

Fundamentale Ideen

Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung

Arbeitskreis Geometrie

Tagung vom 9. – 11. September 2016 in Saarbrücken

Vortrag von Marie-Christine von der Bank



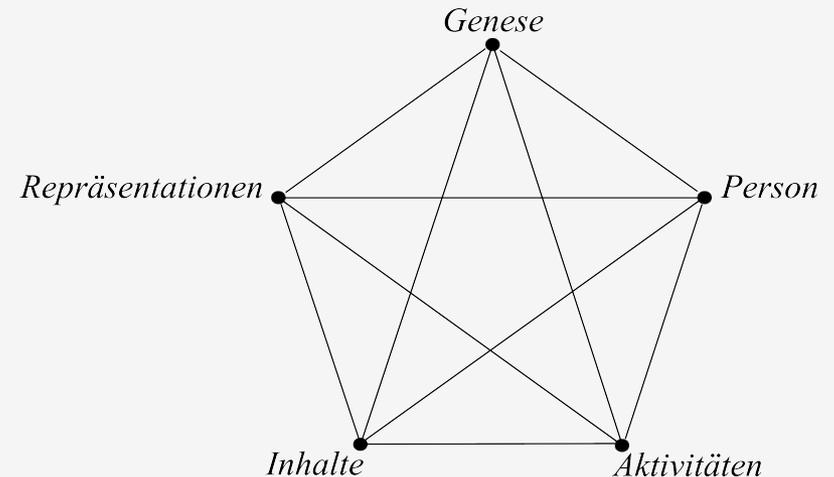


1. Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen ...

1. Überblick über die Forschungstradition
2. Entwicklung einer Gesamtperspektive

2. ... zu deren unterrichtspraktischer Nutzung

1. Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie zum Vernetzungspentagrammen
2. Exemplarische Anwendung des Vernetzungspentagrammen



1. Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen ...



1.1 Überblick Forschungstradition

1.2 Entwicklung einer Gesamtperspektive





Urtheorien: ALFRED SCHREIBER und PETER BENDER (1983)

Universelle Ideen sind allgemeine Schemata [im Sinne WITTMANN'S], die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess erst in Gang setzen oder weitertreiben. Sie zeichnen sich aus durch

- vertikal
- Weite („logische“ Allgemeinheit),
 - Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen) und
 - Sinn (Verankerung im Alltagsdenken).

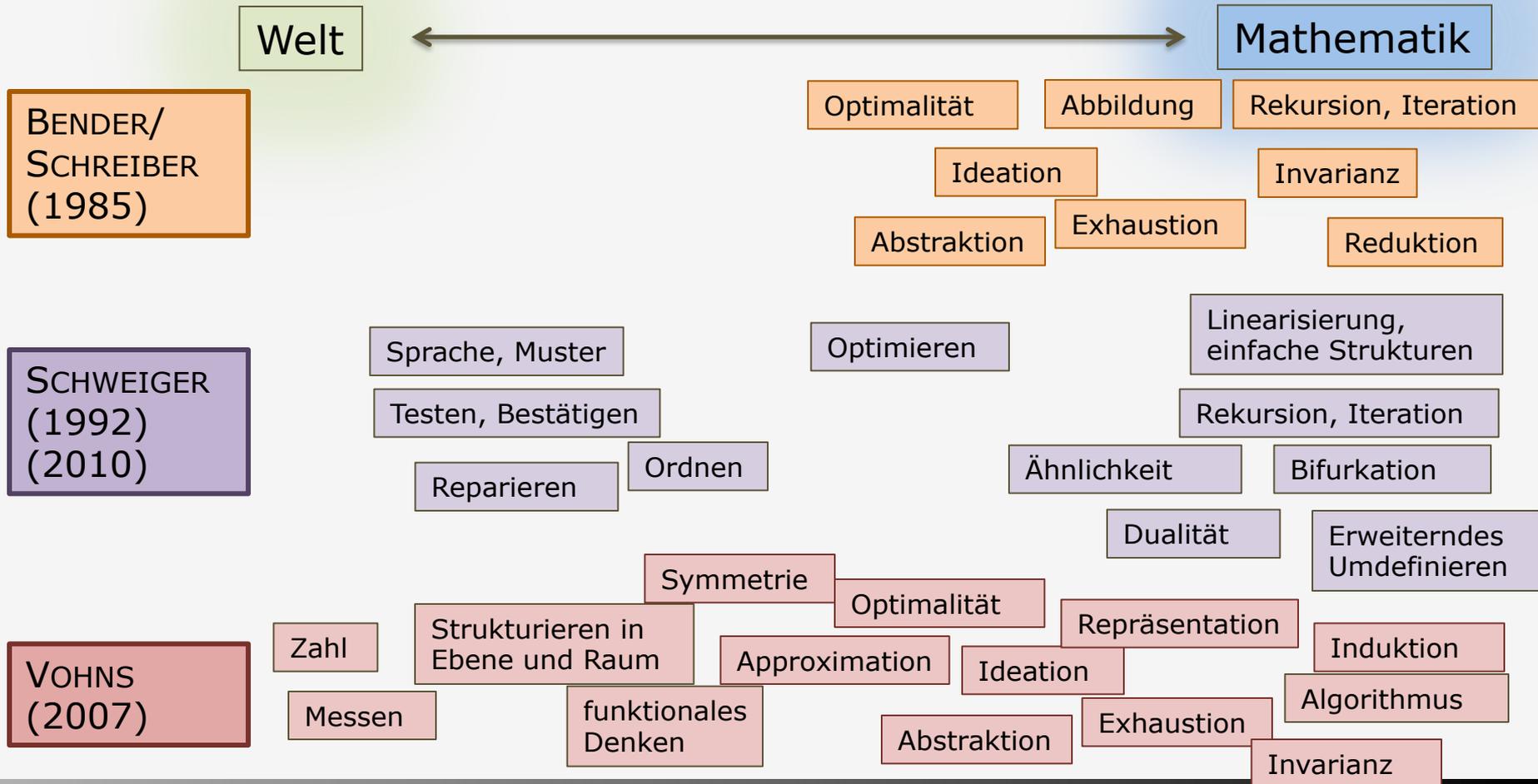
FRITZ SCHWEIGER (1992)

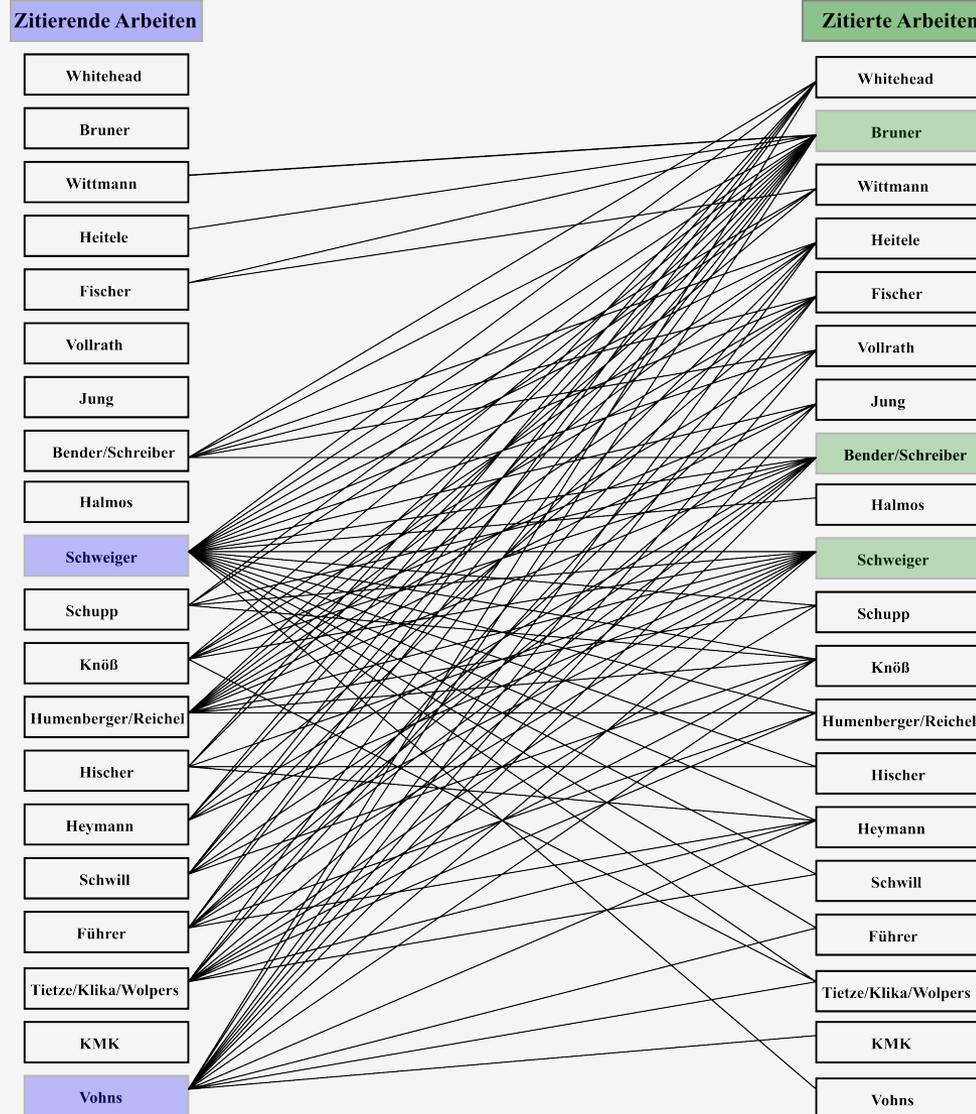
Eine **fundamentale Idee** ist ein Bündel von Handlungen, Strategien, oder Techniken, die

- vertikal
- tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
 - den Mathematikunterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,
 - in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
 - als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,
 - in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.



Das Spannungsverhältnis *Welt* ↔ *Mathematik*







WALTER JUNG (1978)

- Plädoyer gegen den lernzielorientierten Unterricht und für die Betonung von Ideen.
- Mit Idee ist mehr gemeint als mit Struktur oder Verfahren.
 - Die Idee verstehen heißt den Sinn verstehen.
 - Idee schließt die Vorstellung einer geistiges Leben ordnenden Potenz mit ein.

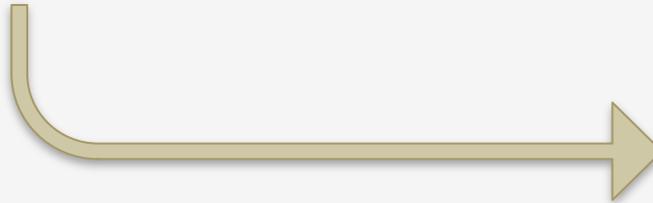
„Die Idee einer Sache ist etwas vage, braucht keine Detaillierung, macht sie überhaupt erst sinnvoll.“

(Jung, 1978, S. 170)



HANS JOACHIM VOLLRATH (1978)

- Strukturierung des Mathematikunterrichts durch Leitideen, da sich an ihnen **Bildung** vollziehen kann.



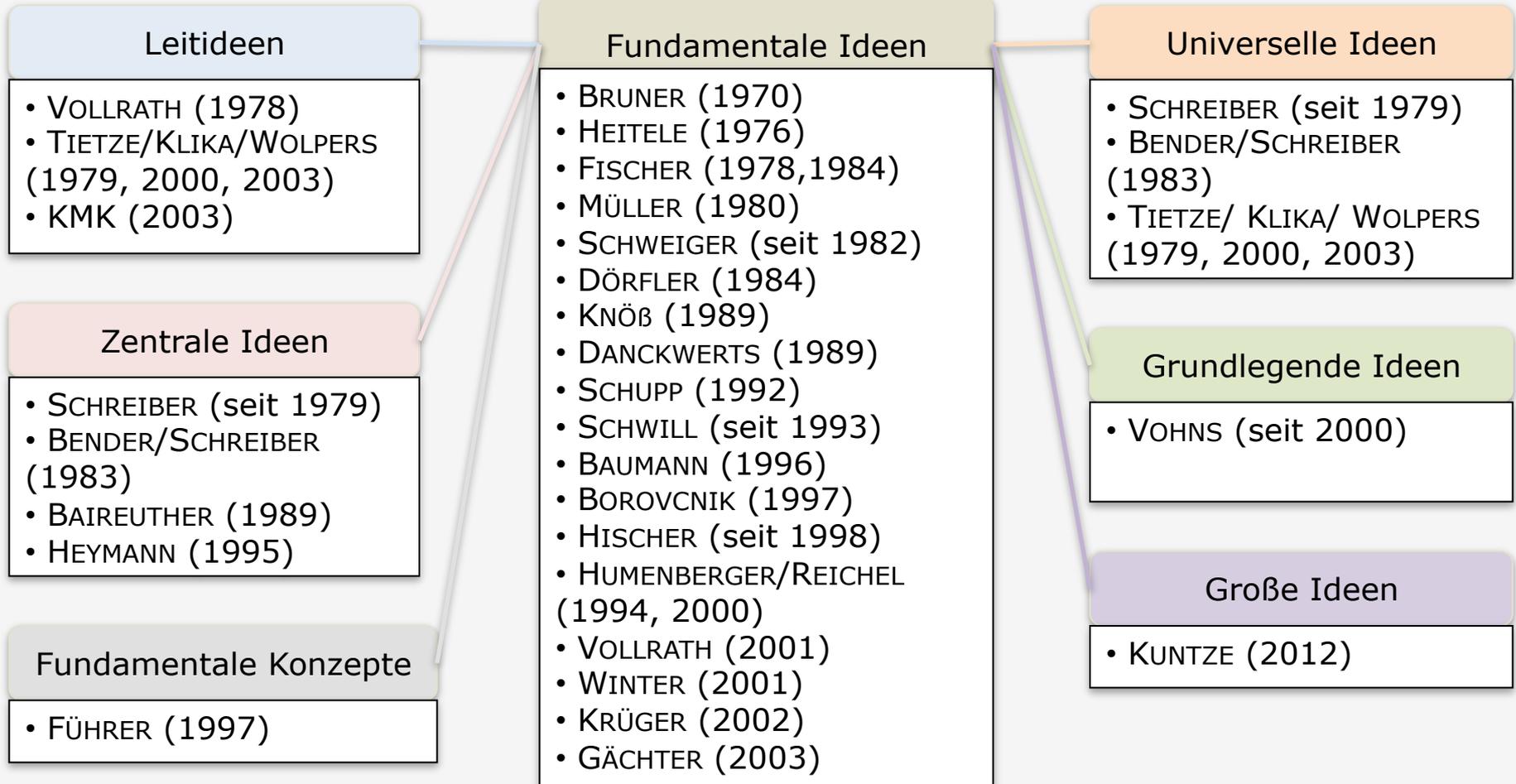
- Ideen sind
 - entscheidender Gedanken eines Themas,
 - wesentlicher Kern einer Überlegung,
 - fruchtbarer Einfall bei der Lösung eines Problems,
 - leitende Fragestellung einer Theorie,
 - zentrale Aussage eines Satzes,
 - Zusammenhänge, die einem Algorithmus zugrunde liegen,
 - Vorstellungen, die mit Begriffsbildung verbunden sind.

Ideen

- entzünden,
- lassen zum Kern der Dinge vorstoßen,
- lassen den roten Faden erkennen,
- machen die Kraft den eigenen Denkens erfahrbar,
- helfen Belastungen ertragen,
- bewahren Inhalte vor dem Vergessen.



Synonyme(?) für Fundamentale Ideen

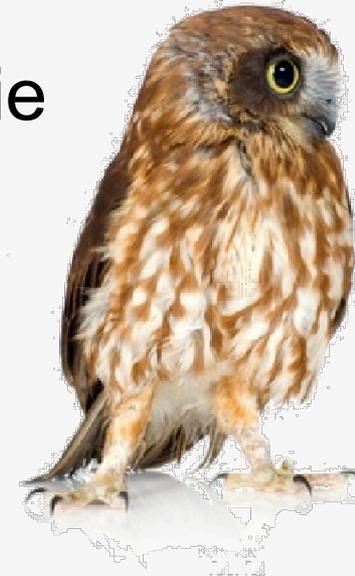


1. Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen ...



1.1 Überblick Forschungstradition

1.2 Entwicklung einer Gesamtperspektive





Pragmatisches Begriffsverständnis von „idea“

- Häufig umschrieben mit „concept“ (Peirce, Dewey, Bruner)
- PEIRCE: I only desire to point out how impossible it is that we should have an idea in our minds which relates to anything but conceived sensible effects on things. Our idea of anything is our idea of its sensible effects [...]
(Peirce 1968, S. 58)
- DEWEY: Ideas are „anticipated consequences (forcasts) of what will happen when certain operations are executed under and with respect to observed conditions [...] An idea is first of all an anticipation of something that may happen; it marks a *possibility*.“
(LW 12: 113)
- BRUNER: „their power lies [...] in the fact that ideas provide instruments for experience“
(Bruner 1969, S. 120)



Progressive Inquiry nach DEWEY:

- Stadium 1: Eine „indeterminate situation“ bildet den Ausgangspunkt des Prozesses,
- Stadium 2: Die Person erkennt, dass eine zweifelerregende Situation vorliegt, die erforscht werden muss,
- Stadium 3: Auf Basis gesammelter Daten werden Lösungsvorschläge als Hypothesen („ideas“) generiert,
- Stadium 4: Die generierten Hypothesen werden auf ihre Verträglichkeit mit der kognitiven Gesamtstruktur der Person überprüft und ggfs. revidiert,
- Stadium 5: Praktische Erprobung der „ideas“ und Feststellung ihres Wahrheitswerts anhand ihrer Konsequenzen. Erneutes Durchlaufen des Prozesses beim Scheitern der „idea“.

(LW 12: 107 ff.)

Neither inquiry nor the most abstractly formal set of symbols can escape from the cultural matrix in which they live, move and have their being.

(LW 12: 28)

→ Wissenschaftliche Erkenntnisse sind stets mit Werturteilen verknüpft und spiegeln gesellschaftliche und individuelle Einstellungen wider!



Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen:

Fundamentale Ideen sind für die Mathematik und das Mathematiktreiben zentrale Aspekte wie Inhalte, Handlungen und Einstellungen. Ihr Zusammenspiel macht das Wesen der Mathematik aus.

Im Mathematikunterricht dienen sie der begründeten Stoffauswahl und der Vernetzung von unterrichtsrelevanten Aspekten von Mathematik wie:

- Inhalten,
- Repräsentationen,
- Aktivitäten,
- Genese und
- Aspekten, welche die Person des Schülers betreffen.



... abstrakte(re) Ideen ...

Begriffsideen	Prozessideen	Theorieideen	Persönlichkeitsideen
<ul style="list-style-type: none"> • Objekte • Ordnungen • Netze • Charakterisierung 	<ul style="list-style-type: none"> • Strategien • Heuristiken • Handlungen • Operationen 	<ul style="list-style-type: none"> • Gebiete • Erkenntnis- und Begründungskulturen • Systeme • Sprachen 	<ul style="list-style-type: none"> • Interesse und Neugier • Intuition • Kreativität • Beharrlichkeit

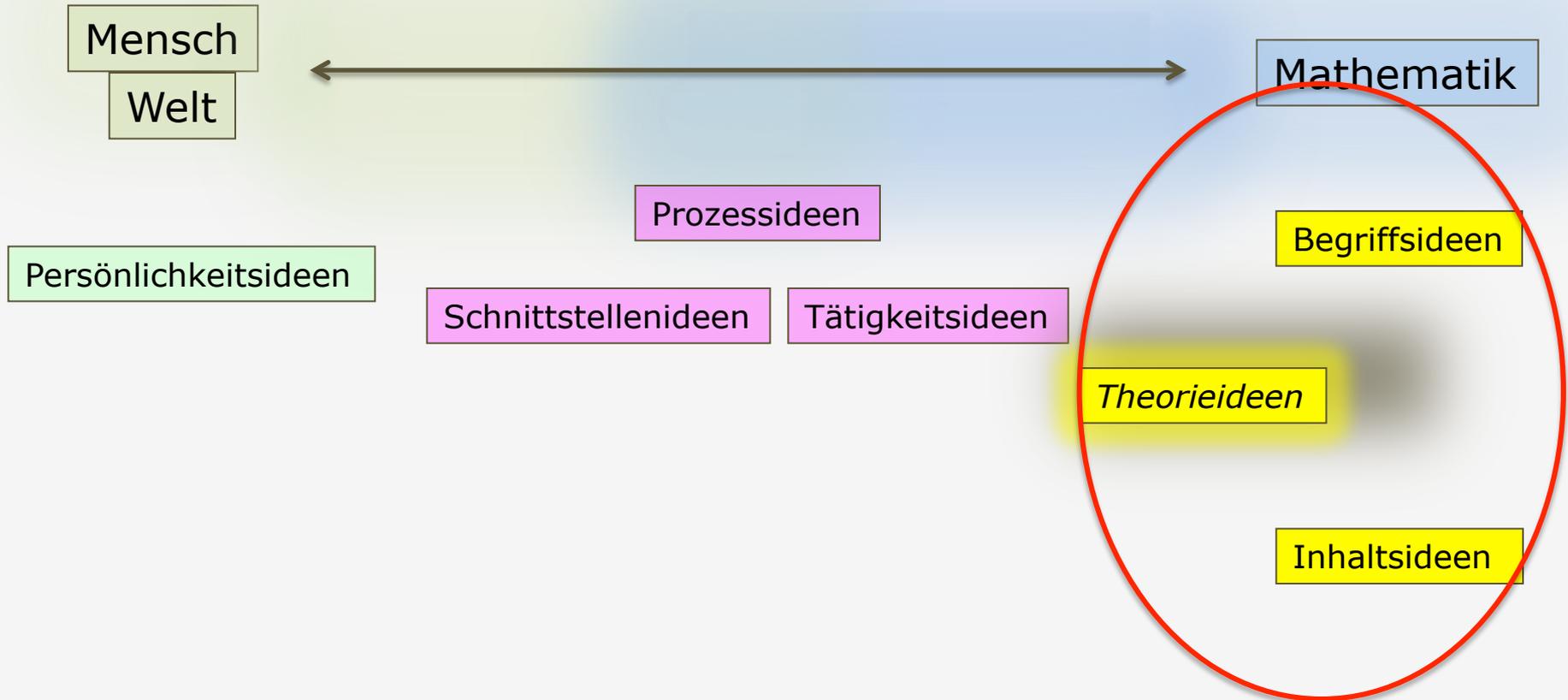
... und konkrete(re) Ideen

Inhaltsideen	Schnittstellenideen	Tätigkeitsideen	
<ul style="list-style-type: none"> • Zahl • Algorithmus • Maß • Raum & Form • Funktion • Zufall • Approximation 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemlösen • Modellieren • Argumentieren • Fragen • Darstellen • Kommunizieren 	<ul style="list-style-type: none"> • Approximieren • Optimieren • Algorithmisieren • Vernetzen • Dualisieren • Ordnen/ Strukturieren 	<ul style="list-style-type: none"> • Exaktifizieren • Formalisieren • Passen • Verallgemeinern • Begründen • Deduzieren

(Lambert 2012)



Ideenkategorien im Spannungsverhältnis





Zoom: Die Seite

Mathematik

ATIYAH, HALMOS, BOURBAKI,
SCHREIBER, STEEN

Begriffsideen

Objekte,
Ordnungen, Netze,
Charakterisierungen

abstrakte(re)
Ideen

Theorieideen

Meta-Ebene

Gebiete,
Erkenntnis- &
Begründungskulturen,
Systeme, Sprachen

Inhaltsideen

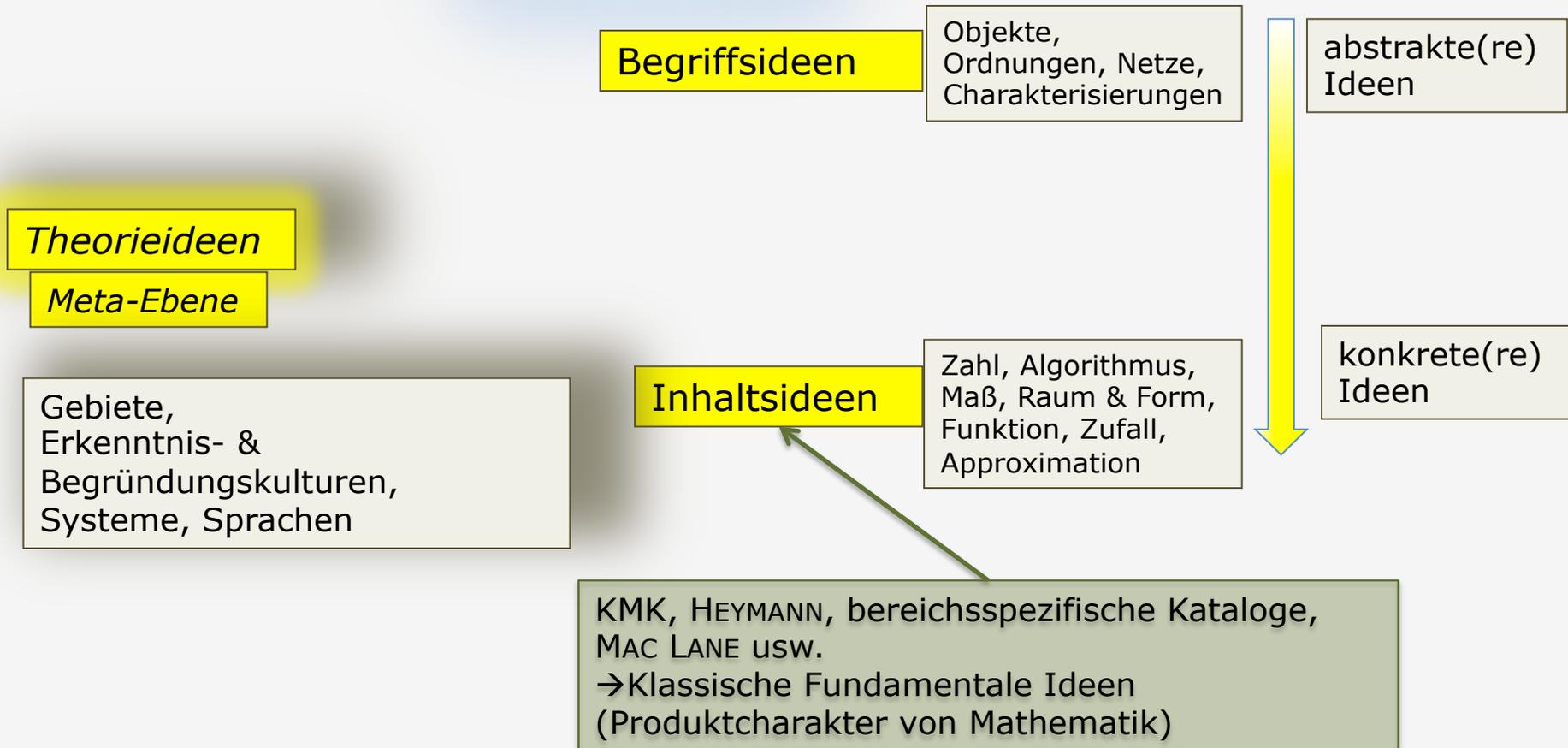
Zahl, Algorithmus,
Maß, Raum & Form,
Funktion, Zufall,
Approximation

konkrete(re)
Ideen



Zoom: Die Seite

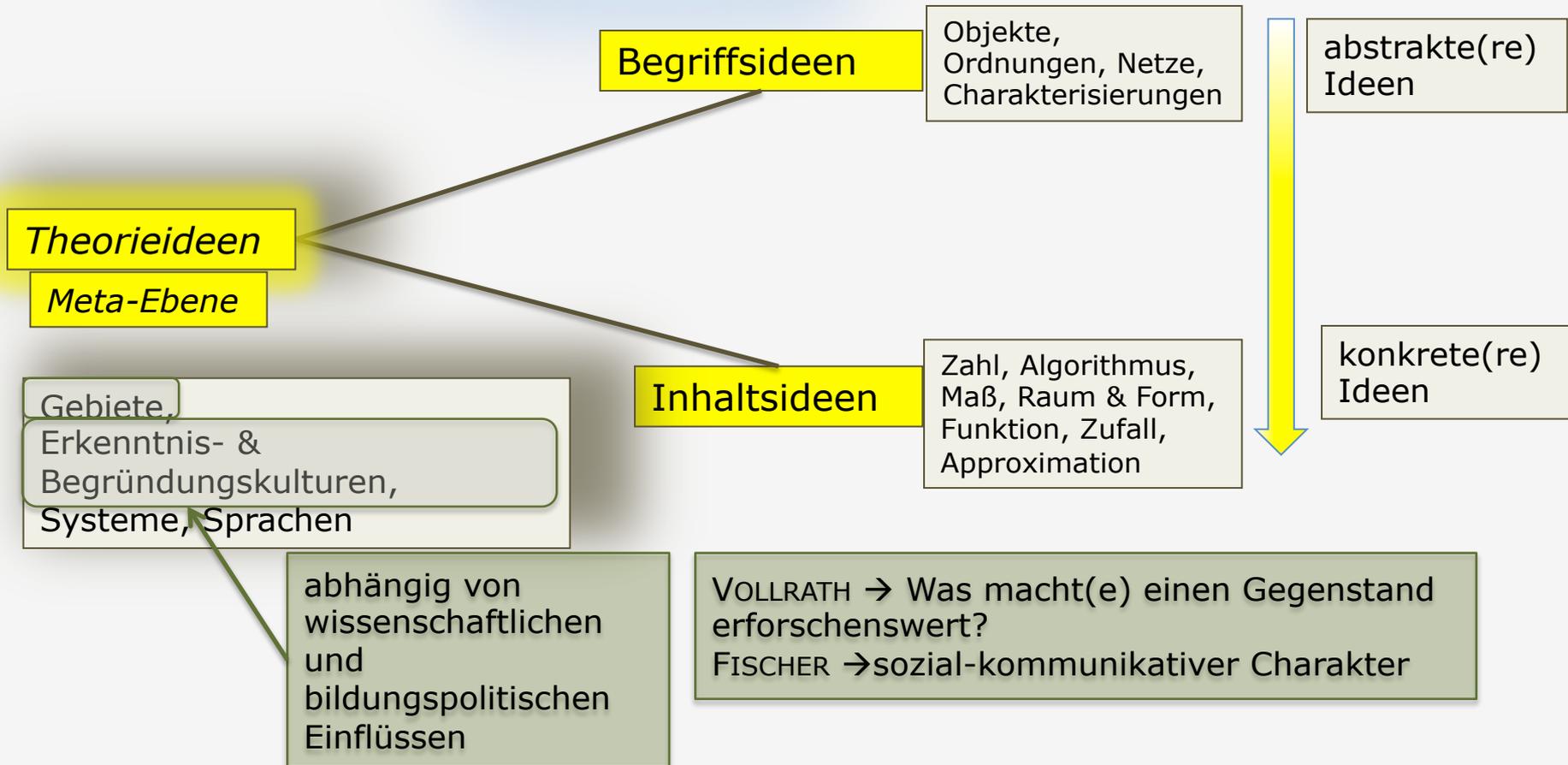
Mathematik





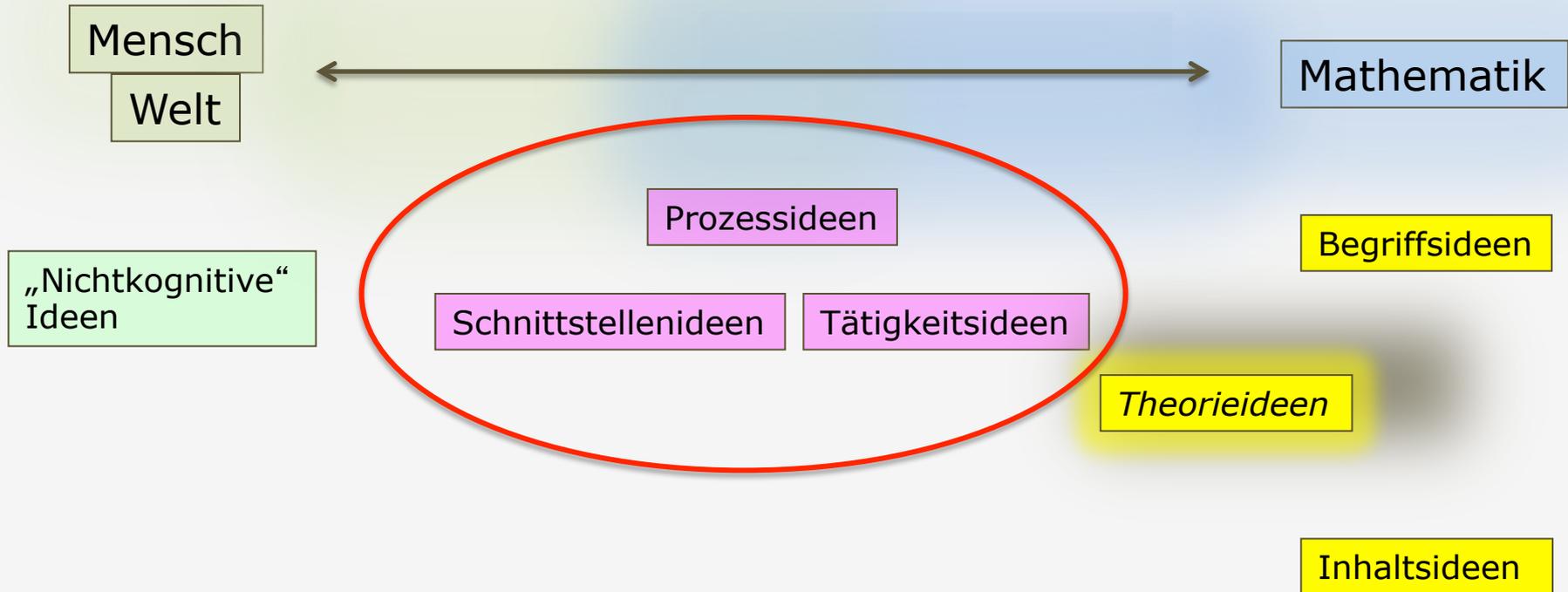
Zoom: Die Seite

Mathematik



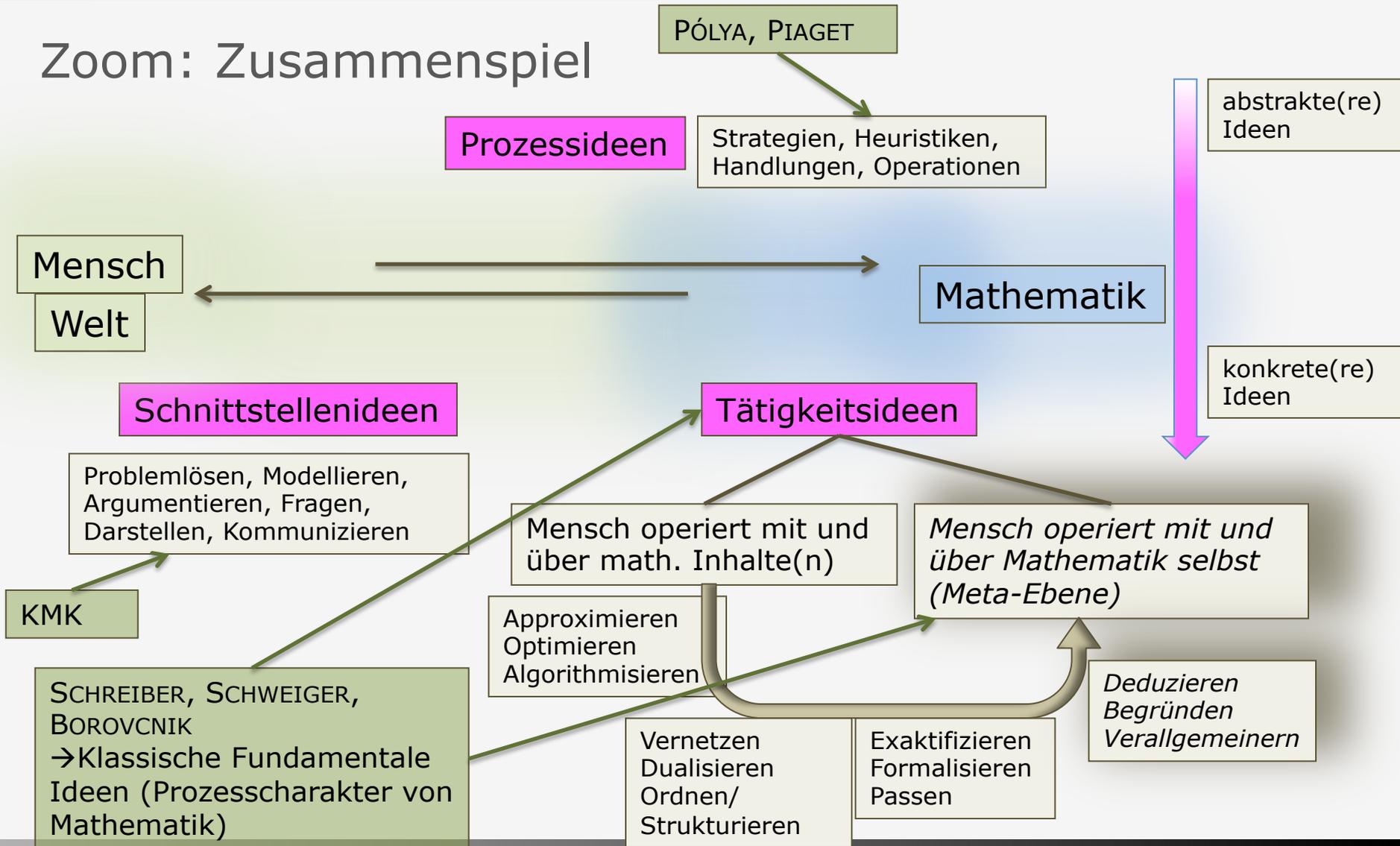


Ideenkategorien im Spannungsverhältnis



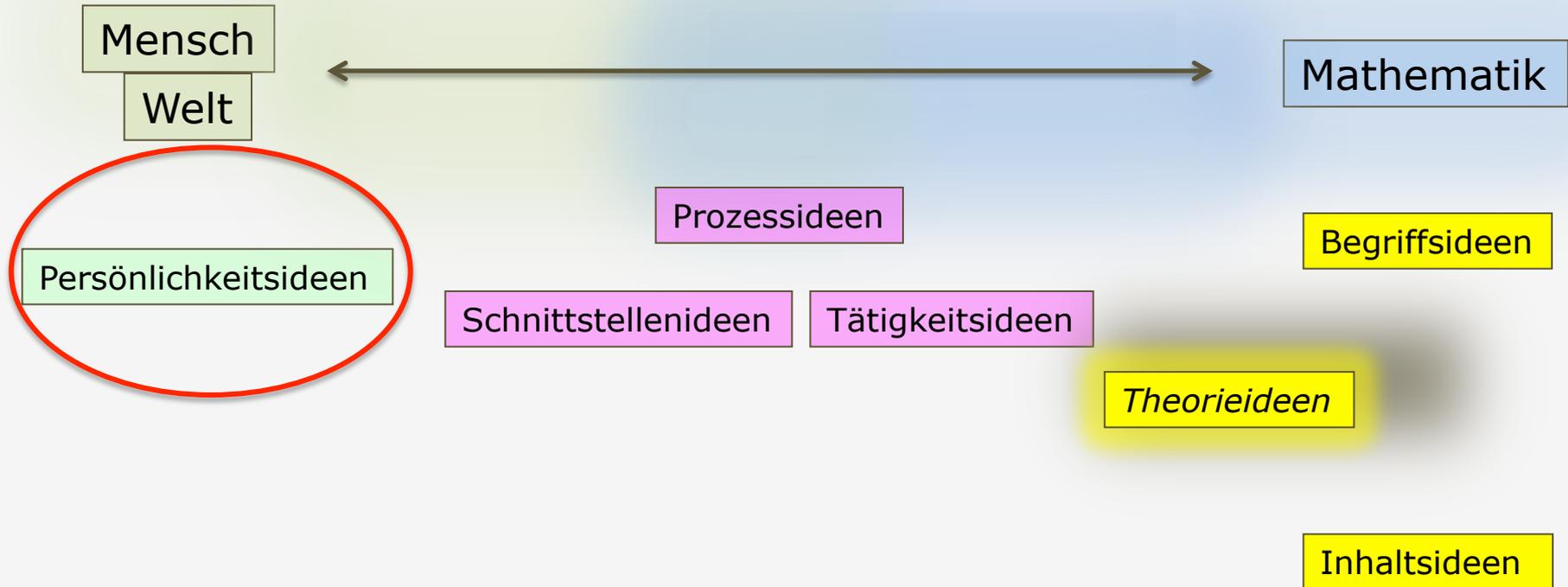


Zoom: Zusammenspiel





Ideenkategorien im Spannungsverhältnis





Zoom: Die Seite

Mensch

Welt

Persönlichkeitsideen

Interesse und Neugier
Intuition
Kreativität
Beharrlichkeit

Warum Persönlichkeitsideen?

1. Mathematik und Mathematikunterricht beinhalten nicht nur rein kognitive sondern auch emotionale und affektive Komponenten:
 - HALMOS: "The criterion for quality is beauty, intricacy, neatness, elegance, satisfaction, appropriateness – all subjective, but all somehow mysteriously shared by all."
(Halmos 1968, S. 388)
 - WINTER: „Lernprozesse [sind] umso erfolgreicher [...], je mehr die Lernenden bei der Entwicklung ihrer eigenen Handlungskompetenzen selbst aktiv (einschließlich emotionaler Eingebundenheit) beteiligt sind“
(WINTER 2016, S. 217)
 - BMUKK: Kompetenzorientierte Lehrplan für die AHS Oberstufe in Österreich
→ Schöpferisch-kreative Aspekt (Mathematik als Schule des Denkens, die Phantasie anregt und Kreativität fördert)
(BMUKK 2004, S. 1)



Zoom: Die Seite

Mensch

Welt

Persönlichkeitsideen

Interesse und Neugier
Intuition
Kreativität
Beharrlichkeit

Warum Persönlichkeitsideen?

1. Mathematik und Mathematikunterricht beinhalten nicht nur kognitive Komponenten.
2. Nichtkognitive Aspekte spielen bei der Auseinandersetzung mit Fundamentalen Ideen eine wichtige Rolle
 - DEWEY: "Fantasies arise when the function an idea performs is ruled out when it is entertained and developed" (LW 12: 113)
 - BRUNER: "Mastery of the fundamental ideas of a field involves not only the grasping of general principles, but also the development of an attitude towards learning and inquiry, towards guessing and hunches, towards the possibility of solving problems on one's own [...]" (Bruner 1960, S. 20)
 - FÜHRER: Fundamentale Konzepte sind Orientierungspunkte, die „mit Verhaltenszielen kombiniert [...]" werden müssen. (Führer 1997, S. 85)
 - REICHEL: Die Auseinandersetzung mit Fundamentalen Ideen dient der Vermittlung gewisser Einstellungen, Sichtweisen und Haltungen gegenüber Mathematik, zu denen auch „Freude“ und „Phantasie“ gehören. (Reichel 1994, S. 169)



Zoom: Die Seite

Mensch

Welt

Persönlichkeitsideen

Interesse und Neugier
Intuition
Kreativität
Beharrlichkeit

Warum diese Persönlichkeitsideen?

1. Interesse und Neugier:

- BIKNER-AHSBAHS: „Das Interesse einer Person regt diese zu gegenstandsbezogenen Aktivitäten an, die auf Erkenntniszuwachs ausgerichtet sind, als wertvoll empfunden werden und vorrangig mit positiven Emotionen verbunden erlebt werden.“

(Bikner-Ahsbahs 2001, S. 17)

- DORSCH: Neugier wird als die Tendenz definiert, „Neues zu erleben, zu untersuchen, zu erkunden, zu erfahren und geht [daher] mit explorativen Verhaltensweisen einher“

(Dorsch 2014, S. 1158)

→ Interesse und Neugier sind Auslöser des aktiven Erkenntnisprozesses



Zoom: Die Seite

Warum diese Persönlichkeitsideen?

Mensch

Welt

Persönlichkeitsideen

Interesse und Neugier
Intuition
Kreativität
Beharrlichkeit

2. Intuition:

- BURTON: „65 of the 79 (83%) were comfortable with the notion that something operated in their learning process to which they were happy to give the name intuition, or insight“

(Burton 2004, S. 75)
- POINCARÉ: „Gefühl für mathematische Ordnung [...], welches [...] verborgene Relationen und Harmonien erraten läßt“

(Poincaré 1973, S. 39)
- DAVIS/HERSH: „Intuition ist nicht die direkte Wahrnehmung von etwas, was außerhalb und ewig ist. Sie entsteht aus dem Effekt, den gewisse Erfahrungen auf den menschlichen Geist haben, Erfahrungen, die sich aus dem Umgang, der Handhabung konkreter Objekte [...] ergeben.“

(Davis/Hersh 1985, S. 421)
- BOROVCNIK: „Wenn Lernende die offizielle Darstellung einer mathematischen Theorie lesen, dann müssen sie Zugang zu dieser Welt der intuitiven Vorstellungen des Mathematikers bekommen, ansonsten werden sie kein tieferes Verständnis für die Theorie entwickeln können.“

(Borovcnik 1992, S. 7)



Zoom: Die Seite

Warum diese Persönlichkeitsideen?

Mensch

Welt

Persönlichkeitsideen

Interesse und Neugier
Intuition
Kreativität
Beharrlichkeit

3. Kreativität:

- HARDY: "It will be obvious by now that I am interested in mathematics only as a creative art."

(Hardy 2005, S. 30)

- POINCARÉ bzw. HADAMARD: Phasen des kreativen Problemlösens:
 - Präparation,
 - Inkubation,
 - Inspiration,
 - Elaboration

(Poincaré 1973) bzw. (Hadamard 1996)

- WETH: Kreativität ist der „schöpferische Akt des Bildens von Problemen, des Schaffens von mathematischen Begriffen und die anschließende intellektuelle Auseinandersetzung“

(Weth 1999, S. 18)

→ Intuition und Kreativität dienen der Lösungsfindung in Problemstellungen



Zoom: Die Seite

Warum diese Persönlichkeitsideen?

Mensch

Welt

Persönlichkeitsideen

Interesse und Neugier
Intuition
Kreativität
Beharrlichkeit

4. Beharrlichkeit:

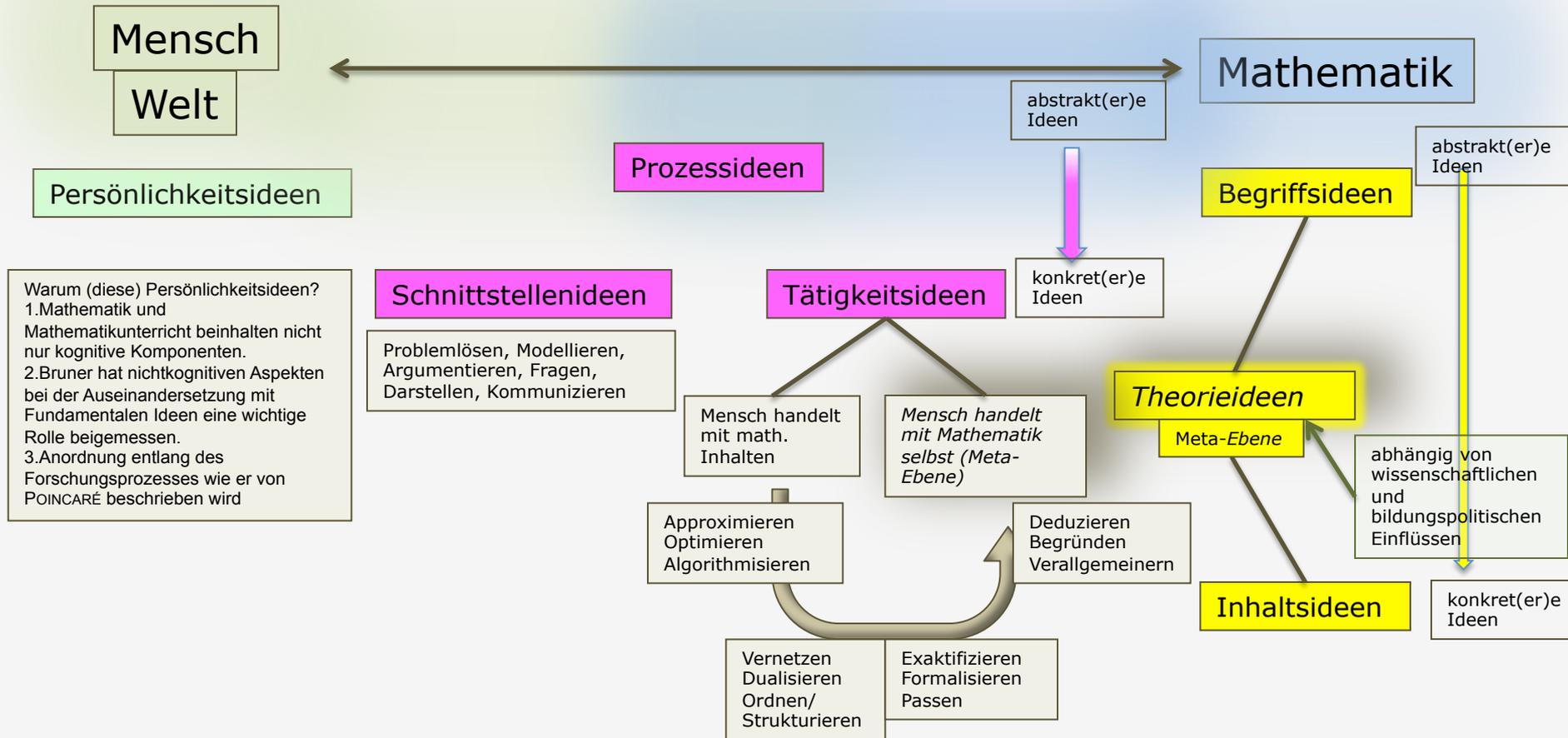
- DORSCH: „Bewältigungsstil im Umgang mit Belastungen“
- positive Bewältigungsstrategien = aktives Problemlösen:
 - Ausdauer,
 - Toleranz gegenüber Frustration,
 - Durchhaltevermögen,
 - Unbeirrbarkeit

(Dorsch 2014, S. 1245)

→ Beharrlichkeit hält den Problemlöseprozess in Gang



Ideenkategorien im Spannungsverhältnis



2. ... zu deren unterrichtspraktischer Nutzung



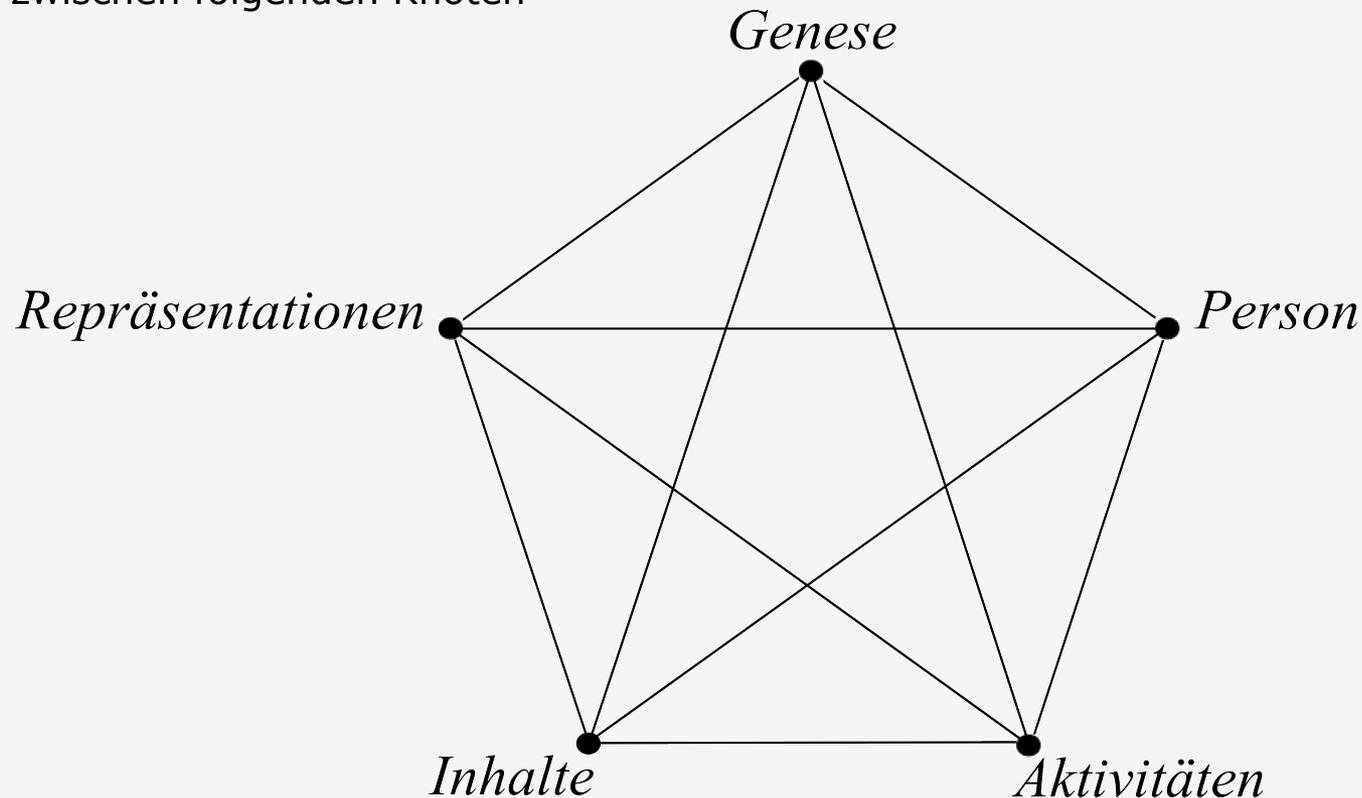
2.1 Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie zum Vernetzungspentagraphen

2.2 Exemplarische Anwendung des Vernetzungspentagraphen



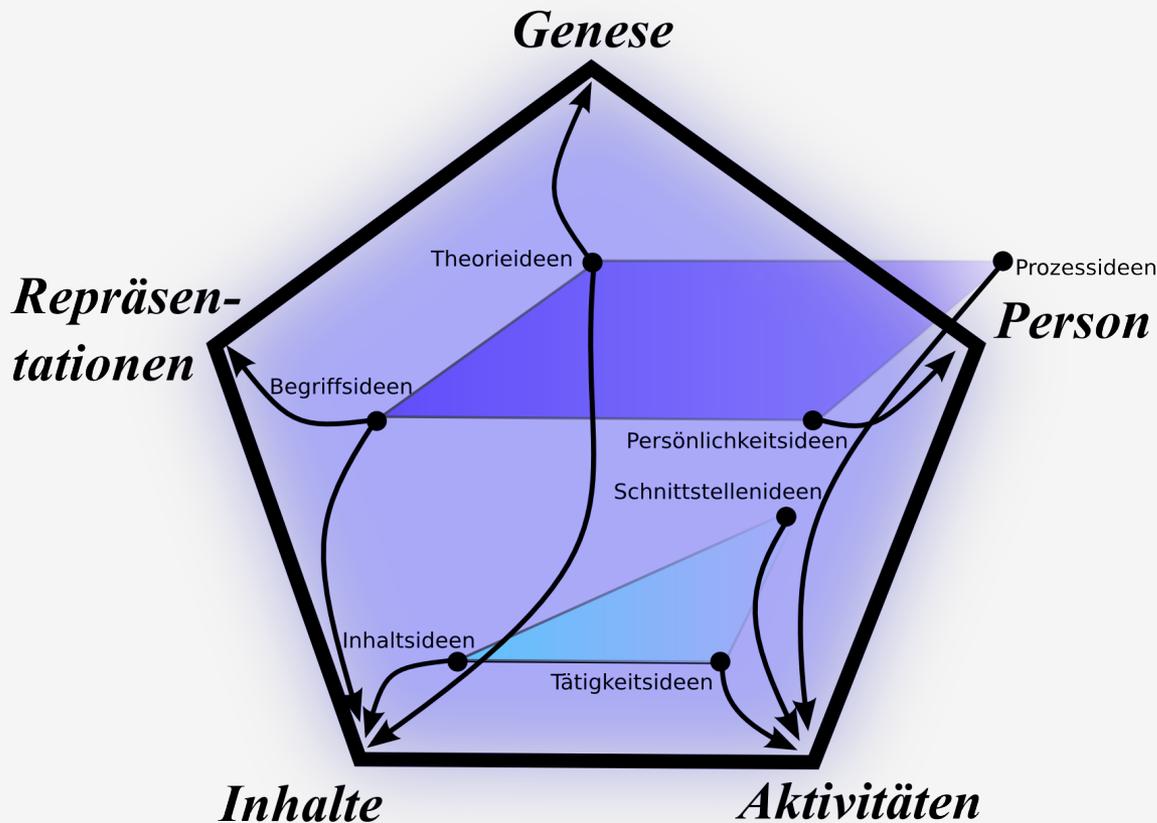
Ziel: Vernetzungskriterium

Fundamentale Ideen sollen vielfältige Vernetzungen im Unterricht ermöglichen, u.a. zwischen folgenden Knoten





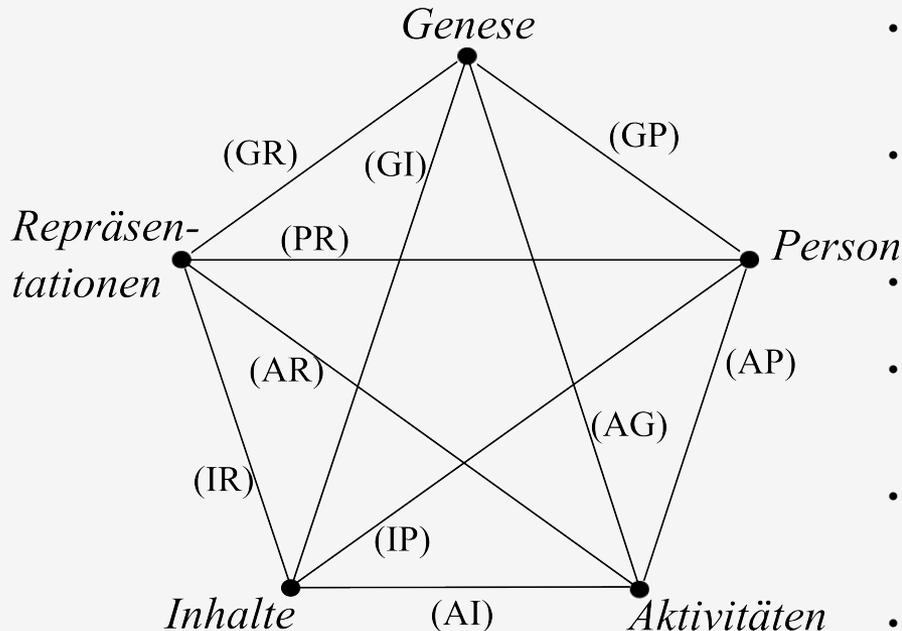
Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen



- Prozessideen, Schnittstellenideen und Tätigkeitsideen konkretisieren sich im Unterricht als Tätigkeiten
→ **Knoten Aktivitäten**
- Objekte der Begriffsideen und Inhaltsideen sind Inhalte von Unterricht
→ **Knoten Inhalte**
- Darstellungsformen von Inhalten und Objekten spielen im Unterricht eine wichtige Rolle
→ **Knoten Repräsentationen**
- Historische Genese der Theorieideen sollte im Unterricht thematisiert werden
→ **Knoten Genese**
- Persönlichkeitsideen beinhalten Aspekte, welche die Person des Schülers betreffen
→ **Knoten Person**



Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen



- **(IR): Inhalte** werden spezifisch **repräsentiert**
- **(IG): Historische Aspekte** können **Inhalte** von Unterricht sein & Beweise gehören zu Inhalten von Unterricht
- **(AI): Aktivitäten** sind untrennbar mit **Inhalte** im Unterricht verknüpft & Aktivitäten und Strategien können selbst zu Inhalten von Unterricht werden
- **(IP):** Mit **Inhalten** können auch Aspekte, welche die **Person** des Schülers betreffen angestrebt werden
- **(AR):** Verschiedene **Repräsentationen** fordern verschiedene **Aktivitäten** & Aktivitäten provozieren Repräsentationen (Visualisieren)
- **(AP):** Vielfältige **Aktivitäten** können Aspekte, welche die **Person** des Schülers betreffen ansprechen
- **(AG): Aktivitäten** unterliegen **historischem** Wandel
- **(PR):** Bestimmte **Repräsentationen** werden genutzt um Aspekte der **Person** des Schülers anzusprechen
- **(GP):** In unterschiedlichen **Epochen** wird die **Person** des Schülers unterschiedlich stark fokussiert
- **(GR):** Für historisch-**genetische** Inhalte werden unterschiedliche **Repräsentationen** gewählt & Repräsentationen ändern sich im historischen Wandel

2. ... zu deren unterrichtspraktischer Nutzung



2.1 Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie zum Vernetzungspentagraphen

2.2 Exemplarische Anwendung des Vernetzungspentagraphen



Methode: Cognitive Apprenticeship (Collins/Brown/Newman)

- Anwendung von Elementen einer beruflichen Bildung auf kognitive Lernprozesse in der Schule

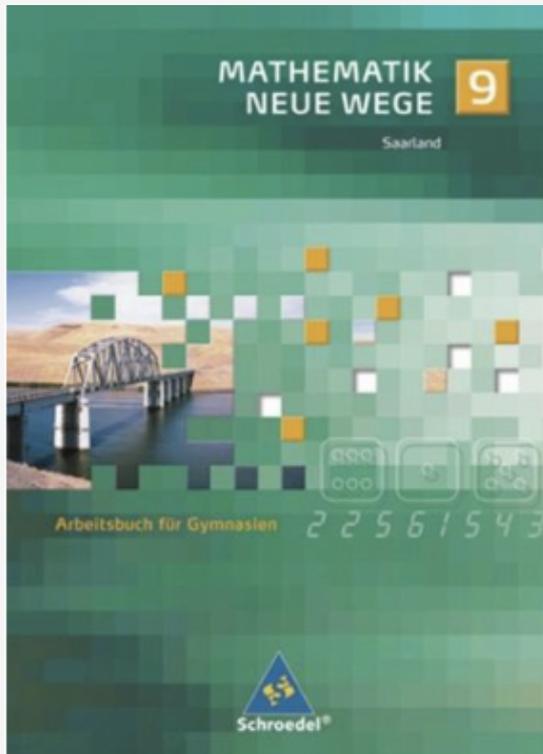
Characteristics of Ideal Learning Environments:	
Contents	Domain knowledge; Heuristic strategies; Control strategies; Learning strategies
Methods	Modelling; Coaching; Scaffolding and fading; Articulation; Reflection; Exploration
Sequence	Increasing complexity; Increasing diversity; Global before local skills
Sociology	Situated learning; Culture of expert practice; Intrinsic motivation; Exploiting cooperation; Exploiting competition



1. Schritt: <u>Lehrplananalyse</u>	Knoten des Vernetzungspentagrammen dienen als Orientierung; Inhalte stehen im Vordergrund
2. Schritt: <u>Analyse der Konzeption von Schulbuchreihe und -buch</u>	Knoten des Vernetzungspentagrammen dienen als Orientierung; keine systematische Erschließung der Inhalte; Fokus liegt auf 1. Eindruck von Aktivitäten, Repräsentationen, Genese und Person
3. Schritt: <u>„Grobscan“</u>	Der Knoten Inhalte steht im Fokus; andere Knoten dienen der Orientierung und erfassen Auffälligkeiten
4. - 8. Schritt: <u>Detailanalysen</u>	Erfassung der behandelten Inhalte (4.), Repräsentationen (5.), Aktivitäten (6.), Genese (7.) und Aspekte, die sich auf die Person des Schülers beziehen (8.); Offenlegung der angesprochenen Fundamentalen Ideen; Erkennung von Auslassungen und Lücken Fokussierung jeweils eines Knotens
9. Schritt: <u>Diskussion der Kanten</u>	Kanten visualisieren wahrgenommene Vernetzungen zwischen den Knoten
10. Schritt: <u>Konstruktive Nutzung</u>	Allgemeine Überlegungen zum Inhalt der einzelnen Knoten und der Bedeutung der Kanten (vgl. Kapitel 5.2) geben Anregungen zur reichhaltigeren Füllung von Knoten und Kanten



Mathematik Neue Wege 9



Kapitel 4

Quadratische Funktionen und Gleichungen

4.1	Einführung in quadratische Funktionen.....	92
4.2	Entdeckungen an Graphen quadratischer Funktionen.....	102
4.3	Quadratische Gleichungen	112
4.4	Problemlösen mit quadratischen Funktionen und Gleichungen.....	123
	<i>CHECK UP</i>	128



Überblick Schulbuch

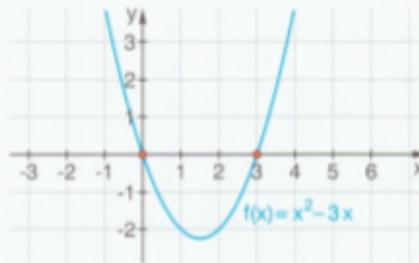
Quadratische Gleichungen der Form $x^2 - rx = 0$

$x^2 - rx = 0$ **Ausklammern**
 $x(x-r) = 0$ **Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.**

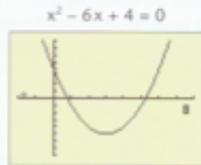
$x = 0$ oder $x - r = 0$
 $x_1 = 0$ $x_2 = r$

Schreibweise mit Lösungsmenge:
 $L = \{0; r\}$

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 - rx = 0$ haben für $r \neq 0$ immer zwei Lösungen.



Häufig erhält man beim grafisch-tabellarischen Lösen einer Gleichung nur eine ungefähre Lösung. Eine solche Lösung heißt **Näherungslösung** oder numerische Lösung, man schreibt dann $x \approx 5,236$ oder $x = 5,236\dots$
 Eine exakte Probe ist hier dann nicht möglich.



Wenn die Lösungen irrational sind, kann man grafisch-tabellarisch grundsätzlich nicht die exakten Lösungen finden.
 $x_1 = 5,236$
 $x_2 = 0,763$

X	Y ₂	X	Y ₂
5,236	-0,0021	7,6	0,176
5,237	-0,0018	7,61	0,1312
5,238	-0,0012	7,62	0,0864
5,239	-0,0004	7,63	0,0416
5,24	0,0004	7,64	0,0068
5,241	0,0012	7,65	-0,038
5,242	0,0018	7,66	-0,092
Y ₂ = -5,04E-4		Y ₂ = .004169	

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + 10x + 16 = 0$ | -16
 $x^2 + 10x = -16$ | +25

Quadratische Ergänzung:
 Halbiere den Koeffizienten von x und quadriere das Ergebnis: $(\frac{10}{2})^2 = 25$

$x^2 + 10x + 25 = -16 + 25$
 $(x + 5)^2 = 9$
 $x + 5 = 3$ oder $x + 5 = -3$
 $x_1 = -2$ $x_2 = -8$
 $L = \{-2; -8\}$

Addiere auf beiden Seiten 25
Binomische Formel
Wurzelziehen

Lösen von quadratischen Gleichungen durch quadratisches Ergänzen



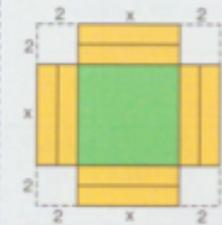
Al-Chwarizmi

Der arabische Mathematiker Al-Chwarizmi schrieb im 9. Jahrhundert ein Mathematikbuch. In diesem Buch beschäftigte er sich auch mit dem Lösen von quadratischen Gleichungen. Um die quadratische Ergänzung für die Gleichung $x^2 + 8x = 65$ zu finden, bedient er sich des folgenden Verfahrens:



(1) Al-Chwarizmi beginnt mit einem Quadrat mit der Seitenlänge x cm und 8 Rechtecken, mit der Länge x cm und der Breite 1 cm.

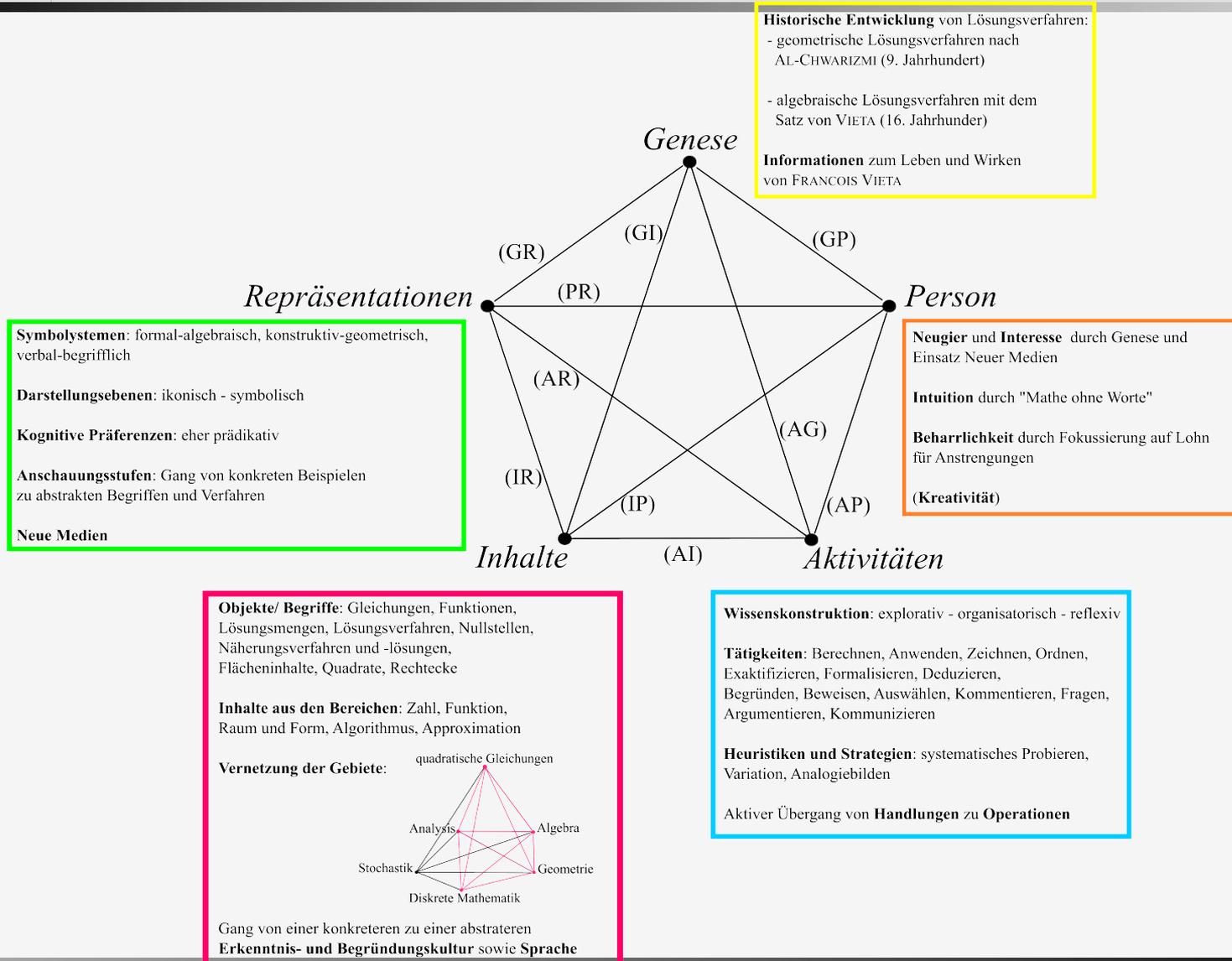
(2) Er teilt die 8 Rechtecke in Gruppen zu je 2 Rechtecken auf und fügt sie jeder Seite des Quadrates an. Die Fläche dieser Figur beträgt 65 cm^2 (siehe Gleichung).

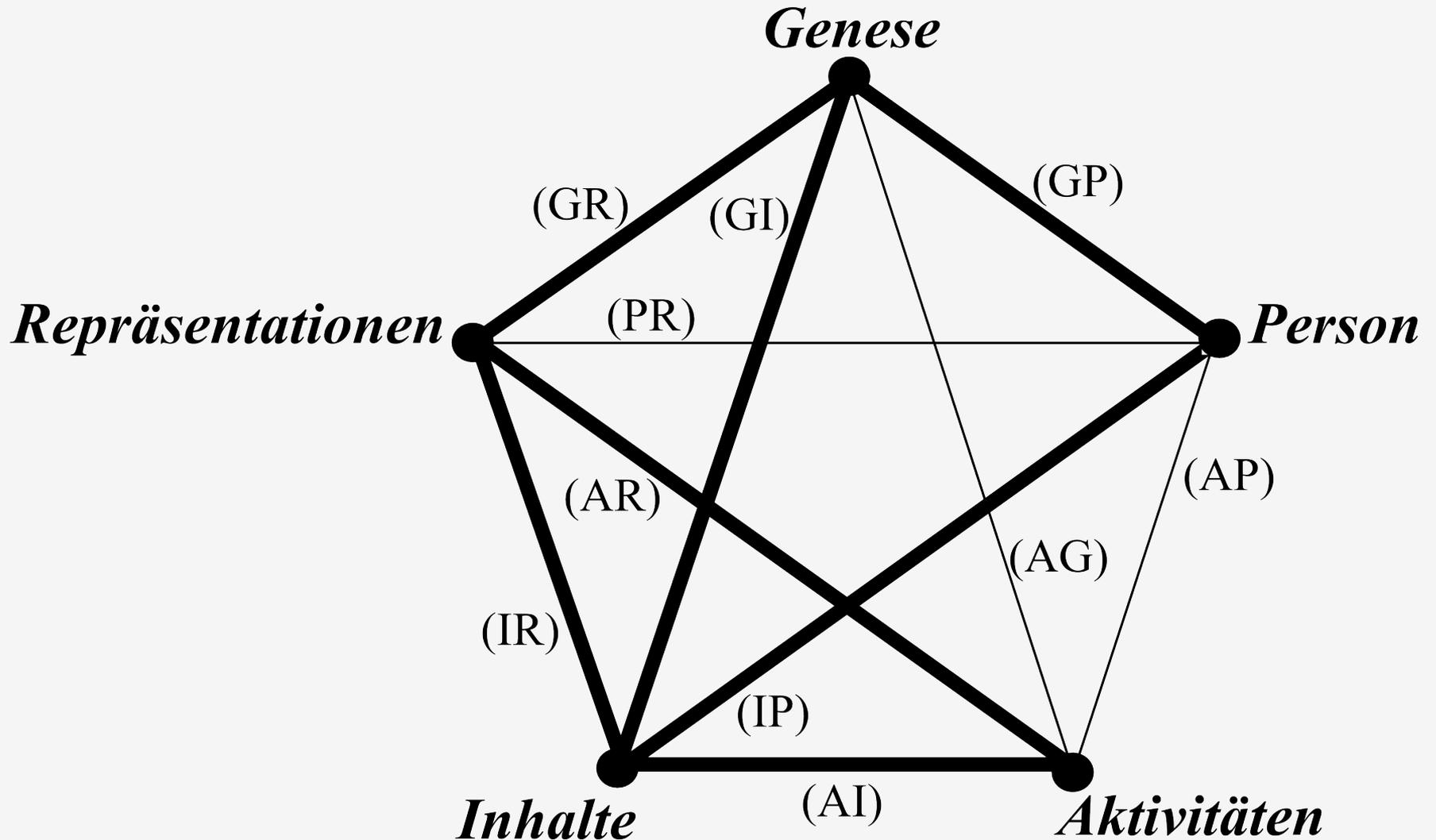


(3) Um zu einem Quadrat zu ergänzen, muss er an allen vier Ecken ein Quadrat mit dem Flächeninhalt von 4 cm^2 anfügen.

(4) Der Flächeninhalt des großen Quadrates beträgt $65 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 81 \text{ cm}^2$. Die Seitenlänge des großen Quadrates ist daher 9 cm.

(5) Für die Seitenlänge des großen Quadrates gilt: $2 + x + 2 = 9$. Damit kann die Länge von x berechnet werden. Al-Chwarizmi erhält $x = 5$.







Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.



