

Was ist größer x^y oder y^x ?

(nach einer Idee von Juri Rolf in MNU 2012 Nr. 02)

Jens Weitendorf, IQSH

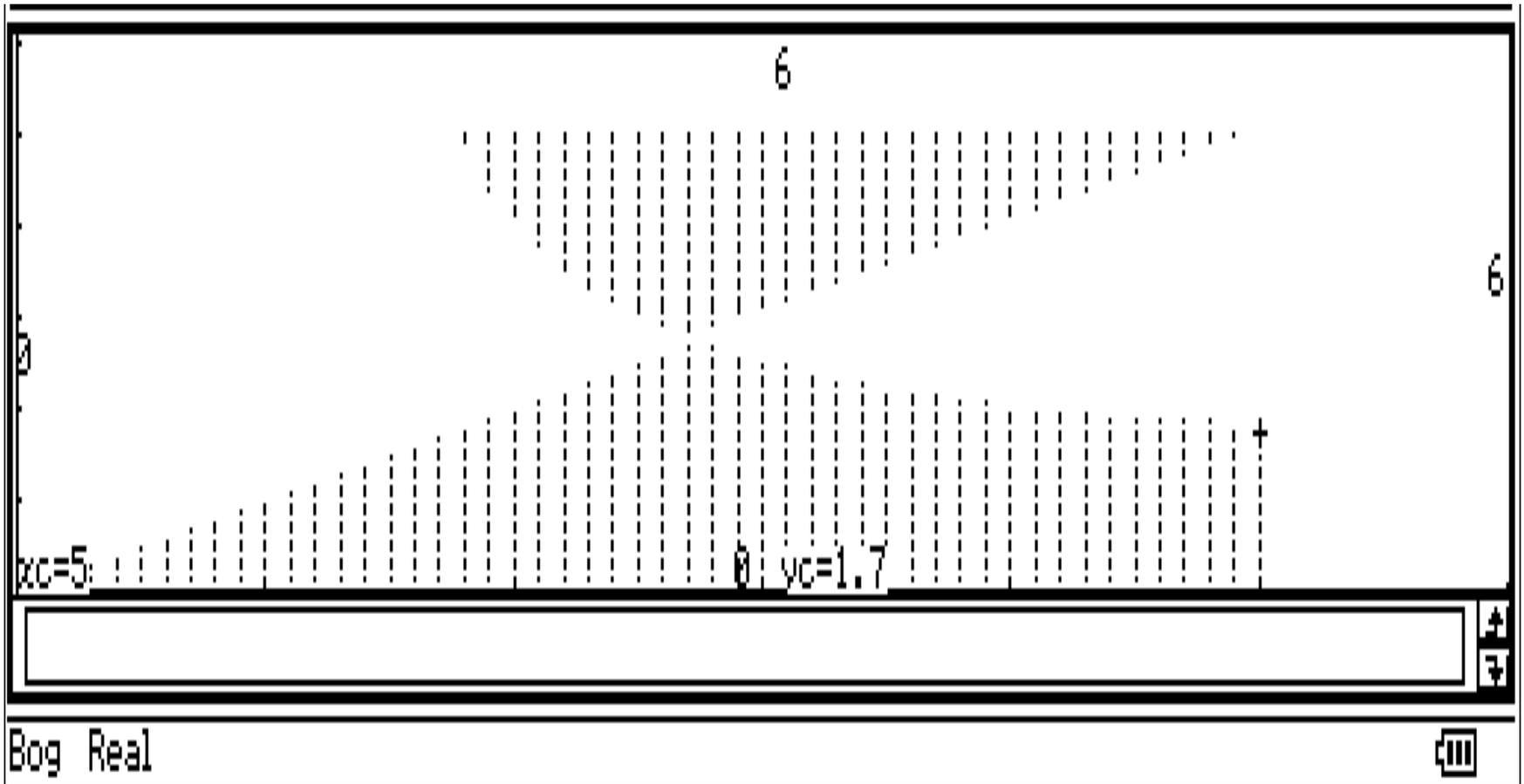
Beispiel

- $3^2 > 2^3$ aber $4^3 < 3^4$

Zielgerichtete Untersuchung

```
▼ Edit Strg I/O Ver
┌───┬───┬───┬───┬───┬───┐
│ │ │ │ │ │ │
├───┴───┴───┴───┴───┴───┘
│ pot          │ N │          │
├───┬───┬───┬───┬───┬───┘
│ 0.1⇒x       │
│ for 1⇒i to 50 │
│ 0.1⇒y       │
│ for 1⇒j to 50 │
│ if x^y > y^x │
│ then        │
│ plot x,y    │
│ ifend       │
│ y+0.1⇒y     │
│ Next        │
│ x+0.1⇒x     │
│ Next        │
├───┬───┬───┬───┬───┬───┘
```

Ergebnis der Untersuchung



Neue Fragen

- Für welche Wertepaare (x,y) gilt $x^y = y^x$?
Die eine Begrenzung ergibt sich durch die Gerade $y = x$. Welche Funktion beschreibt die zweite Grenze?
- Für welches Wertepaar (x,y) hat die Gleichung $x^y = y^x$ genau eine Lösung?

Bestimmung des x- bzw. y-Wertes, für den es genau eine Lösung gibt.

- Durch Probieren erhält man:

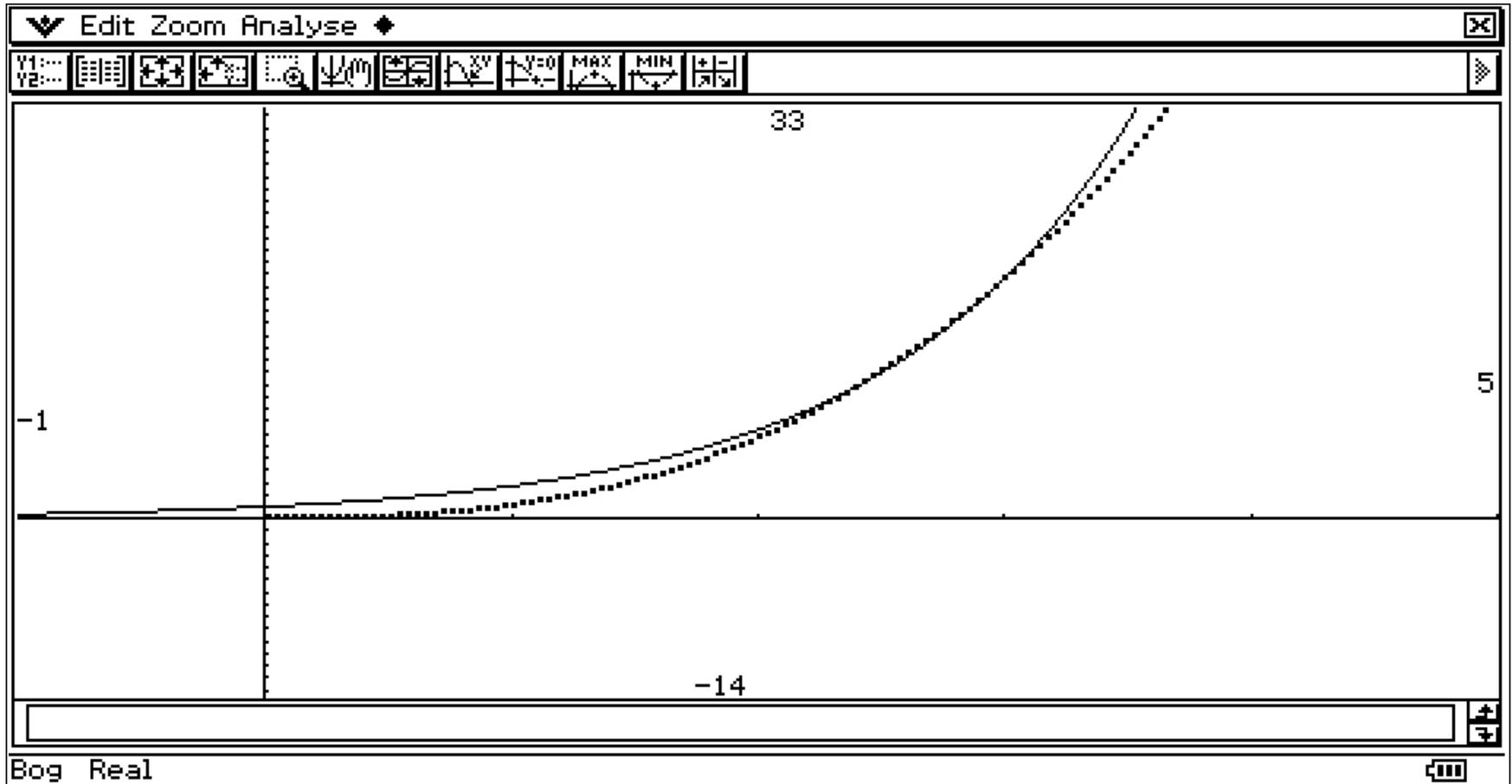
```
solve(2.7^x=x^2.7,x)
{x=2.700000000}

solve(2.69^x=x^2.69,x)
{x=2.690000000,x=2.747062732}

solve(2.71^x=x^2.71,x)
{x=2.710000000,x=2.726605926}
```



„Bestätigung“ durch die Graphen von
 $g(x) = 2,7^x$ und $x^{2,7}$



Aber:

$$\frac{d}{dx}(2.7^x - x^{2.7})$$

$$\frac{-\left(10 \cdot \left(\frac{27}{10}\right)^x \cdot \ln(5) - 30 \cdot \left(\frac{27}{10}\right)^x \cdot \ln(3) + 10 \cdot \left(\frac{27}{10}\right)^x \cdot \ln(2) + 27 \cdot x^{\frac{17}{10}}\right)}{10}$$

$$\text{define f1}(x) = \frac{-\left(10 \cdot \left(\frac{27}{10}\right)^x \cdot \ln(5) - 30 \cdot \left(\frac{27}{10}\right)^x \cdot \ln(3) + 10 \cdot \left(\frac{27}{10}\right)^x \cdot \ln(2) + 27 \cdot x^{\frac{17}{10}}\right)}{10}$$

f1(2.7)

done

-0.098598849



Der genauere grafische Blick

▼ Edit Zoom Analyse ♦

Y1: ...
Y2: ...

Blatt1 | Blatt2 | Blatt3 | Blatt4 | Bla

y41 = $2.7^x - x^{2.7}$
 y42 = $x^{2.7}$
 xt43:
 yt43:
 y44 = f1(x)
 y45 = f2(x)
 xt46:
 yt46:

Fenster-Einst. X

Speicher 2D 3D

x-Logar y-Logar

xmin : 2.69 [—] ▲
max : 2.75 [.....] ▲
Skala : 1
Punkt : 1.1857707509
ymin : $-1E-3$ [—] ▲
max : $1E-3$ [—] ▲
Skala : 1

OK Abbr. Vorgabe

1E-3

2

2

1E-3

Bog Real

Der genauere numerische Blick

The screenshot shows a software window titled "Edit Aktion Interaktiv". The interface includes a toolbar with various mathematical symbols and a main text area. The text area contains three lines of code for solving the equation $2.7^x = x^{2.7}$ using the `solve` function. The results are shown on the right side of each line.

```
solve(2.7^x=x^2.7,x)                                     {x=2.7}
solve(2.7^x=x^2.7,x,0,2.7,5)                             {x=2.7}
solve(2.7^x=x^2.7,x,0,2.71,5)                             {x=2.736770904}
```

□

Vermutung

Die gesuchte Zahl ist die
Euler'sche Zahl e

Erste „Bestätigung“

```
solve(e^(x)=x^e(1),x)
```

```
{x=2.718281828}
```

Algeb Standard Real Bog

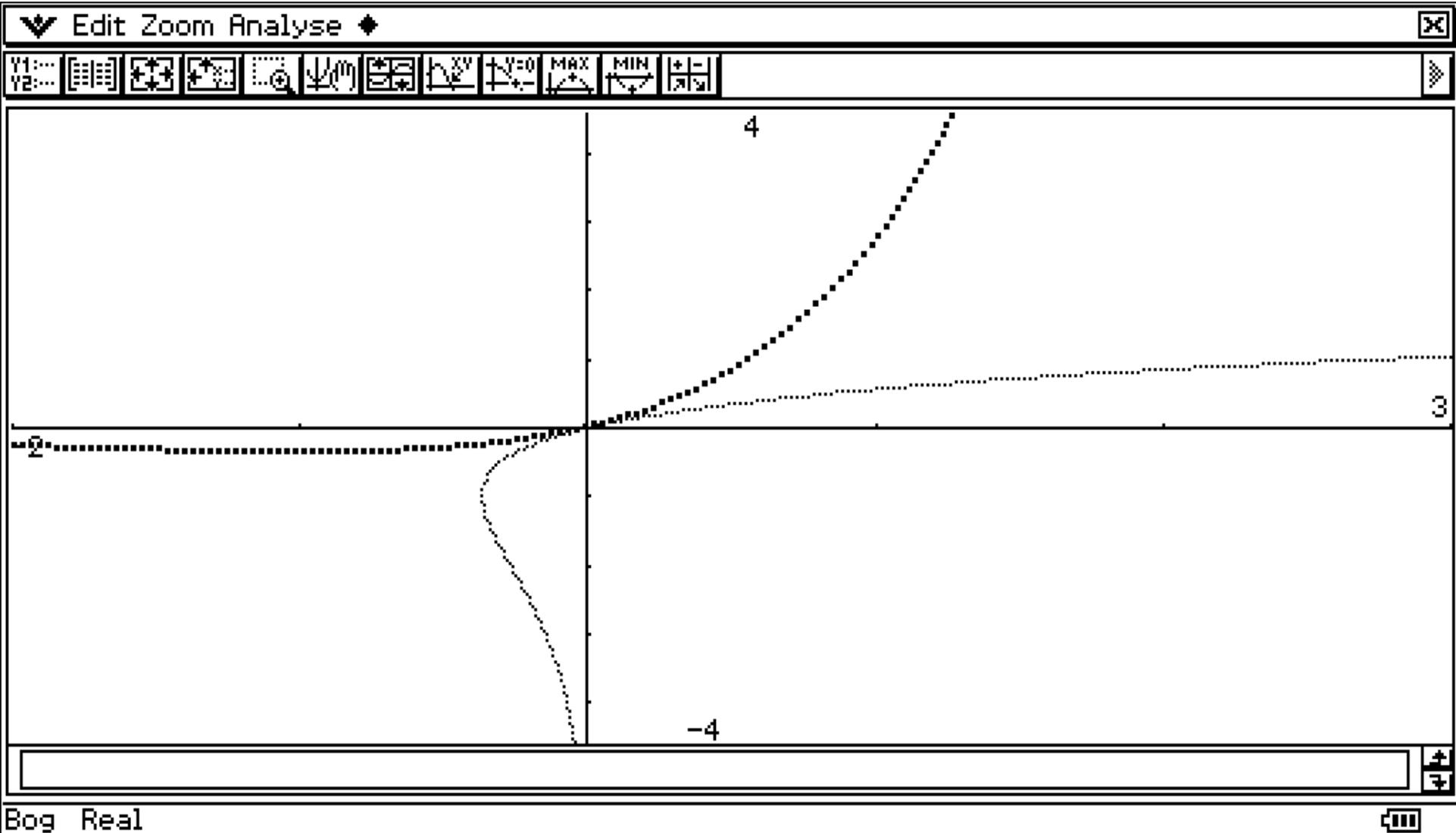


Mathematische Begründung mit Hilfe der Lambert'schen W-Funktion

- Die Lambert'sche W-Funktion ist definiert durch: $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$; das heißt, sie ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x \cdot e^x$
(Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) hat u.a. die Irrationalität von π bewiesen)
- Es bleibt zu klären, welcher Zusammenhang zum obigen Problem besteht.

- $x^y = y^x$
- $y \cdot \ln(x) = x \cdot \ln(y)$
- $\frac{y}{\ln(y)} = \frac{x}{\ln(x)}$ bzw. $\frac{\ln(y)}{y} = \frac{\ln(x)}{x}$
- $\frac{1}{y} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(x)}{x}$
- $e^{\ln\left(\frac{1}{y}\right)} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(x)}{x}$
- $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = W\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)$, da $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$
- bzw. $y = e^{-W\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)} = -\frac{x \cdot W\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)}{\ln(x)}$
- da $W\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) \cdot e^{W\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)} = -\frac{\ln(x)}{x}$

Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ und der Umkehrfunktion $W(x)$

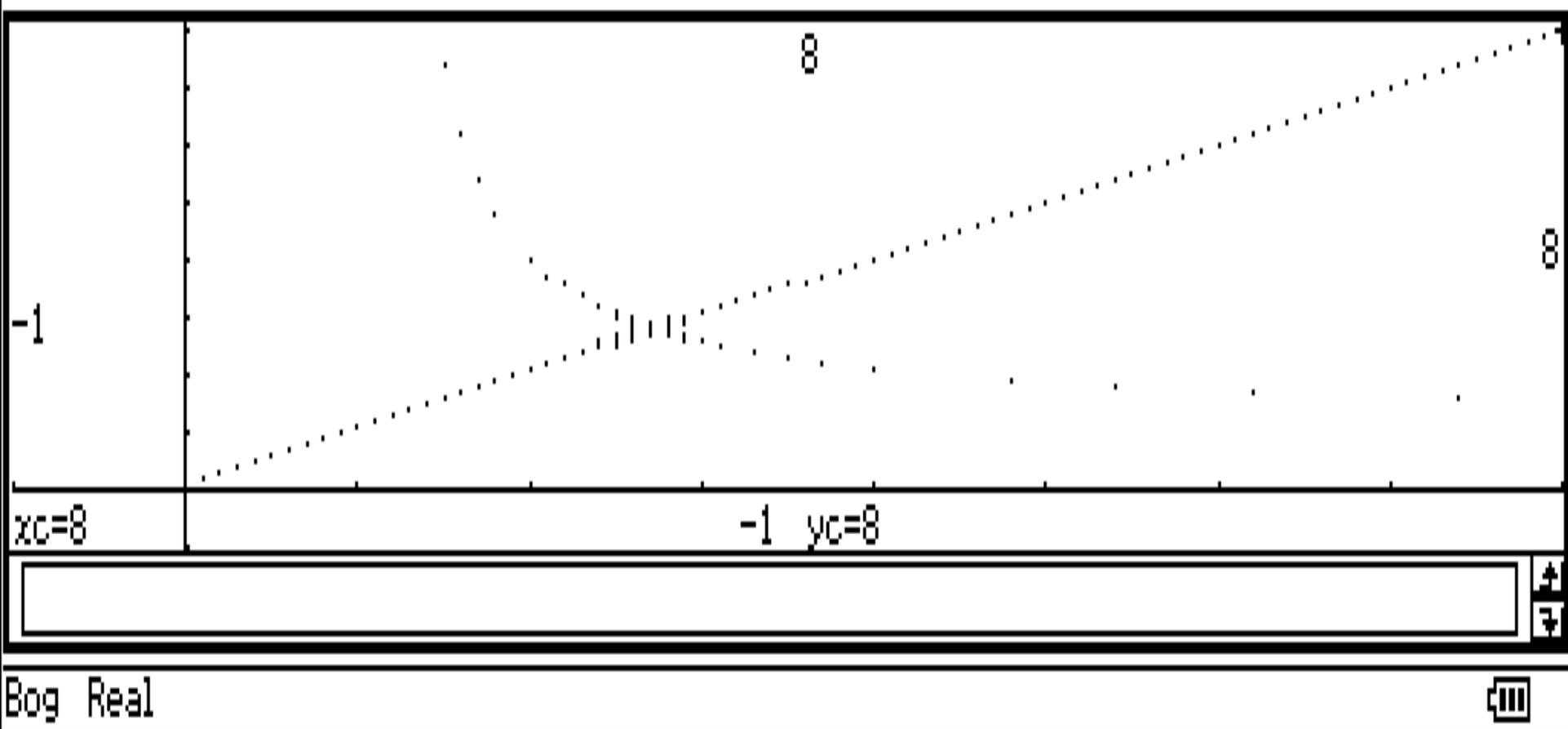


- $f(x) = x \cdot e^x$ hat in $(-1/-e^{-1})$ ein Extremum
- man benötigt den y -Wert für $x = e$
- $$y(e) = -\frac{e \cdot W\left(-\frac{\ln(e)}{e}\right)}{\ln(e)} = -e \cdot W\left(-\frac{1}{e}\right)$$
- $= -e \cdot (-1) = e$
- Das heißt, der gesuchte Punkt ist (e/e)

„Bestimmung“ der zweiten Grenzfunktion

```
▼ Edit Strg I/O Vers.  
[Grid] [File] [Print] [Save] [Cut] [Paste] [Copy]  
pot2      N  
0.1⇒x  
for 1⇒i to 80  
0.1⇒y  
for 1⇒j to 80  
if abs(x^y-y^x)<0.1  
then  
plot x,y  
ifend  
y+0.1⇒y  
Next  
x+0.1⇒x  
Next
```

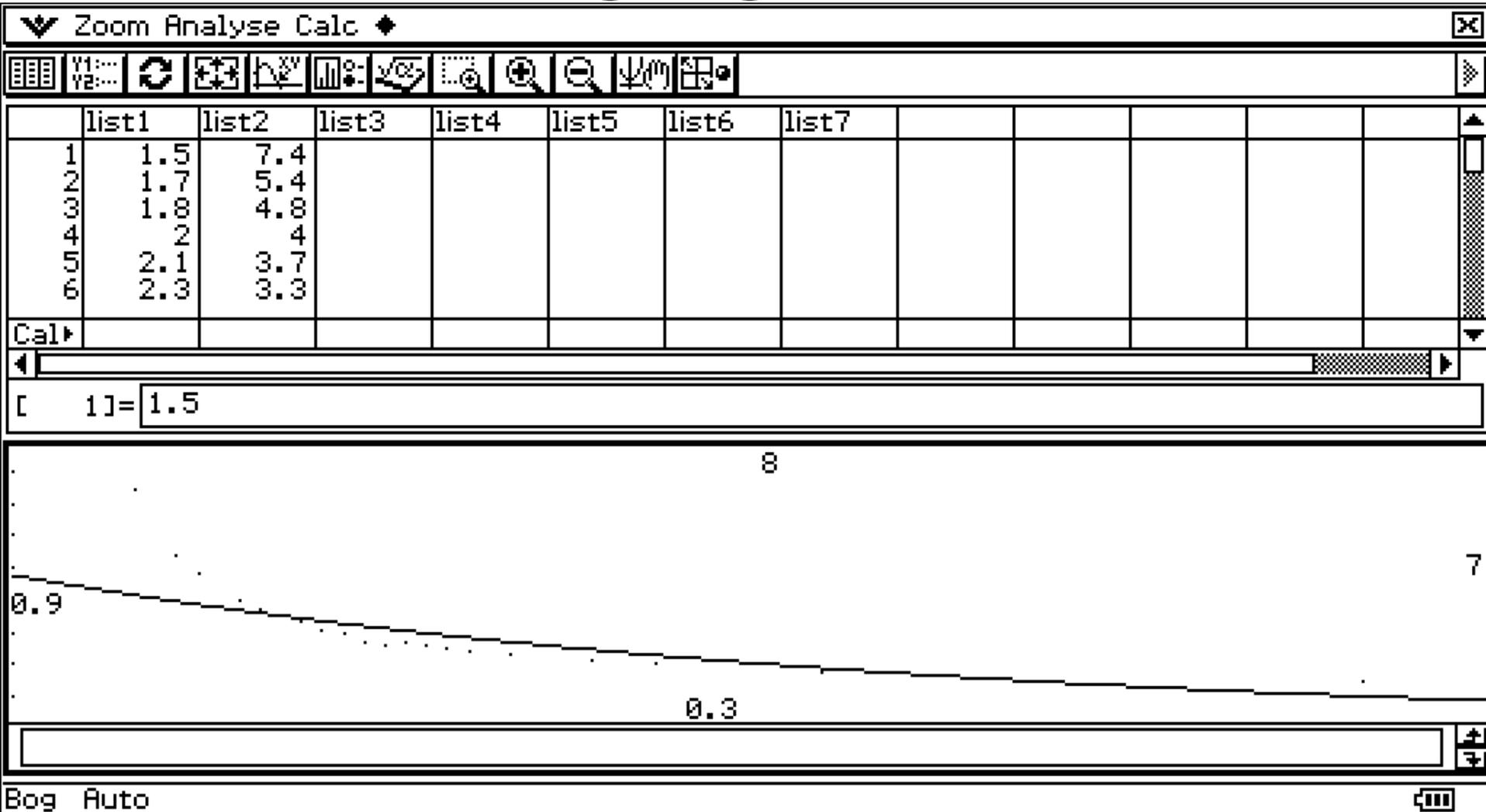
Das Ergebnis



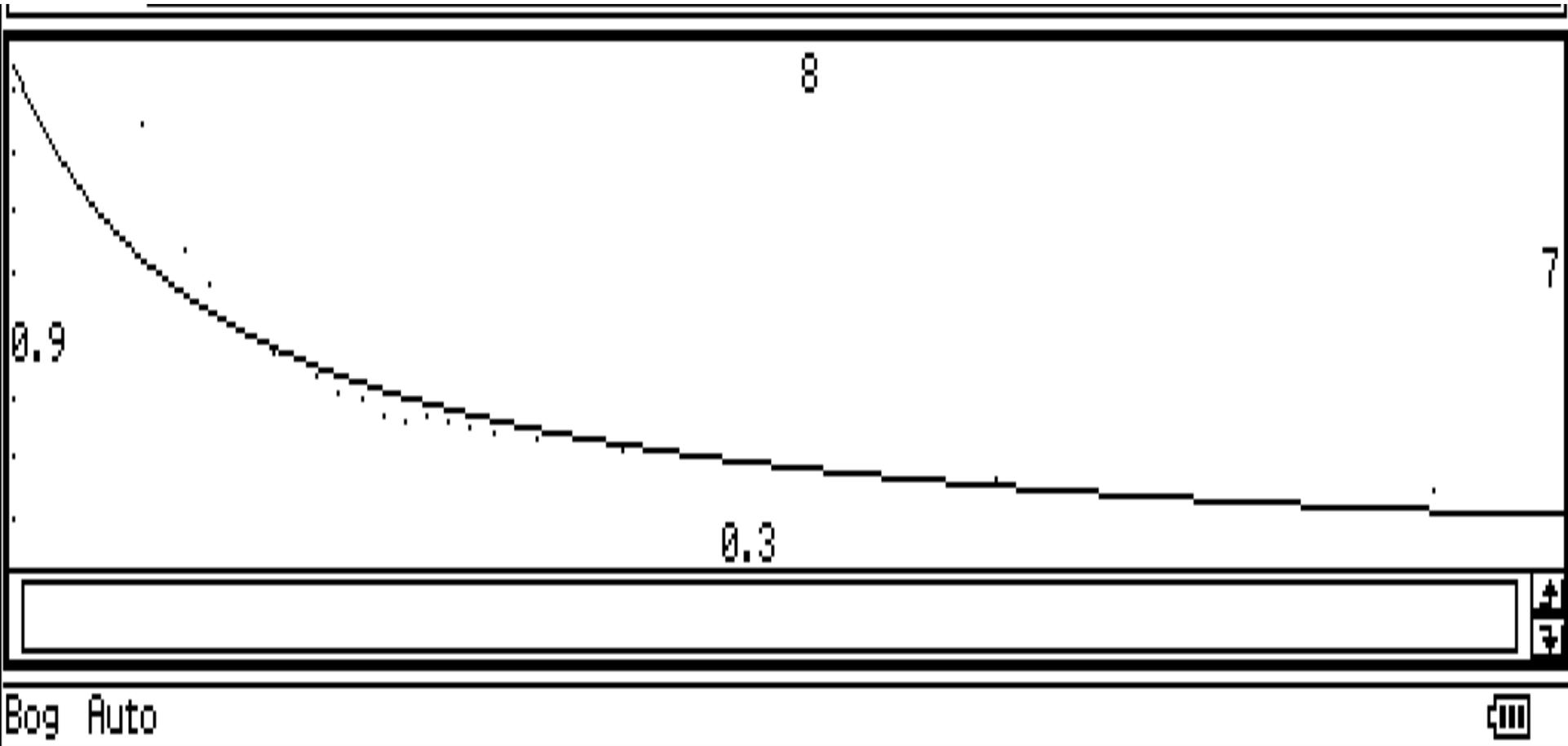
Bog Real



Exponentielle Regression nach „Bereinigung“ der Werte



Allgemeine Potenzregression



Newton - Verfahren

- $f(W) = W \cdot e^W - x = 0$
- $f'(W) = (1 + W) \cdot e^W$
- $W_{n+1} = W_n - \frac{f(W_n)}{f'(W_n)}$
- $W_{n+1} = W_n - \frac{W_n \cdot e^{W_n} - x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$
- $W_{n+1} = \frac{W_n^2 \cdot e^{W_n} + x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$
- Da $y = e^{-W \left(-\frac{\ln(x)}{x} \right)}$, $x \rightarrow -\ln(x)/x$

Newton-Verfahren mit Tabellenkalkulation

	A	B	C	D
1	10.00000000	3.100...	-0.36...	
2	9.090907585			
3	8.190002623	2.408...		
4	7.298805503			
5	6.419275028			
6	5.553978911			
7	4.706342361			
8	3.881007923			
9	3.084341069			
10	2.325089567			
11	1.615101402			
12	0.969741014			
13	0.407164421			
14	-0.0548026...			
15	-0.4047033...			
16	-0.6437982...			
17	-0.7869513...			

←
=e^(-A20)
B3 2.408897747

A1: Anfangswert

B1: x-Wert

C1: transformierter x-Wert

B3: Lösung

Die Konvergenz ist relativ langsam,
da x in der Nähe von e liegt

**Vielen Dank für
Ihre Aufmerksamkeit**