmographicum“ (1596)¹²

Die Dualität bei Polyedern eröffnet ein weites Feld, insbesondere wenn man auch Polyeder betrachtet, die nicht Platonisch sind. Versucht man beispielsweise das Kuboktaeder in der üblichen Weise zu dualisieren, so bemerkt man, dass durch Verbindung benachbarter Flächenmittelpunkte kein ebenes Viereck entsteht. Ein fundamentales Problem, das immer auftreten kann, wenn in einer Ecke mehr als drei Flächen zusammenkommen. Da das Kuboktaeder keine Umkugel besitzt, kommt man auch auf diesem Weg nicht weiter. Das Dualisieren von (geraden regelmäßigen) Prismen und Py-

¹² Man beachte, dass seinerzeit nur fünf Planeten bekannt waren. Kepler hoffte, mit seinem Modell die Verhältnisse der Bahnradialen erklären zu können, musste aber bald einsehen, dass dies unrichtig war.

ramiden bietet interessante Einsichten. Mit Hilfe des Dualisierens verdoppelt sich gewissermaßen unsere kleine mathematische Welt.

Die klassische Dualität der ebenen projektiven Geometrie wird im Deutschen oft im Anschluss an Jean-Victor Poncelet (1788–1867) Polarreziprozität genannt. Sei ein Kegelschnitt, wir nehmen hier den Kreis¹³, um die Schule nicht aus den Augen zu verlieren, gegeben, so kann man einem Punkt P im Äußeren bekanntlich eine Gerade konstruktiv zuordnen. Hierzu ziehe man von P , dem Pol, die beiden Tangenten an den Kreis und lege durch die Berührungspunkte die Gerade p , die Polare. Wandert P auf den Kreis zu, so bewegt sich die Polare ebenfalls auf den Kreis zu. Liegt P auf dem Kreis, so wird die Polare p zur Tangenten.

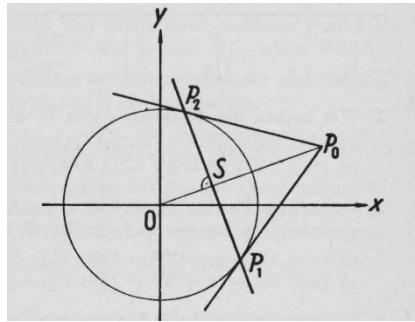


Abb. 5. Konstruktion der Polaren zum Punkt P

Was aber, wenn P im Inneren des Kreises liegt? Tangenten sind nicht mehr möglich, wohl aber Ersatz für die Berührungspunkte. Zieht man durch den fraglichen Punkt eine Sehne und errichtet in den Schnittpunkten die Senkrechten auf den zugehörigen Radien, so erhält man einen Punkt als Schnittpunkt der Tangenten, was natürlich nicht ausreicht, um eine Gerade festzulegen. Dazu braucht es einen zweiten Punkt, den man mit einer zweiten Sehne bekommt. Die erhaltene Polare ist unabhängig von der speziellen Wahl der Sehnen. Inneres und Äußeres des Kreises werden vertauscht, aus Punkten

¹³ Konsequent projektiv betrachtet gibt es natürlich nur eine Art von nicht-ausgeartetem Kegelschnitt. Es scheint dem Vf. aber, dass gerade das Zusammenspiel von euklidischer und projektiver Geometrie, wie es noch im 19. Jh. üblich war, didaktisch gesehen sehr fruchtbar ist. Die konsequent projektive Sicht mit einer autonomen, nicht-metrischen projektiven Geometrie ist vom schulischen Standpunkt eher unergiebig, da sehr abstrakt.

werden Geraden und umgekehrt. Analog kann man zu Geraden als Polaren Punkte, ihre Pole nämlich, konstruieren. Eine ähnliche, sehr einheitliche Methode liefert die Verbindungsgerade von P mit dem Kreismittelpunkt O . Liegt P außerhalb, so konstruiert man eine Tangente von P an den Kreis. Das Lot vom Berührungspunkt auf die Gerade durch O und P liegt dann auf der Polaren. Liegt P auf dem Kreis, so ist die Polare die Senkrechte auf der Geraden durch O und P in diesem Punkt; liegt P dagegen im Kreisinnern, so kehrt man die Konstruktion von oben um: Man errichtet die Senkrechte auf der Geraden durch O und P in P und nehme einen der Schnittpunkte S . Diesen verbinde man mit O und errichte in S die Senkrechte auf dem Radius OP . Im Schnittpunkt P^* dieser Senkrechten mit der Geraden durch O und P errichte man die Senkrechte. Sie ist die gesuchte Polare. Nimmt man die beiden Schnittpunkte der Geraden durch O und P hinzu, so bilden diese mit P und P^* ein harmonisches Punktequadrupel. Folglich ist P^* das Bild von P bei Inversion am Ausgangskreis. Alles fügt sich harmonisch zusammen; viele wichtige Begriffe treffen sich. Man beachte, dass all dies konstruktiv mit Zirkel und Lineal durchzuführen ist, projektiv ist unsere Vorgehensweise allerdings nicht, denn sie verwendet ja rechte Winkel.¹⁴

Die Polarreziprozität ermöglicht es, konstruktiv duale Figuren zu erzeugen. Ist etwa ein Quadrat im Kreis gegebene, so kann man dieses dualisieren, indem man die Polaren seiner vier Ecken konstruiert. Es entsteht wieder ein Quadrat, aber im Äußern. Der Vorgang des Um- und Einbeschreibens von oben ist hiervon ein Sonderfall. Fundamental ist auch hier: Das Duale des Dualen ist die Ausgangsfigur. Es gilt zudem: Die Polaren zweier Punkte schneiden sich im Pol ihrer Verbindungsgeraden. Zudem lassen sich, wie wir gesehen haben, Beziehungen herstellen zu harmonischen Punkten¹⁵ und zur Inversion am Kreis, zwei schönen Themen der Elementargeometrie.

Bislang bedurfte es keiner projektiven Geometrie. Diese braucht es erst, will man die offensichtliche Ausnahme, den Kreismittelpunkt, dualisieren. Hier ergibt sich eine Möglichkeit, die Ferngerade und damit auch die Fernpunkte problemorientiert einzuführen: Sie beseitigen eine Ausnahme.

¹⁴ Sie lässt sich allerdings abändern, so dass sie nur mit dem Lineal durchgeführt werden kann – einen gegebenen Kreis vorausgesetzt, was bei dieser Aufgabe trivialerweise der Fall ist. Vgl. Halbeisen/Hungerbühler/Läuchli 2016, p. 75.

¹⁵ Vgl. hierzu Halbeisen/Hungerbühler/Läuchli 2016, pp. 72-76.

Zum Nutzen der Polarreziprozität heißt es bei Henrici-Treutlein, einem Klassiker der Schulbuchliteratur:

Diese Sätze begründen eine eigentümliche Beziehung zwischen Punktgebilden und Geradengebilden: Wird in der Ebene einer Figur ein beliebiger Kreis angenommen, und wird zu jedem Punkt der Figur die Polare, zu jeder ihrer Geraden der Pol bestimmt, so entsteht die zur ersten Figur polare Figur; in gleicher Weise entsteht aus der letzteren die erstere, so daß beide als wechselseitig polare Figuren (oder als reziproke Figuren) bezeichnet werden. Aus bekannten Eigenschaften der einen Figur lassen sich nun häufig gewisse Eigenschaften der anderen Figur erweisen.¹⁶

Die mathematische Welt verdoppelt sich und der Aufwand halbiert sich: Was will man mehr?

Bildung

Fassen wir zusammen. Welchen Bildungswert könnten wir der Behandlung von Dualität zuschreiben? Es fallen einige Punkte auf:

1. Ein Satz liefert einen zweiten, ein Beweis einen zweiten. Idee: Dualisieren üben und Arbeit sparen (anspruchsvolles Bsp.: Pascal und Brianchon): Be wise, dualize!¹⁷
2. Dualitätsprinzip als heuristisches Prinzip: neue Sätze aus alten. Motivation zum Forschen (Selbsttätigkeit).
3. Beweglichkeit des Denkens fördern, Blick für Strukturen schärfen.
4. Dualitätsprinzip als ein großes Prinzip der klassischen Geometrie neben anderen: Kontinuitätsprinzip, Symmetrie. Fokus auf Methoden und Prinzipien.
5. Überwindung einer allzu gegenständlichen Auffassung der Objekte der Geometrie.

Die ersten beiden Punkte wurden schon von von Staudt und Reye herausgestellt, Punkt 3. war Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) sehr wichtig. Er betonte immer – in Abgrenzung zu seinem Widersacher und Konkurrenten Jean-Victor Poncelet – die Dualität als eine Symmetrieeigenschaft der Theorie; damit grenzte er sich ab vom Letztgenannten, der eher die konstruktive Seite der Dualität vermöge Polarreziprozität betonte. Diese wurde, wie es vom schulischen Standpunkt aus sinnvoll erscheint, in der vorliegenden Ar-

¹⁶ Henrici-Treutlein 1907, p. 88.

¹⁷ Frei nach A. M. Fraedrichs Slogan: Be wise, generalize!

beit betont. Auch auf Punkt 4. machte Reye in seiner Rektoratsrede aufmerksam; in seinen Augen war dies das Kennzeichen der neueren Geometrie, das sie von ihren Vorgängern unterschied. Punkt 5. schließlich klingt recht philosophisch, er ist als Nagel-These bekannt. Die Idee hierbei ist, dass die Austauschbarkeit etwa von Punkten und Geraden gemäß Dualität eine Ablösung von einer festen anschaulichen Vorstellung dieser Objekte fördere.¹⁸ Ob dies für Schülerinnen und Schüler überhaupt wünschenswert ist, erscheint fraglich. Interessant könnte aber schon die einfachere Einsicht sein, dass Punkte und Geraden in der Geometrie mehr durch ihre Funktion im jeweils vorgegebenen Rahmen, denn durch ihre gegenständliche Bedeutung charakterisiert sind.

Jedenfalls zeigt sich, dass die Dualität wichtige Einsichten vermitteln kann, was die Rede von ihrem Bildungswert rechtfertigt. Zudem bieten sich Anknüpfungspunkte – so man denn will – zur Diskussion von anderen Arten von Dualismen, etwa denen, die aus der Philosophiegeschichte oder der Physik bekannt sind. Vielleicht hat ja jedes Ding seine zwei Seiten? Womit man denn bei einem sehr allgemeinen Bildungsbegriff angelangt wäre.

Literatur

- Etwein, Fr.; Voelke, J.–D.; Volkert, K. (2019). Dualität als Archetypus mathematischen Denkens. *Klassische Geometrie und Polyedertheorie*. Göttingen: Cuvillier.
- Halbeisen, L.; Hungerbühler, N.; Läubli, J. (2016). *Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten*. Berlin-Heidelberg: Springer-Spektrum.
- Henrici, J.; Treutlein, P. (1907). *Lehrbuch der Elementargeometrie*. Zweiter Teil. Dritte Auflage. Leipzig: Teubner.
- Hohenberg, Fr. (1966). Vom Bildungswert der Geometrie. *Mathematisch-physikalische Semesterberichte* 13, pp. 153 – 164.
- Lorenz, J. Fr. (1818). *Euklid's Elemente fünfzehn Bücher*. Auf's neue herausgegeben von K. B. Mollweide. Halle und Berlin: Hallisches Waisenhaus.
- Nagel, E. (1939). The Formation of Modern Conception of Formal Logic in the Development of Geometry. *Osiris* 7, pp.142 – 223.
- Reye, Th. (1886): *Die synthetische Geometrie in Altertum und Neuzeit*. Straßburg: Heitz.
- von Staudt, K. Chr. (1847). *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Korn.

¹⁸ Für eine kritische Diskussion dieser These aus historischer Sicht vgl. Etwein/Voelke/Volkert 2019 Epilog.

Autorenverzeichnis

Frederik Dilling
Didaktik der Mathematik
Universität Siegen
Herrengarten 3
57072 Siegen
dilling@mathematik.uni-siegen.de

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Günter Graumann
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstrasse 27
33615 Bielefeld
graumann@math.uni-bielefeld.de
og-graumann@web.de

Myriam Hamich
Wissenschaftliche Mitarbeiterin
Projekt optes
Duale Hochschule Baden-Württemberg
Mosbach
Lohrtalweg 10
74821 Mosbach
Myriam.Hamich@mosbach.dhbw.de

Herausgeber

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Dr. Jörg Meyer
Schäfertrift 16
31789 Hameln
J.M.Meyer@t-online.de

Hartmut Müller-Sommer
Kringelkamp 28
49377 Vechta
mueller-sommer@t-online.de

Prof. Dr. K. Volkert
AG Didaktik und Geschichte der
Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstr. 20, Raum F 12.06
42119 Wuppertal
klaus.volkert@math.uni-wuppertal.de

Dr. Hans Walser
Gerlikonerstr. 29
8500 Frauenfeld
Schweiz
hwalsen@bluewin.ch
www.walser-h-m.ch/hans/

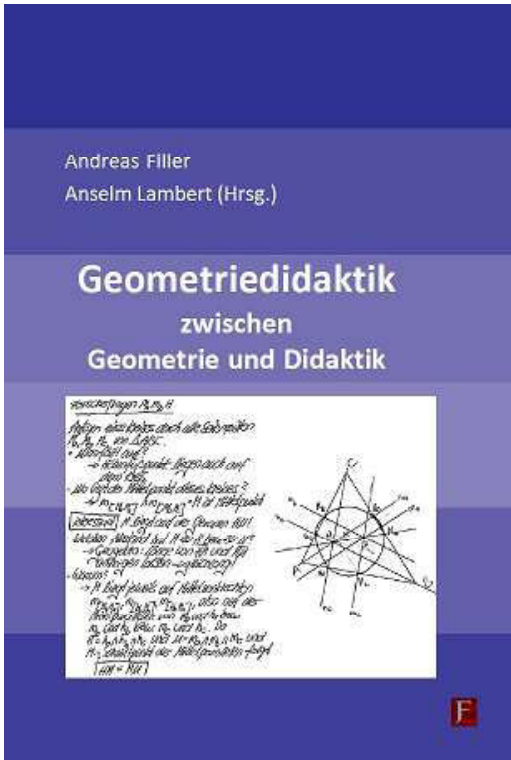
Prof. Dr. Anselm Lambert
Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik und ihre
Didaktik
Postfach 151150
66041 Saarbrücken
lambert@math.uni-sb.de

Andreas Filler
Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik

Vorträge auf der
35. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in
der Gesellschaft für Didaktik
der Mathematik
vom 14. bis 16. September
2018 in Saarbrücken

128 Seiten, farbige Abb., br.,
ISBN 978-3-88120-614-3,
29,80 Euro



Der Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagung 2018 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter dem übergeordneten Thema Geometriedidaktik zwischen Geometrie und Didaktik stand. Dementsprechend umfassen die Beiträge ein breites Themenspektrum von im engeren Sinne didaktischen Themen über für den Geometrieunterricht oder die Begabtenförderung interessante fachlich orientierte Abhandlungen bis hin zu physikalischen Bezügen sowie die Lehre von Geometrie betreffenden historischen Betrachtungen.



Verlag Franzbecker

www.franzbecker.de

verlag@franzbecker.de

