

# Winkelblicke - Sachanalyse ausgewählter Funktionsaspekte von Winkeln und Anwendungsvorschläge für den Geometrieunterricht

Vorabversion zum Vortrag zur Herbsttagung 2018 des GDM-Arbeitskreises Geometrie

Dr. Andreas Kirsche\*

2. September 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Beschreibung eines Winkels</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Funktionsaspekte des Winkels</b>	<b>2</b>
3.1	Winkel als Operation . . . . .	3
3.2	Winkel als Objekt . . . . .	4
3.3	Winkel als Messgröße . . . . .	5
3.4	Winkel als Relation . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Zugang zum Funktionsaspekt „Winkel als Relation“</b>	<b>5</b>
4.1	Gedanken zum Abstandsbegriff . . . . .	5
4.2	Eine Lernumgebung zum Kreuzabstand . . . . .	6
4.3	Abschließende Gedanken zur betrachteten Lernumgebung . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

---

\* andreas.kirsche@uni-erfurt.de

## 1 Einleitung

Damit Schüler\*innen gewillt sind, die Herausforderungen des Mathematikunterrichts anzunehmen, müssen sie von innen heraus motiviert werden. Dies kann gelingen, wenn ihr Forscherinstinkt geweckt wird, wenn der Mathematikunterricht so gestaltet wird, dass die Schüler\*innen Mathematik selbst entdecken und entwickeln können. Dass das Forschen motivierend wirkt, kann exemplarisch bei (Hischer 2018) nachgelesen werden. Die neunjährige Enkelin des Autors zeigt eine intrinsische Motivation für Mathematik, welche einhergeht mit dem Nachgehen selbst gestellter Forschungsfragen.

In diesem Bericht möchte ich meine Überlegungen zum Winkelbegriff vorstellen, die in mir ein ebensolches Forschungsbedürfnis geweckt haben. Ausgewählte Inhalte habe ich für eine Lernumgebung aufbereitet, in welcher ich Potential für intrinsische Motivation vermute. Mit der Lernumgebung wird ein Aspekt des Winkels betrachtet, der in dieser Weise im Geometrieunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielt.

## 2 Beschreibung eines Winkels

Etzold beschreibt mit dem *informativischen Winkelbegriff* die Schnittmenge der einzelnen von Krainer betrachteten Winkelvorstellungen. Winkel können demnach mit einem Strahl und einem Winkelmaß beschrieben werden. (vgl. Etzold 2015)

Ist ein Bezugssystem, etwa ein auf der euklidischen Ebene verortetes rechtwinkliges Koordinatensystem, vorhanden, dann scheint es möglich, die Komponenten zur Beschreibung des Winkels noch weiter zu reduzieren. Ein Strahl weist bzgl. des vorhandenen Bezugssystems in eine Richtung, die bestimmt werden kann. Die Änderung der Richtung bezogen auf die *Normalrichtung*, welche durch die x-Achse des Bezugssystems vorgegeben ist, kann dann als Winkelmaß interpretiert werden. Insbesondere enthält damit ein Strahl bereits alle zur Beschreibung eines Winkels benötigten Informationen.

Da die Ausrichtung der Normalrichtung des Bezugssystems willkürlich erscheint, kann es je nach Winkelvorstellung hilfreich sein, den betrachteten Winkel als *Überlagerung zweier Winkel* im Sinne zweier Strahlen zu verstehen. Das resultierende Winkelmaß ergibt sich dann als Differenzbetrag aus den jeweiligen den Strahlen zugeordneten Winkelmaßen, siehe dazu auch die Betrachtungen zum Funktionsaspekt *Winkel als Operation* in Abschnitt 3.1 und hier insbesondere das mathematische Modell  $a + x = b$ .

## 3 Funktionsaspekte des Winkels

Im Folgenden werden die Funktionsaspekte *Winkel als Operation*, *Winkel als Objekt*, *Winkel als Messgröße* sowie *Winkel als Relation* untersucht. Es werden die jeweils daraus resultierenden didaktischen Zugänge zum mathematischen Konstrukt Winkel angegeben.

### 3.1 Winkel als Operation

Krainer unterscheidet im Wesentlichen vier verschiedene Winkelvorstellungen, den *Winkel als Knick*, den *Winkel als Feld*, den *Winkel als Richtungsänderung* sowie den *Winkel als Überdrehung*, (vgl. Krainer 1989). Insbesondere die beiden zuletzt genannten Winkelvorstellungen stehen im engen Zusammenhang mit der kinematischen Betrachtung von Drehungen, d.h. mit der konkreten Vorstellung, dass sich ein Strahl um seinen Startpunkt dreht, wie es z.B. beim Lichtstrahl eines Leuchtturms beobachtet werden kann.

Bender beschreibt die kinematische Bewegung als Bewegung aller Punkte einer Startkonfiguration zu einer Zielkonfiguration, wobei zu jedem Zeitpunkt die geometrische Struktur der Punktanordnung erhalten bleibt. Nach Vollendung der Bewegung ist nur noch die Zielkonfiguration sichtbar. Bender unterscheidet diese kinematische Bewegung von der statischen Kongruenzabbildung, die als Relation zwischen Urbild und Bild verstanden wird. (vgl. Bender 1982)

Der Einfachheit halber möchte ich im Folgenden die kinematische Bewegung als *dynamischen Aspekt der Drehung* und die statische Kongruenzabbildung als *statischen Aspekt der Drehung* bezeichnen. Beim dynamischen Aspekt ist zu jedem Zeitpunkt nur eine Objektkonfiguration sichtbar, beim statischen Aspekt ist (unabhängig vom Zeitpunkt) Ausgangs- und Zielkonfiguration sichtbar.

Eine Drehung kann mit Hilfe der Gleichung *Strahl + Winkel = Strahl* beschrieben werden. Dass dabei durch das Additionszeichen Objekte verschiedener Mengen miteinander verknüpft werden, kann auch bei anderen Größen beobachtet werden:

- **Vektor:**  $Punkt + Vektor = Punkt$

Der Punkt selbst wird dabei als Vektor interpretiert. Es wird derjenige Vektor verwendet, welcher durch einen Pfeil vom Ursprung eines zugehörigen rechtwinkligen Koordinatensystems zum entsprechenden Punkt repräsentiert werden kann.

- **Uhrzeit:**  $Zeitpunkt + Zeitspanne = Zeitpunkt$

Der Zeitpunkt selbst wird dabei als Zeitspanne zwischen 0 Uhr und dem betrachteten Zeitpunkt verstanden.

- **Länge:**  $Skalenwert + Länge = Skalenwert$

Der Skalenwert selbst wird dabei als Länge zwischen 0 LE und dem entsprechenden Skalenwert aufgefasst.

Bei der Drehung wird der Strahl als Winkel aufgefasst, siehe auch Abschnitt 2. Ist z.B.  $30^\circ$  der dem Strahl zugeordnete Winkel und soll dieser um  $40^\circ$  gedreht werden, dann wird nach dieser Drehung dem Strahl der Winkel  $30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$  zugeordnet. Insbesondere wird bei dieser Beschreibung der Drehung ausgenutzt, dass Winkel zumindest für Summen unter  $180^\circ$  bzw. unter  $360^\circ$  additiv sind.

Operationen können als Abstraktion von Handlungsvorgängen aufgefasst werden (vgl. Aebli 1985). Vor dem Verständnis für die Operation steht damit zunächst der Aufbau von zur Operation gehörenden Handlungsvorstellungen. Handlungsvorstellungen zu Drehungen im obigen Sinne können mit Hilfe mathematischer Modelle der Form  $a + b = c$  erschlossen werden,

Tabelle 1: Mathematische Modelle und deren Deutung

Modell	Beschreibung	Deutung
$a + b = x$	Ein Strahl ( $a$ ) und ein Drehwinkel ( $b$ ) sind gegeben. Gesucht ist der gedrehte Strahl ( $x$ ).	Betrachtung einer Richtungsänderung
$a + x = b$	Zwei Strahlen ( $a$ und $b$ ) sind gegeben. Gesucht ist der Drehwinkel ( $x$ ) der den einen Strahl auf den anderen dreht.	Messen der Größe eines Winkelfeldes
$x + a = b$	Ein bereits in der Richtung geänderter Strahl ( $b$ ) und der Drehwinkel ( $a$ ) sind gegeben. Gesucht ist die Richtung, die der Strahl zuvor hatte ( $x$ ).	Betrachtung einer Richtungsänderung

siehe Tabelle 1. Aus diesen Aufgabenmodellen können Textaufgaben abgeleitet werden, die sinnvollerweise mit Hilfe von bildlichen Darstellungen unterstützt werden.

### Beispiele:

- Sascha schaut in eine Richtung. Paul zeigt in eine andere und sagt: „Dreh dich doch zu mir um.“ Um wie viel Grad muss sich Sascha drehen, um in die Richtung von Paul zu schauen? (Modell  $a + x = b$ , dynamisch)
- Sascha kann von einer Richtung aus das gesamte Feld bis zu einer weiteren Richtung erkennen. Wie groß ist sein Blickwinkel? (Modell  $a + x = b$ , statisch)
- Sascha schaut sich den Fernsehturm an. Er dreht sich schließlich um  $30^\circ$  um. Was schaut er sich nun an? (Modell  $a + b = x$ , dynamisch)
- Paul lenkt das Interesse von Sascha auf einen Leuchtturm. Dazu hat sich Sascha um  $37^\circ$  gedreht. Was hat sich Sascha zuvor angeschaut? (Modell  $x + a = b$ , dynamisch)

Wird die Drehung als Drehung im mathematisch positiven Sinn verstanden, dann kann durch das Modell  $x + a = b$  auch die Drehung im mathematisch negativen Sinn beschrieben werden. Somit werden durch diese Betrachtung beide Drehrichtungen erfasst.

## 3.2 Winkel als Objekt

Die Winkelvorstellung *Winkel als Knick* ist eng mit geometrischen Figuren wie Dreieck oder Zylinder verbunden. Paare von Seiten bzw. Kanten können dabei als Winkel im Sinne eines Knicks betrachtet werden. Umgekehrt können entsprechende Figuren mit Hilfe dieser Knicks „konstruiert“ werden. Dadurch erhält das *geometrische Objekt* Winkel die Funktion eines Konstruktionsobjektes.

Zugänge zu geometrischen Objekten erfolgen im Rahmen der Begriffsbildung. Dem epistemologischen Dreieck folgend werden Realisierungen des Winkels betrachtet, es werden Eigenschaften des Winkels beschrieben sowie dessen Beziehungen zu anderen geometrischen Begriffen, um damit ein mentales Bild des Winkels aufzubauen (vgl. Weigand u. a. 2018).

### 3.3 Winkel als Messgröße

Die Winkelvorstellung *Winkel als Feld* ist eng verbunden mit dem Vergleich verschiedener Winkel. Mit Hilfe des Winkelfeldes kann ein direkter Vergleich zwischen Winkeln erfolgen. Um den Vergleich zu vereinfachen, werden den betrachteten Größen Maße zugeordnet. Statt eines direkten Vergleichs erfolgt dann ein arithmetischer Vergleich zweier Zahlenwerte auf der symbolischen Ebene.

Auch der *Messgröße Winkel* kann ein Maß zugeordnet werden. Dies erlaubt den Zugang zum Winkel über das Stufenmodell zur Erarbeitung von Messgrößen (vgl. Franke 2010).

### 3.4 Winkel als Relation

Etzold verweist in seinen Darstellungen auf einen Artikel von Mitchelmore und White, in welchem die Autoren den Winkelbegriff als „*two lines meeting at a point with an angular relation between them*“ (Mitchelmore und White 1998, zitiert in Etzold 2015) definieren. Der von den beiden Geraden eingeschlossene Winkel beschreibt eine Relation zwischen diesen Geraden und gibt damit dem Winkel die Funktion *Winkel als Relation*.

Wird jeweils nur der kleinere der beiden eingeschlossenen Winkel betrachtet, dann ist diese Relation eine Äquivalenzrelation auf der Menge {Geradenpaare von sich schneidender Geraden}. Den entstehenden Äquivalenzklassen können Winkelmaße bis einschließlich des Maßes des rechten Winkels zugeordnet werden. Winkelmaße zu größeren Winkeln finden bei dieser Betrachtung keine Anwendung.

Ein Zugang zum Funktionsaspekt *Winkel als Relation* wird in Abschnitt 4 beschrieben.

## 4 Zugang zum Funktionsaspekt „Winkel als Relation“

Der Funktionsaspekt *Winkel als Relation* wird im Sinne eines Abstands zwei sich schneidender Geraden interpretiert. Ein Zugang zu dieser Interpretation erfolgt über den gewöhnlichen Abstands begriff.

### 4.1 Gedanken zum Abstands begriff

Der Abstand wird in der (euklidischen) Geometrie zwischen verschiedenen Objekten definiert. Er lässt sich zurückführen auf den Abstand zweier Punkte, welcher inhaltlich als die kürzeste Verbindung dieser Punkte verstanden wird.

Der Abstand zweier Geraden kann dann inhaltlich als kürzeste Verbindung zwischen den Punkten beider Geraden verstanden werden. Er erfüllt die Kriterien einer Äquivalenzrelation und unterteilt damit die Menge {Geradenpaare von parallel zueinander liegender Geraden} in Äquivalenzklassen, denen Längenmaße zugeordnet werden. Eine ausgezeichnete Äquivalenzklasse ist die Klasse zum Längenmaß 0. Diese besteht aus Geradenpaaren, die „übereinander liegen“ bzw. identisch sind.

Wird die inhaltliche Vorstellung des Abstands zweier paralleler Geraden gemäß des Analogieprinzips auf sich schneidende Geraden übertragen, dann führt dies zum Abstand 0 dieser sich schneidenden Geraden unabhängig davon, wie sie zueinander liegen. Hier spiegelt der Abstand die geometrische Sicht nicht mehr adäquat wider, da intuitiv sehr wohl zwischen übereinander liegende Geraden (mit Abstand 0) und Geraden, die sich „nur“ schneiden, unterschieden werden kann. Es bedarf also einem Analogon zum Abstand für parallele Geraden, der diesen Sachverhalt berücksichtigt. Über die „Nähe“ zweier sich schneidender Geraden gibt der jeweils eingeschlossene (kleinere) Winkel Auskunft. Wir nennen diesen im Folgenden *Winkelabstand* beider sich schneidender Geraden.

Der Winkelabstand sich schneidender Geraden kann nicht adäquat auf den Abstand zweier paralleler Geraden übertragen werden. Ein einfaches Gedankenexperiment lässt den Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden „immer mehr nach links wandern“. In Konsequenz wird der eingeschlossene Winkel immer kleiner. Wird dieses Gedankenexperiment weiter fortgesetzt, dann verschwindet der Schnittpunkt „im Unendlichen“ und die Geraden liegen parallel. Der Winkelabstand ist dann 0, die Geraden haben jedoch einen positiven Abstand. Somit müssen beide Abstandsbegriffe (trotz der *Nähe*) von einander abgegrenzt werden.

## 4.2 Eine Lernumgebung zum Kreuzabstand

Die folgende Lernumgebung untersucht Möglichkeiten abseits vom Winkelabstand, die *Nähe* zweier sich schneidender Geraden zu quantifizieren. Dabei werden Punkte auf den jeweiligen Geraden ausgezeichnet und dessen Abstand (im Sinne der kürzesten Verbindung) betrachtet. Der resultierende *Kreuzabstand* wird auf Anwendungstauglichkeit hin überprüft. Es werden Grenzen dieses Abstands aufgezeigt, welche zur Modifikation und schließlich zum Bogenmaß des Winkels führen. Insbesondere wird durch das Bogenmaß ein Abstandsmaß gewählt, welcher nicht die kürzeste Verbindung der ausgezeichneten Punkte darstellt.

Unter dem *Kreuzabstand* zweier sich schneidender Geraden soll im Folgenden das Verhältnis des Abstands zweier Punkte, welche gleichweit vom Schnittpunkt auf je einer dieser Geraden liegen, zum Abstand dieser Punkte vom Schnittpunkt verstanden werden. Als Verhältnis ist der Kreuzabstand dimensionslos. Da zu jedem Paar sich echt schneidender Geraden zwei verschiedene Abstände im obigen Sinne existieren, wird der kleinere der beiden Abstände als *Kreuzabstand* bezeichnet. In diesem Sinne ist der Kreuzabstand eine Zahl im Intervall  $[0, \sqrt{2}]$ .

Die betrachteten Aufgaben der Lernumgebung laden zum geometrischen Forschen ein. Sie sind so gestellt, dass verschiedene allg. mathematische Kompetenzen (bei entsprechender Beachtung im Unterricht) gefördert werden können. Es werden verschiedene Darstellungsebenen (im Sinne des EIS-Prinzips) genutzt, um einzelne Aspekte des Kreuzabstands hervorzuheben.

Eine klassenstufengerechte Einteilung der Lernumgebung gebe ich nicht an. Vielmehr können einzelne Aufgaben je nach Wissenstand der Schüler\*innen in unterschiedlichen Klassenstufen aufgegriffen werden. Dadurch kann der Lerngegenstand dem spiraligen Prinzip folgend langfristig erworben werden. Es ist mit dem entsprechenden Vorwissen jedoch auch möglich, im Rahmen eines Projekts die gesamte Lernumgebung zu bearbeiten. In diesem Fall empfiehlt sich die Klassenstufe 9/10, da dann das nötige Hintergrundwissen vorhanden ist. Dieses umfasst:

- den Abstandsbegriff bei parallelen Geraden und insbesondere das inhaltliche Verständnis über die Additivität der Abstände,
- die Winkelvorstellung als Knick und als Winkelfeld, um insbesondere die Größe zweier Winkel vergleichen zu können sowie ein inhaltliches Verständnis zur Additivität von Winkeln mit Summe kleiner oder gleich  $90^\circ$ ,
- den Umgang mit Geodreieck, Zirkel und Lineal sowie die Erstellung von Tabellen und
- für die vertiefenden Aufgaben: den Satz des Pythagoras, den Ähnlichkeitsbegriff, die Strahlensätze, das Bogenmaß eines Winkels, die Dreieckskonstruktionen nach Kongruenzsätzen (SSS, SWS, ...)

## Aufgabenkanon 1 - Entwicklung des Kreuzabstands

### Aufgabe 1 (Vorbereitung)

Zur Bearbeitung der Aufgabe benötigst du:

- Zwei Holzleisten und einen Nagel sowie einen Hammer
  - Band (Schnur), Schere, Zollstock sowie Schreibutensilien
- (a) Stelle aus den Holzleisten ein *Leistenkreuz* her, wobei die Holzleisten sich etwa im Verhältnis 3:4 schneiden sollen.
  - (b) Teile das Band in verschieden lange *Teilstücke* (nicht länger als der kürzeste Teilabschnitt des Leistenkreuzes) und markiere die Teilstücke mit unterschiedlichen Farben.
  - (c) Trage vom Zentrum des Leistenkreuzes aus die Länge der einzelnen Bandteilstücke ab und markiere die Länge auf den Holzleisten mit der entsprechenden Teilstückfarbe.

Alternativ kann die Herstellung des Leistenkreuzes verkürzt werden, indem zwei (miteinander verbundene) Glieder eines Zollstocks verwendet werden. Das Schnittverhältnis ist dann natürlich anders als das in Aufgabe (a) angegebene.

### Aufgabe 2 (Messen)

- (a) Halte zu verschiedenen Stellungen des Leistenkreuzes den Abstand zwischen je zwei Markierungen gleicher Farbe in einer Tabelle fest. Aus der Tabelle sollte sich Farbe der Markierung und der entsprechende Abstand zu einer festen Leistenkreuzstellung ablesen lassen.
- (b) Betrachte die Werte in der Tabelle, was fällt dir auf? Ist der betrachtete Abstand zwischen zwei farblich gleichen Markierungen ein gutes Maß für den Abstand zweier sich schneidender Geraden? Begründe.

Bei parallelen Geraden ist der Abstand zweier Geradenpunkte die auf der gleichen Senkrechten durch beide Geraden liegen stets gleich, „egal wo die Senkrechte liegt“. Dem gegenüber fällt auf, dass bei der Betrachtung der Abstände zweier in bestimmter Weise auf dem Leistenkreuz gewählten (entsprechenden) Punkte stets unterschiedlich ist. Dies kann also kein gutes Maß für den Abstand zweier sich schneidender Geraden sein, er ist nicht eindeutig.

### Aufgabe 3 (Kreuzabstand)

- (a) Füge deiner Tabelle zwei weitere Spalten hinzu: Länge des jeweiligen Bandteilstücks, Quotient aus Länge des Abstands und Länge des jeweiligen Bandteilstücks. Ergänze die fehlenden Werte. Was fällt dir auf?
- (b) Formuliere einen Abstandsbegriff für sich schneidende Geraden.

Der betrachtete Quotient ist (je nach gemachten Messfehlern) annähernd gleich, wenn die Stellung des Leistenkreuzes nicht verändert wird. Damit ist der Quotient ein guter Kandidat für das Abstandsmaß zwei sich schneidender Geraden, er ist eindeutig.

Die Bezeichnung des Abstandsbegriff wird gemeinsam entwickelt. Ich schlage die Bezeichnung *Kreuzabstand* vor. Inhaltlich sollten die Formulierungen übereinstimmen. Nach einer Auswahl von Schülervorschlägen kann eine gemeinsame Formulierung vorgenommen werden.

## Aufgabenkanon 2 - Untersuchung des Kreuzabstands

### Aufgabe 1 (Eigenschaften)

- (a) Untersuche mit Hilfe des Leistenkreuzes: Wie groß ist der Abstand minimal? Wann ist dies der Fall? Wie groß ist der Abstand maximal? Wann ist dies der Fall?
- (b) Gebe den exakten Wert für den maximalen Abstand an. Mache dir dazu zunächst eine Skizze.

Im Rahmen von Aufgabe (a) wird festgestellt, dass jede Stellung des Leistenkreuzes zu zwei verschiedenen Kreuzabständen führt. Dies kann Ausgangspunkt für eine Einschränkung des Begriffs sein. Hier wird weiterführend stets der kleinere der beiden Werte als Kreuzabstand betrachtet.

Alternativ kann auch über einen orientierten Kreuzabstand nachgedacht werden. Statt den Zollstock zum Messen zu benutzen, kann ein Gummiband an zwei sich entsprechenden Markierungen fixiert werden. Durch einen Stellungswechsel des Leistenkreuzes wird das Gummiband soweit gedehnt, dass es seine maximale Länge bei zwei Längeneinheiten erreicht. Dabei ist eine Längeneinheit gerade der Abstand vom Schnittpunkt zur Markierung.

Der in Aufgabe (b) zu findende exakte Wert ist  $\sqrt{2}$ . In diesem Aufgabenteil wird das zuvor empirisch gefundene Ergebnis mit Hilfe eines mathematischen Modells begründet. Tippkarten können (je nach Vertiefung einer gewählten allg. mathematischen Kompetenz) den Lösungsprozess unterstützen. Zur Vertiefung der Argumentationsfähigkeit wäre z.B. der Tipp *Der Satz des Pythagoras hilft hier weiter.* denkbar.



## Aufgabe 2 (Anwendung)

- (a) Baue einen *Kreuzabstandsmesser*. Wie muss dieser beschaffen sein? Du hast neben dem Leistenkreuz verschiedene weitere Materialien zur Verfügung: mehrere Holzleisten, Nägel unterschiedlicher Größe sowie eine Skalenvorlage ohne Werte.
- (b) Zeichne zwei sich schneidende Geraden auf ein Blatt Papier, die einen Kreuzabstand von 0,9 haben. Beschreibe, wie du vorgehst.
- (c) Befolge die Anweisungen folgender Konstruktionsbeschreibung.

- (1) Zeichne eine Halbgerade  $g$  mit Startpunkt  $A$ .
- (2) Zeichne einen Kreis  $K_1$  um  $A$  mit Radius  $r = 5$  cm. Der Schnittpunkt von Kreis  $K_1$  und Halbgerade  $g$  sei  $B$ .
- (3) Zeichne einen Kreis  $K_2$  um  $B$  mit Radius  $r = 3$  cm. Einer der beiden Schnittpunkte von  $K_1$  und  $K_2$  sei  $C$ .
- (4) Zeichne eine Halbgerade  $h$  mit Startpunkt  $A$ , welche durch Punkt  $C$  geht.

Miss den Kreuzabstand zwischen  $g$  und  $h$ . Kannst du den Kreuzabstand auch ohne Messen direkt aus der Konstruktionsbeschreibung ablesen?

- (d) Gegeben seien die Dreieckstücke  $b = 9$  cm,  $c = 14$  cm und der Kreuzabstand 0,6 zwischen  $a$  und  $b$ . Konstruiere das zugehörige Dreieck. Wie gehst du vor?

Zur Unterstützung der Arbeitsweise in Aufgabe (a) werden Tippkarten zur Verfügung gestellt:

- (1) *Mit Hilfe der einzutragenden Skalenwerte soll der Kreuzabstand direkt ablesbar sein. Der Skalenwert hat keine Einheit (die Skala ist keine Längenskala).*
- (2) *Je nach gewähltem Abstand zum Zentrum des Holzleistenkreuzes müssen die Skalenwerte überdacht werden.*

Alternativ zur Aufgabe (a) können wieder die Glieder eines Zollstocks betrachtet werden. Ein Zollstock mit drei Gliedern kann Kreuzabstände bis maximal 1 messen, wird noch ein weiteres Glied hinzugefügt, sind alle hier betrachteten Kreuzabstände messbar. Vom Vorteil ist es auch hier, eine Skalenvorlage für die „Messleiste“ vorzubereiten, damit die Schüler\*innen die Skala auf dem Zollstock und die Skala des Kreuzabstands auseinander halten können. Eine inhaltliche Auseinandersetzung zu den verschiedenen Skalen kann dabei über Tipp-Karten erfolgen: *Ein Glied des Zollstocks ist 20cm lang. Welchem Skalenwert entspricht auf der dritten Leiste eine Länge von 5cm?*

Zur Lösung von Aufgabe (b) kann der in (a) gebaute Kreuzabstandsmesser verwendet werden. Er wird hier nicht als Messgerät, sondern als Konstruktionswerkzeug verwendet. Sie Schüler\*innen können jedoch auch alternativ mit bereits vorhandenem Konstruktionswissen einen alternativen Weg finden (siehe auch Aufgabe (c)).

Die Konstruktionsbeschreibung in Aufgabe (c) beschreibt die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basisseitenlänge 3 cm und Schenkellänge 5 cm. Das Verhältnis von Basislänge zu Schenkellänge ist gerade der gesuchte Kreuzabstand. Umgekehrt dient die Dreiecks-

konstruktion nach SSS dazu, auch ohne Kreuzabstandsmesser sich schneidende Geraden mit vorgegebenen Kreuzabstand zu konstruieren.

Schließlich können in Aufgabe (d) die gefundenen Erkenntnisse genutzt werden. So kann das Wissen auf Aufgabe (c) angewendet werden, um die Konstruktion auszuführen. Oder es kommt erneut der Kreuzabstandsmesser zum Einsatz.

### **Aufgabe 3 (Reflexion)**

Überprüfe folgende Aussagen:

- Je weiter die Messskala von der Mitte des Kreuzabstandmessers entfernt ist, desto weiter liegen die Skalenpunkte 0.5 und 0.6 voneinander entfernt.
- Der Winkel  $60^\circ$  hat den Kreuzabstand 1.
- Zwei Winkel sind gleich groß, wenn die zugehörigen Kreuzabstände gleich groß sind.
- Ist der Kreuzabstand des Winkels  $\alpha$  kleiner als der Kreuzabstand des Winkels  $\beta$ , dann gilt  $\alpha > \beta$ .
- Wird bei der Dreiecks konstruktion nach WSW mit Kreuzabständen statt mit Winkeln konstruiert, dann ist die Konstruktion nicht mehr eindeutig.

In der Reflexion werden noch einmal wichtige Aussagen über den Kreuzabstand zusammen gefasst. Die Schüler\*innen müssen die Aussagen kritisch überprüfen. Dadurch soll ein vertieftes Verständnis für den Kreuzabstand aufgebaut werden.

### **Aufgabe 4 (Mathematische Begründung des beobachteten Zusammenhangs)**

Das Experiment hat gezeigt, dass der Quotient aus Abstand der Markierungen und Abstand zum Zentrum des Leistenkreuzes bei fester Einstellung ungefähr gleich ist. Kannst du dies auch mathematisch begründen? Entwerfe dazu zunächst eine Skizze.

Aufgabe 4 kann je nach Betrachtung als Problemaufgabe oder als Aufgabe zur Förderung weiterer allg. math. Kompetenzen gesehen werden. Wird z.B. die Kompetenz Kommunizieren vertieft, dann eignet sich folgendes Vorgehen. Jeweils zu zweit erhalten die Schüler\*innen ein Tippkarten-Päckchen, welches Impulse für den Begründungsweg liefert. Die Schüler\*innen erstellen daraus eine Argumentationskette. Im Klassengespräch werden verschiedene Argumentationsketten präsentiert. Die Schüler\*innen bewerten die einzelnen Argumentationsketten.

Es erscheint hier nützlich, verschiedene Tippkarten-Päckchen zur Verfügung zu stellen, um auch die Argumentationsvielfalt darzulegen, welche zur Eindeutigkeit des Kreuzabstandes führt. Zwei Tippkarten-Päckchen sind in Abbildung 1 zu finden. Tippkarten-Päckchen 1 verwendet für die Argumentation den Ähnlichkeitsbegriff. Tippkarten-Päckchen 2 nutzt die Beziehungen in der V-Figur aus, die sich im zweiten Strahlensatz widerspiegeln. Die Reihenfolge der Tipps in den einzelnen Kartenpäckchen ist bewusst „rückwärts“ gewählt. Ich gehe davon aus, dass diese Strategie des Rückwärtsarbeiten dafür sorgt, dass die Schüler\*innen das Ziel ihrer Argumentation nicht aus den Augen verlieren.

<p><i>Tipp-Kartenpäckchen 1</i></p> <p>Tipp 1: Ähnliche Dreiecke stimmen in entsprechenden Seitenverhältnissen überein.</p> <p>Tipp 2: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.</p> <p>Tipp 3: Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke sind gleich groß.</p>	<p><i>Tipp-Kartenpäckchen 2</i></p> <p>Tipp 1: Der zweite Strahlensatz hilft.</p> <p>Tipp 2: Es ist eine V-Figur erkennbar.</p> <p>Tipp 3: Stufenwinkel sind genau dann gleich groß, wenn die zugehörigen Geraden parallel sind.</p> <p>Tipp 4: Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke sind gleich groß.</p>
---	--

Abbildung 1: Tipp-Kartenpäckchen zur Aufgabe 4 des zweiten Aufgabenkanons

### Aufgabenkanon 3 - Grenzen des Kreuzabstands

#### Aufgabe 1 (Grenzen des Kreuzabstands)

- (a) Erstelle eine Tabelle mit Kreuzabstandswerten und Winkelwerten. Die Kreuzabstandswerte sind vorgegeben: 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2.
- (b) Erstelle eine Tabelle mit Winkelwerten und Kreuzabstandswerten. Die Winkelwerte sind vorgegeben:  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ .
- (c) Zeichne zu den jeweiligen in (a) und (b) gegebenen Tabellen einen Funktionsgraphen. Was fällt dir auf?

Es wird in dieser Aufgabe der Zusammenhang zwischen den Kreuzabständen und den zugehörigen Winkelwerten betrachtet. Die Betrachtung der Funktionsgraphen zeigt, dass es einen Zusammenhang gibt, dass dieser jedoch nicht proportional ist.

#### Aufgabe 2 (Reflexion)

Überprüfe folgende Aussagen:

- Das Leistenkreuz mit eingeschlossenen Winkel  $40^\circ$  lässt sich mit zwei Leistenkreuzen mit jeweils eingeschlossenem Winkel  $20^\circ$  vollständig auslegen.
- Das Leistenkreuz mit Abstand 1,2 lässt sich mit zwei Leistenkreuzen mit Abstand 0,6 vollständig auslegen.

Die Folge der fehlenden Proportionalität ist u.a., dass der Kreuzabstand nicht additiv ist. Dies spiegelt sich in den Aussagen der Reflexion wider. Als Konsequenz daraus ist also ein Abstands begriff für sich schneidende Geraden gesucht, welcher die Additivität erhält.

#### Aufgabe 3 („Nicht der kürzeste Weg!“)

Untersuche, ob sich die Markierungen auf dem Leistenkreuz so verbinden lassen, dass eine Halbierung des Winkel zur Halbierung der Länge der Verbindung führt.

Diese Aufgabe führt zur Länge des Kreisbogens, welches im oben betrachteten Verhältnis das Bogenmaß des Winkels beschreibt. Damit erscheint das Bogenmaß als geeigneter (additiver) Vertreter des Abstandsmaßes zweier sich schneidender Geraden zu sein. Da das Bogenmaß ein Winkelmaß ist, wird dadurch der Winkel als Relation zweier sich schneidender Geraden „legitimiert“. Ein inhaltliches Verständnis für die Wahl des Winkelabstands ist damit aufgebaut.

Ein mögliches Vorgehen zur Herleitung der Bogenlänge ist die Verwendung der Winkelhalbierenden zur sukzessiven Halbierung entstehender Teilwinkel bei fest vorgegebenen Ausgangswinkel. Zu jedem dieser Teilwinkel werden die entsprechenden Markierungen im Sinne des Kreuzabstands verbunden. Es entsteht ein Polygonzug, dessen Länge sich entsprechend sukzessiv der Länge desjenigen Kreisbogens nähert, der durch die beiden entsprechenden Markierungen auf den Ausgangsgeraden und dem Schnittpunkt dieser Geraden gegeben ist.

Aufgrund der immer wieder durchgeführten Halbierung der Teilwinkel und der anschließenden Neubetrachtung der Kreuzabstände kann die Additivität des Bogenmaßes inhaltlich anschaulich begründet werden.

### **4.3 Abschließende Gedanken zur betrachteten Lernumgebung**

In der Lernumgebung haben wir den Kreuzabstand als Abstandsmaß zweier sich schneidender Geraden kennen gelernt. Es wurde deutlich:

- Der Kreuzabstand ist zum Vergleich zweier Winkel geeignet. Je größer der Winkel ist, desto größer ist auch der Kreuzabstand.
- Das Kreuzabstandsmaß ist leicht bestimmbar und kommt ohne den Winkelbegriff aus. Der Kreuzabstand kann somit in diesem Kontext als alternativer Winkel verwendet werden.
- Der Kreuzabstand ist nicht additiv.

Aus mathematikdidaktischer Sicht wurde deutlich:

- Durch die Betrachtung des Kreuzabstandes wird Wissen und Können aus dem Bereich der Geometrie reaktiviert und vertieft, namentlich: Dreieckskonstruktion nach Kongruenzsätzen, Strahlensätze, Ähnlichkeitsbegriff, etc.
- Der didaktische Weg vom Kreuzabstand zum Bogenmaß kann dem genetischen Prinzip zugeordnet werden. Es wird eine Grenze aufgezeigt, die sich durch eine vertiefende Betrachtung des Kreuzabstandsmaßes ergeben hat. Diese führt zur Modifizierung dieses Maßes im Sinne der Genese.

## **5 Fazit**

Die Betrachtung der Funktionsaspekte von Winkeln ermöglicht eine Klassifizierung verschiedener Zugänge zum Winkelbegriff. Es können bisherige Zugänge eingeordnet werden. Durch die Betrachtung entstehen aber auch neue Zugänge.

Die Deutung des Winkels als Abstand zweier sich schneidender Geraden zeigt einen spannenden Aspekt des Winkels, der sich meines Wissens erst durch die Betrachtung der Funktionsaspekte des Winkels gezeigt hat. Im aktuellen Unterrichtsgeschehen spielt dieser Funktionsaspekt wenn überhaupt, dann eher eine untergeordnete Rolle.

Die Lernumgebung zum Funktionsaspekt *Winkel als Relation* offenbart die Möglichkeit, Schüler\*innen im Rahmen des Winkelbegriffs forschend tätig werden zu lassen. Inhaltlich stellt sich die Frage der Legitimität insbesondere bei der Frage, wie tiefgründig Schüler\*innen ein Verständnis für den Abstands begriff aufbauen sollen. Die Betrachtung des Kreuzabstandes zeigt aber insbesondere auch innermathematische Anwendungsmöglichkeiten bereits vorhandenen Wissens und Könnens.

## Literatur

- Aebli, Hans (1985). „Das operative Prinzip“. In: *Mathematik lehren* 11.1985, S. 4–6.
- Bender, Peter (1982). „Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion“. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*.
- Etzold, Heiko (2015). „Neue Zugänge zum Winkelbegriff“. In: *Tagungsbeitrag zum AK Geometrie, Saarbrücken*. URL: [https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/Etzold\\_AKGeo\\_2015-1\\_Kurzfassung.pdf](https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/Etzold_AKGeo_2015-1_Kurzfassung.pdf).
- Franke, Marianne (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Hrsg. von Friedhelm Padberg. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Hischer, Horst (2018). „Marlene und die Zahlen: Permutationen durch Variation“. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* 105, S. 31–34.
- Krainer, K. (1989). „Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs“. Diss. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.
- Mitchelmore, Michael und Paul White (1998). „Development of angle concepts: A framework for research“. In: *Mathematics Education Research Journal* 10.3, S. 4–27.
- Weigand, Hans-Georg u. a. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. 3. Aufl. Springer.