Stefan-Harald KAUFMANN, Soest

Die Entwicklung dynamischer Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen

Die analytische Geometrie und lineare Algebra gehört zu einem der drei großen mathematischen Inhaltsfelder der gymnasialen Oberstufe. Ein zentrales Ziel der Analytischen Geometrie ist die Beschreibung und Untersuchung geometrischer Sachverhalte mit Vektoren. Dazu gehört etwa, dass Schülerinnen und Schüler eine Vektorgleichung, wie beispielsweise

$$\overrightarrow{0X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

aufstellten und anwenden können.

Viele geometrische Problemstellungen können darauf zurückgeführt werden, eine Vektorgleichung als Beschreibungswerkzeug zu verwenden, um Lageprobleme (z.B. Punkt-Gerade, Gerade-Gerade oder Ebene-Gerade) zu untersuchen. Der Kern einer solchen Untersuchung ist das Aufstellen eines zum geometrischen Sachverhalt passenden linearen Gleichungssystems sowie eine Analyse der Lösungsmenge des Systems. In einigen Bundesländern, wie beispielsweise Nordrhein Westfalen, kann die Analyse rein rechnerisch oder mit Hilfe eines grafikfähigen Taschenrechners durchgeführt werden. Die Interpretation der Lösungsmenge erfolgt in der Regel dahingehend, ob es einen Schnittpunkt gibt und wie dessen Koordinaten gegebenenfalls lauten oder welche andere Lagebeziehung der untersuchten Objekte aus der Lösungsmenge gefolgert werden kann.

Eine weitere Deutung der Variablenwerte, beispielsweise für $t = 2$ in der obigen Gleichung (*), kann für die Lageuntersuchung generell als nicht relevant angesehen werden. Die Bedeutung der Variable kann stärker fokussiert werden, wenn man sich von der Vorstellung löst, die Gerade werde als ganzes Objekt durch eine Vektorgleichung wie (*) beschrieben, und stattdessen die Gerade als eine Ortslinie eines sich bewegenden Punktes auffasst. Aus dieser Perspektive betrachtet wird die Bewegung eines Punktes durch eine Vektorgleichung beschrieben, in der die Variable beispielsweise den Zeitpunkt angibt, an dem sich der Punkt an einer konkreten Position auf der Geraden befindet.

Im Rahmen einer qualitativen Studie wird unter anderem untersucht, inwieweit Schülerinnen und Schüler dynamische Vorstellungen mit einer solchen Vektorgleichung als Geradenbeschreibung verbinden. Anhand der Ergebnisse wird eine Unterrichtseinheit entwickelt, bei der die Betrachtung einer Geraden als Ortslinie eines sich bewegenden Punktes thematisiert und gefördert wird.

Der Beitrag konzentriert sich auf zwei Fragen:

1. Inwieweit deuten die Schülerinnen und Schüler eine Vektorgleichung dynamisch?
2. Wie kann eine mögliche Unterrichtsstunde zur Thematisierung dynamischer Interpretationen mit Hilfe einer Sachaufgabe aus dem Gebiet der Vektorrechnung angelegt sein?

1.1 Eckdaten zum Untersuchungsdesign und zur Auswertungsmethode

Insgesamt wurden 22 SuS aus Mathematikleistungskursen der Jgst. 12 von 4 verschiedenen Gymnasien in Köln interviewt. Die Befragungen wurden einzeln nach einem vorgegebenen Frageleitfaden durchgeführt und sind methodisch als problemorientierte Interviews angelegt [Witzel, 2000]. Die Lernenden wurden zu denjenigen Vorstellungen befragt, die sie mit einem Vektor, einer Geraden, den Komponenten einer vektoriellen Geradenbeschreibung sowie der Vektorgleichung als Ganzes verbinden.

Die Interviews wurden mit einer Videokamera anonymisiert aufgezeichnet. Anschließend erfolgte die Transkribierung der Interviews und der angefertigten Grafiken, die die SuS während des Interviews teilweise zu Ihren Ausführungen erstellt hatten.

Die verschriftlichen Interviews wurden mit Hilfe der typenbildenden qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet [Mayring, 2008], [Kuckartz, 2016]. Zunächst wurde das Datenmaterial nach den Vorgaben einer strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse kodiert, indem als Erstes eine grobe Kodierung anhand der durch die Forschungsfragen vorgegebenen Hauptkategorien vorgenommen wurde. Aus den Hauptkategorien wurden anschließend am Material Subkategorien entwickelt, die die individuellen Ausprägungen der Vorstellungen genauer erfassen. Nach einer erneuten Materialkodierung mit allen Subkategorien konnte jeder individuelle Fall im Hinblick auf das Untersuchungsziel auf eine Kombination unterschiedlicher Kategorien inhaltlich reduziert werden. Darüber hinaus zeigt jede als „Kategorien-Kombination“ durchgeführte Fallcharakterisierung, welche Vorstellung der jeweilige Befragte inhaltlich mit einer Vektorgleichung verbindet.

Bei der Auswertung zeigte sich, dass die einzelnen Fälle über die Vektorvorstellungen und die Vorstellungen zu Variablen sinnvoll gruppiert werden können. Folglich bilden die Kategorien zu Vektor- und Variablenvorstellungen den Merkmalraum einer Typisierung. Für die Vektoren lieferte die Untersuchung die Kategorien: „Bewegung“, „Tupel“, „Pfeildarstellung“, „Pfeil“, „gerichtete Strecke“ und „Verschiebbarkeit“. Die Codes zu den Vorstellungen, die mit Variablen verbunden werden, können durch die von Malle formulierten Variablenaspekte zu Funktionsvariablen beschrieben werden [Malle, 1993]: „Simultanaspekt“ und „ Einzelzahlaspekt“.

1.2 Ergebnisse der Fallkontrastierung

Die oben angegeben Merkmale ermöglichten die Bildung drei zentraler Typen. Die Vorstellungen, die jeder einzelne Typus idealisiert mit einer vektoriellen Geradenbeschreibung verbindet, werden im Folgenden zusammengefasst aufgelistet und in Abbildung 1 visualisiert.

- (1) Typ „simultane Bewegung“: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ eine Bewegung in einem Koordinatensystem vor, die durch ein Zahlentupel beschrieben wird und mit Hilfe eines Pfeils grafisch dargestellt werden kann. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ simultan alle Bewegungen, die von einem Punkt auf einer Geraden zu allen anderen Punkten auf der Geraden führen, da für die Variable t alle reellen Zahlen eingesetzt werden können. Diese Typus zeichnete sich insbesondere dadurch aus, dass er als einziger die Vektorkategorie „Bewegung“ verwendet.
- (2) Typ „Pfeilverlängerung“: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ ein Zahlentupel vor, das einen Pfeil in einem Koordinatensystem beschreibt. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ einen festen Punkt auf einer Geraden, von dem er durch die t-fache Verlängerung des Richtungsvektors zu einem weiteren Punkt auf der Geraden gelangt.
- (3) Typ „Variable als Erkennungsmerkmal“: Unter einem Vektor stellt sich dieser Typ einen Pfeil oder eine Strecke vor, die gerichtet sein kann. Mit einer Vektorgleichung wie (*) verbindet dieser Typ einen Pfeil, an den der Richtungsvektor angesetzt wird. Den Richtungsvektor erkennt man an der Variablen t. Die Gerade entsteht, indem der Richtungsvektor mehrfach nacheinander gelegt wird bzw. verlängert oder verkürzt wird.

Abschließend können nicht alle 17 Fälle einem der drei Idealtypen zugeordnet werden. Es gibt vier Fälle, die sowohl Merkmale von Typ (2) als auch von Typ (3) aufweisen, jedoch von keinem dieser beiden Idealtypen alle Merkmale aufweisen. Sie stellen folglich eine Mischform dar. Bei einer erneuten Analyse derjenigen Merkmale, die die betroffenen Fälle aufweisen, konnte beobachtet werden, dass diese vier Befragten die einzigen Fälle sind, die das Merkmal „verschiebbar“ in ihrer Vektorvorstellung aufweisen. Aus fachlicher Sicht bedeutet dieser Aspekt, dass sie in irgendeiner Form ansatzweise mit einem Vektor die Idee einer „Pfeilklasse“ verbinden.

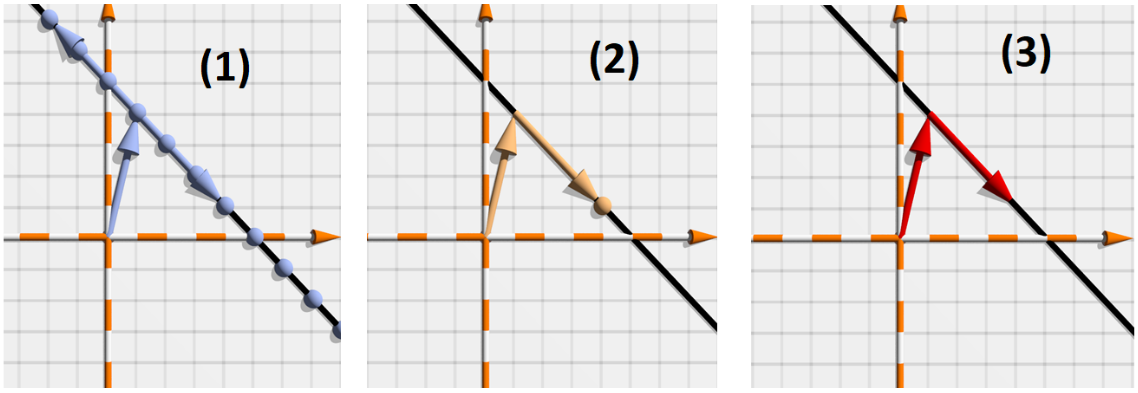

Abbildung 1: Visualisierung der Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen

Abschließend können nicht alle 17 Fälle einem der drei Idealtypen zugeordnet werden. Es gibt vier Fälle, die sowohl Merkmale von Typ (2) als auch von Typ (3) aufweisen, jedoch von keinem dieser beiden Idealtypen alle Merkmale aufweisen. Sie stellen folglich eine Mischform dar. Bei einer erneuten Analyse derjenigen Merkmale, die die betroffenen Fälle aufweisen, konnte beobachtet werden, dass diese vier Befragten die einzigen Fälle sind, die das Merkmal „verschiebbar“ in ihrer Vektorvorstellung aufweisen. Aus fachlicher Sicht bedeutet dieser Aspekt, dass sie in irgendeiner Form ansatzweise mit einem Vektor die Idee einer „Pfeilklasse“ verbinden.

Die drei gebildeten Idealtypen repräsentieren Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen, deren Qualität unterschiedlich bewertet werden kann. Eine mögliche Qualitätseinordnung kann anhand der oben formulierten Frage vorgenommen werden, inwieweit die SuS eine Vektorgleichung zur Geradenbeschreibung dynamisch interpretieren.

Der Typ „simultane Bewegung“ stellt sich eine Gerade als ein Objekt vor, welches durch gleichgerichtete Punktbewegungen beschrieben wird, da jeder Punkt auf der Geraden durch Verschiebung eines festgewählten Punktes entsteht. Dieser Aspekt kann sowohl den grundsätzlichen Aufbau einer Vorstellung zu Geraden als auch den Aufbau von dynamischen Interpretationen zu Geraden ermöglichen. Typ „Pfeilverlängerung“ unterscheidet sich von Typ „simultane Bewegung“ durch die beiden zentralen Aspekte, dass Vektoren als Pfeile gedeutet werden und die Vektorgleichung einen einzelnen Punkt beschreibt, der Endpunkt eines an einen festgewählten Punkt angelegten Pfeil ist. Die Trennung zwischen algebraischer Beschreibung und geometrischer Deutung ist nicht mehr klar erkennbar. Eine dynamische Interpretation der Vektorgleichung lässt sich nur ansatzweise erkennen. Für den Typ „Erkennungsmerkmal“ spielt die Variable t in der

Geradenbeschreibung keine Rolle. Das ist eine mögliche Erklärung dafür, dass sich eine dynamische Deutung der Gleichung nicht erkennen lässt.

Diese Zwischenbilanz kann die Frage aufwerfen, inwieweit dynamische Vorstellungen zu Vektoren und Vektorgleichungen im Mathematikunterricht gefördert werden können. In Anlehnung an das Untersuchungsdesign wurde eine Unterrichtsstunde zur Förderung entsprechender Vorstellungen als Test für weitergehende Untersuchungen entwickelt. Die Stunde trägt innerhalb der Unterrichtsreihe den Titel „Problemorientierte Schnittpunktbestimmung am Beispiel zweier Schiffe auf Kollisionskurs". Der Stundenablauf, deren Rahmenbedingungen sowie die Beobachtungen bei der Durchführung werden im Folgenden kurz dargelegt.

2.1 Entwicklung und Durchführung einer Unterrichtsstunde zu dynamischen Geradenvorstellungen

Die folgende Unterrichtsstunde wurde parallel in zwei Grundkursen der Jahrgangsstufe Q2 an einem Gymnasium in Nordrhein-Westfalen durchgeführt. Kurs A setzt sich aus 12 Schülerinnen und 10 Schüler zusammen. Kurs B setzt sich aus 13 Schülerinnen und 9 Schülern zusammen. Beide Kurse wurden in der Q1 in Analysis und Stochastik unterrichtet und können beide im Hinblick auf das Leistungsvermögen als heterogen beschrieben werden. Den SuS sind aus den bisherigen Stunden unterschiedliche Sozialformen, wie beispielsweise die Partnerarbeit, bekannt. Beide Kurse werden vom gleichen Fachlehrer unterrichtet.

2.2 Voraussetzungen: Einordnung in die Unterrichtsreihe

Analytische Geometire und lineare Algebra bildet ein zentrales Inhaltsfeld des Kernlehrplans des Landes Nordrhein-Westfalen. In Anlehnung an die dort ausgewiesenen Kompetenzen und an Bürger et. al. [Bürger et. al., 1980] wurden Vektoren zunächst als verallgemeinerte arithmetische Größen in Form von Listen eingeführt. Durch eine Anbindung an Sachkontexte, wie beispielsweise Zutatenlisten, wurden die Rechengesetze zur Vektoraddition und zur Multiplikation mit einem Skalar motiviert. Mit der Einführung der dreidimensionalen Koordinaten wurden Vektoren geometrisch als Punktverschiebungen gedeutet, deren Repräsentant grafisch als Pfeil dargestellt werden kann. In den anschließenden Unterrichtsstunden wurden die Rechengesetze für Vektoren geometrisch nachvollzogen. Auf dieser Basis wurden erste geometrische Objekte, wie Punkt und Verbindungsstrecken zweier Punkte, mit Hilfe von Vektoren beschrieben.

Die Einführung der Geradengleichung erfolgte als Menge von Punkten, deren Ortsvektoren durch eine Vektorgleichung der Form (*) beschrieben werden können. Die Untersuchung der Lagebeziehung von Punkt und Gerade, die so genannte „Punktprobe“, stellte die erste Anwendung der Geradengleichung in Vektorform dar und war die letzte Stunde vor der eigentlichen Untersuchungsstunde.

In beiden Kursen wurden in der gesamten Reihe annähernd gleiche Unterrichtsmaterialen verwendet. Der Unterschied bestand in vier Aufgabenformaten zur Einführung der Geradengleichung und der Punktprobe. Kurs A erhielt Aufgabenformate, in denen eine Deutung der Variablen t in der Gleichung (*) als Zeitvariable bereits eingefordert wird. Der Austausch der vier Aufgaben erfolgte mit der Fragestellung, ob sich sowohl in der Erarbeitungs- als auch in der Sicherungsphase bzw. in den Lösungen Unterschiede erkennen lassen.

2.3 Durchführung der Unterrichtstunde

Die Unterrichtsstunde verfolgt eine problemorientierte Thematisierung der Schnittpunktbestimmung zweier Geraden, die in einen Sachkontext eingebettet ist. Zu Beginn der Stunde präsentiert der Lehrer die Problemstellung in Form eines Kurzvortrags, dessen Inhalt den SuS in der Erarbeitungsphase zusammen mit dem Arbeitsauftrag zur Verfügung gestellt wird:

„Der Kapitän eines Schiffes registriert um 16:00 auf dem Radar einen Eisberg, der sich 7~Seemeilen südlich des Schiffes befindet. Die Meeresströmung treibt den Eisberg pro Stunde 3~Seemeilen nach Osten und 1~Seemeile nach Norden. Das Schiff fährt trotz der Meeresströmung pro Stunde auf einem Kurs 4~Seemeilen nach Osten und 4~Seemeilen nach Süden. Soll der Kapitän den Kurs des Schiffes ändern?“

Im Anschluss an den Lehrervortrag die Leitfrage der Stunde „Werden Schiff und Eisberg kollidieren?“ festgelegt. Die Erarbeitungsphase ist in zwei Teilphasen unterteilt: Eine Plenumsphase, in der eine Vektorgleichung zur Beschreibung des Schifffahrweges gemeinsam aufgestellt wird und einer Partnerarbeitsphase, in der die SuS die „Eisberggleichung“ aufstellen und eine Methode zur Lösung des Problems entwickeln sollen. Die gemeinsame Erstellung der „Schiffsgleichung“ erfolgt als Entlastung der Erarbeitungsphase, damit die SuS sich auf das eigentliche Problem konzentrieren können.

In der Sicherungsphase werden jeweils zwei Paare gebeten dem Plenum ihre Ergebnisse vorzustellen und zu erklären, wie sie die Leitfrage mit Hilfe ihrer Ergebnisse beantworten würden. Zwei Beispiele für Schülerlösungen sind in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt. Beide Lösungen verfolgen eine Lösung mit Hilfe von Vektoren, indem als Erstes für die Fahrwege von Schiff und Eisberg jeweils eine Vektorgleichung aufgestellt wird. Danach wird durch Gleichsetzen der Vektorgleichungen ein lineares Gleichungssystem aufgestellt. Die Lösungen des Systems werden zuletzt als Zeitwerte im Sachkontext interpretiert. Da beide Werte unterschiedlich sind, befinden sich Schiff und Eisberg zu unterschiedlichen Zeiten am Schnittpunkt der Fahrwege. Aufgrund dieses Ergebnisses kommen die beiden Lösungen zu der Deutung, dass der Kapitän den Kurs des Schiffes nicht ändern muss.

Die Lösungen unterscheiden sich einerseits durch die Darstellung der Lösungswege und andererseits inhaltlich, da ein Tandem unterschiedliche Variablenbezeichnungen verwendet (Abb. 2), während das andere Tandem die gleiche Variablenbezeichnung verwendet (Abb. 3). Diese kann im vorliegenden Sachkontext als sinnvoll angesehen werden, da die Variable jeweils für die Zeit steht, die seit 16:00 vergangen ist. Durch den Widerspruch, der sich in der Rechnung ergibt, liegt deutlich schneller ein Ergebnis vor.

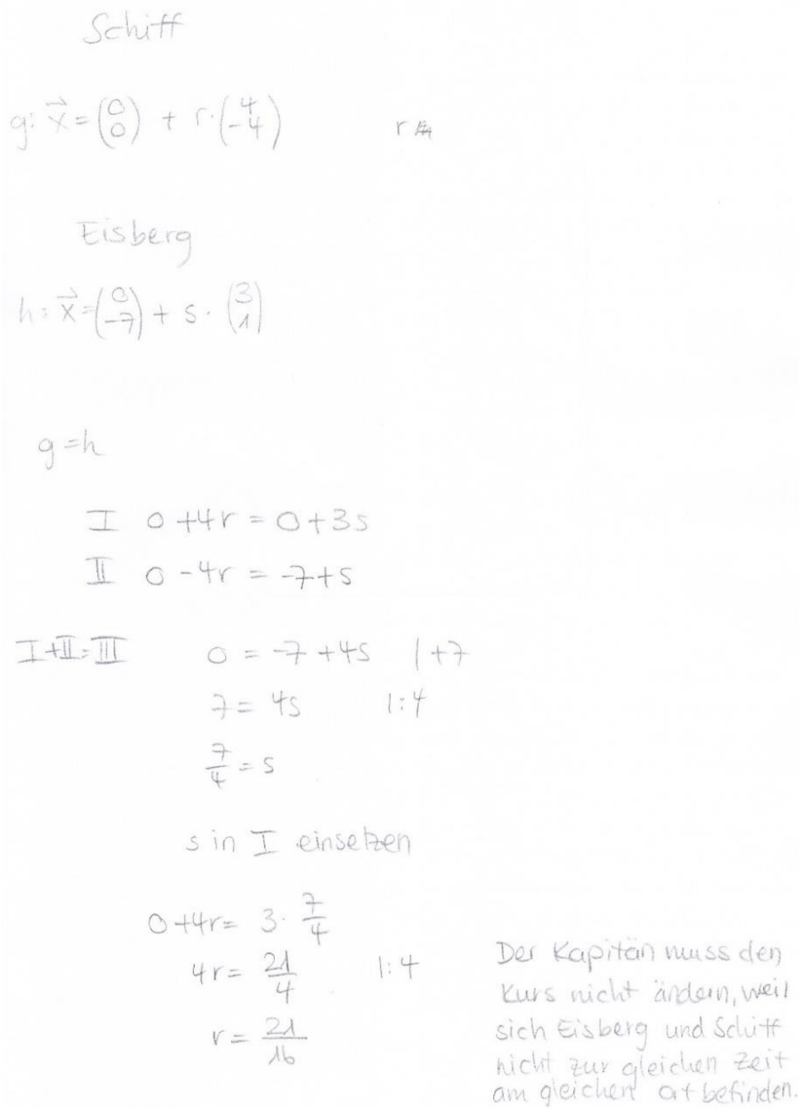

Abbildung 2: Schülerlösung mit unterschiedlichen Variablen

2.4 Beobachtungen in der Unterrichtsstunde

In beiden Kursen gestaltete sich die Erarbeitung größtenteils unproblematisch. Einige Schülertandems konnten sich nicht mehr an ein Vorgehen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems erinnern und mussten während der Erarbeitung auf eine vom Fachlehrer zur Verfügung gestellten Hilfekarte zurückgreifen.

Der größte Teil der Schülerbearbeitungen hat, im Vergleich zu den in den Abbildungen 2 und 3 dargestellten Beispiellösungen, die Koordinaten des Schnittpunktes bestimmt und erst danach die Bedeutung der Variablenwerte näher interpretiert. Lediglich die Schülerinnen und Schüler aus Kurs A haben Lösungsvorschläge mit nur einer Variablen (vgl. Abb. 3) vorgelegt. Hier stellt sich die Frage, ob die Entwicklung eines solchen Lösungsansatzes auf die etwas intensivere Thematisierung der Variablen als Zeitwert in den vorherigen Stunden zurückgeführt werden kann. Eine grundsätzliche Beeinflussung liegt aufgrund einiger anderer Aufgabenformate in Kurs A vor. Inwieweit diese die Lösungsansätze und Denkweisen der Lernenden in der Unterrichtsstunde beeinflusst haben, kann ohne genauere Beobachtungen nicht eindeutig beantwortet werden.

Zuletzt konnte beobachtet werden, dass alle Schülerinnen und Schüler sowohl Schiff und Eisberg als einzelne Punkte, die sich auf einer Geraden bewegen modelliert haben. Dieses Vorgehen mag den Lernenden aufgrund der bisherigen Unterrichtsstunden möglicherweise als konsequent erschienen sein. Dennoch kann eine Berücksichtigung der Ausmaße von Schiff und Eisberg die Interpretation der Ergebnisse verändern. Diese Reflektion musste in beiden Kursen vom Fachlehrer jedoch als vertiefende Hausaufgabe gestellt werden.

3 Fazit

Mit den Ergebnissen der qualitativen Studie zum Aufbau von Vorstellungen zu einer Vektorgleichung als Geradenbeschreibung konnten drei Idealtypen gebildet werden. Lediglich einer dieser Idealtypen, der Typ „simultane Bewegung“, zeichnet sich dadurch aus, dass die Vektorgleichung unter dynamischen Aspekten gedeutet wird, während die anderen Idealtypen diese Vorstellung höchstens ansatzweise erkennen lassen. Darüber hinaus stellt der Typus „simultane Bewegung“ den einzigen Typus dar, der eine stärkere Trennung zwischen einer Geraden als geometrisches Objekt und der Vektorgleichung als algebraischer Beschreibung des Objekts vollzieht.

Aus diesem Grunde erscheint die Förderung dynamischer Vorstellungen zu Vektorgleichungen, um unter anderem den Beschreibungscharakter einer solchen Gleichung hervorzuheben sinnvoll. Der Unterrichtsversuch hat gezeigt, dass eine solche Förderung bzw. Vertiefung im Mathematikunterricht möglich ist und ohne Einschränkungen in ein Curriculum eingebaut werden kann.

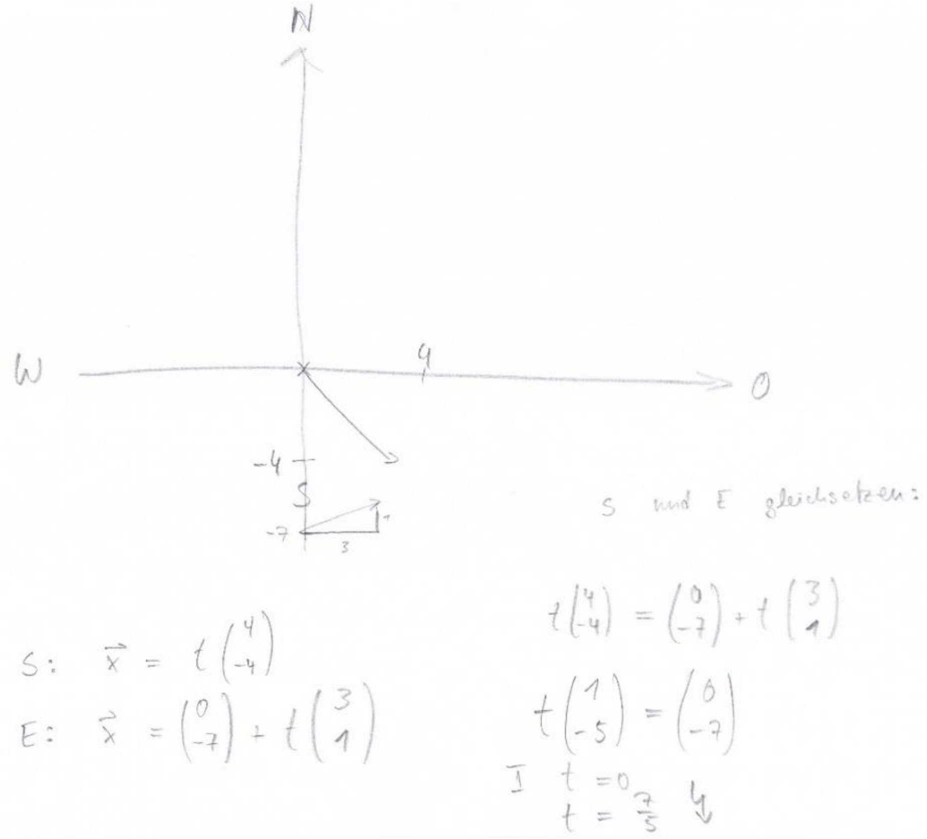

Abbildung 3: Schülerlösung mit gleicher Variable

Aus diesem Grunde erscheint die Förderung dynamischer Vorstellungen zu Vektorgleichungen, um unter anderem den Beschreibungscharakter einer solchen Gleichung hervorzuheben sinnvoll. Der Unterrichtsversuch hat gezeigt, dass eine solche Förderung bzw. Vertiefung im Mathematikunterricht möglich ist und ohne Einschränkungen in ein Curriculum eingebaut werden kann.

Von diesem Standpunkt aus betrachtet, wirft der Versuch unter anderem zwei neue Fragen auf. Eine Förderung dynamischer Vorstellungen zu Geradengleichungen ist sicher wünschenswert, jedoch ist fraglich, inwieweit sich ein solches inhaltliches Konzept konsequent im Unterricht umsetzen lässt. Als Beispiel seien hier die Ebenen genannt, bei denen die Vorstellung eines eigenen Koordinatensystems, was durch die Variablen in der Vektorgleichung auf die Ebene gelegt wird, sinnvoller angesehen werden kann als eine dynamische Deutung. Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob eine geplante Einbeziehung dynamischer Aspekte in den Unterrichtsaufbau langfristig tatsächlich eine Veränderung der Vorstellungen bewirkt, die die Schülerinnen und Schüler mit einer Vektorgleichung zur Geradenbeschreibung in Verbindung bringen. Diese Frage kann möglicherweise mit Hilfe einer Vergleichsstudie beantwortet werden.

Literatur

Bürger, H. / Fischer, R. / Malle, G. / Reichel, H.-C. (1980). *Zur Einführung des Vektorbegriffs: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung.* In: Journal für Mathematik-Didaktik 1, H. 3, S. 171-187.

Henn, H.-W., Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Berlin/Heidelberg: Springer.

Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Weinheim und Basel: Beltz Juventa.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* Weinheim und Basel: Beltz.

Witzel, A. (2000). Das problemzentrierte Interview [25 Absätze]. *Forum Qualitative Sozialforschung, 1*, online abrufbar unter http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/viewArticle/1132/2519} zuletzt aufgerufen am 13.03.2018.