Was ist größer x^y oder y^x?

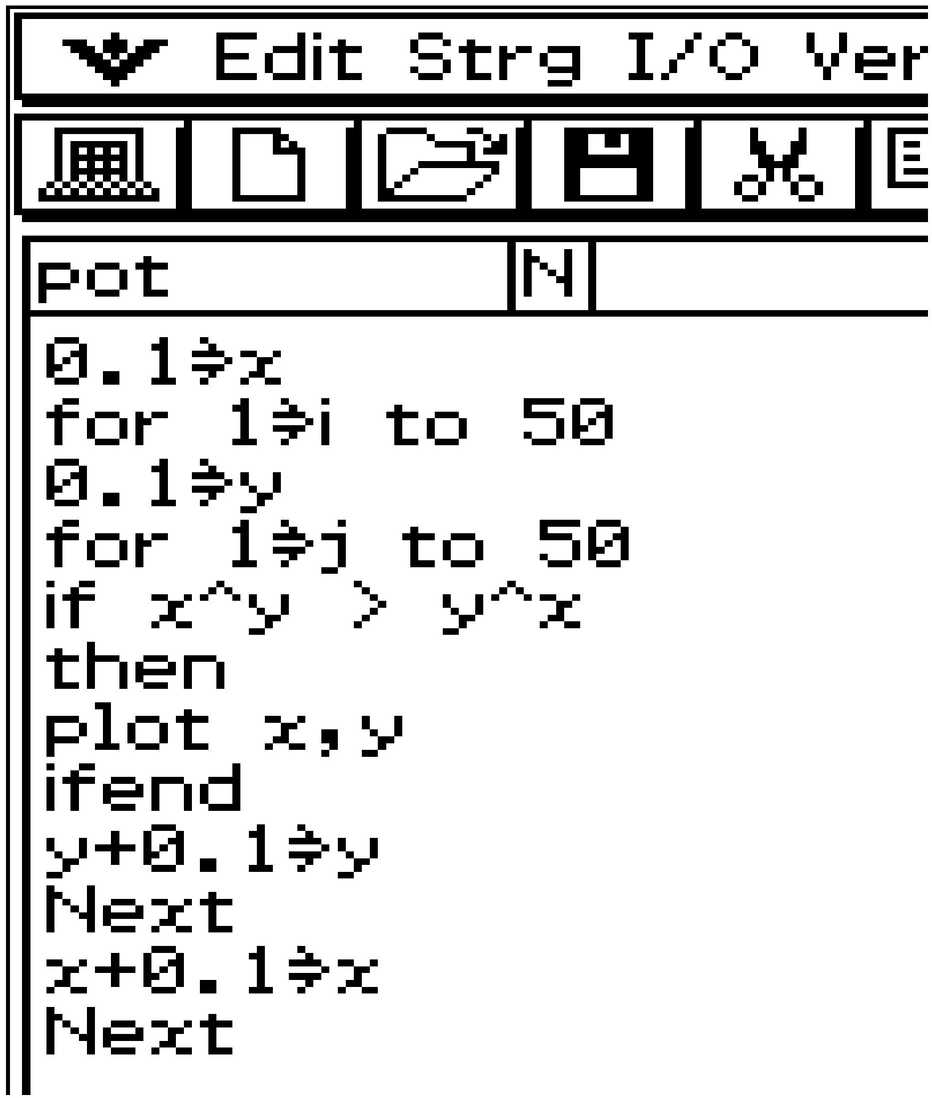
(nach einer Idee von Juri Rolf in MNU 2012 Nr. 02)

Jens Weitendorf, IQSH

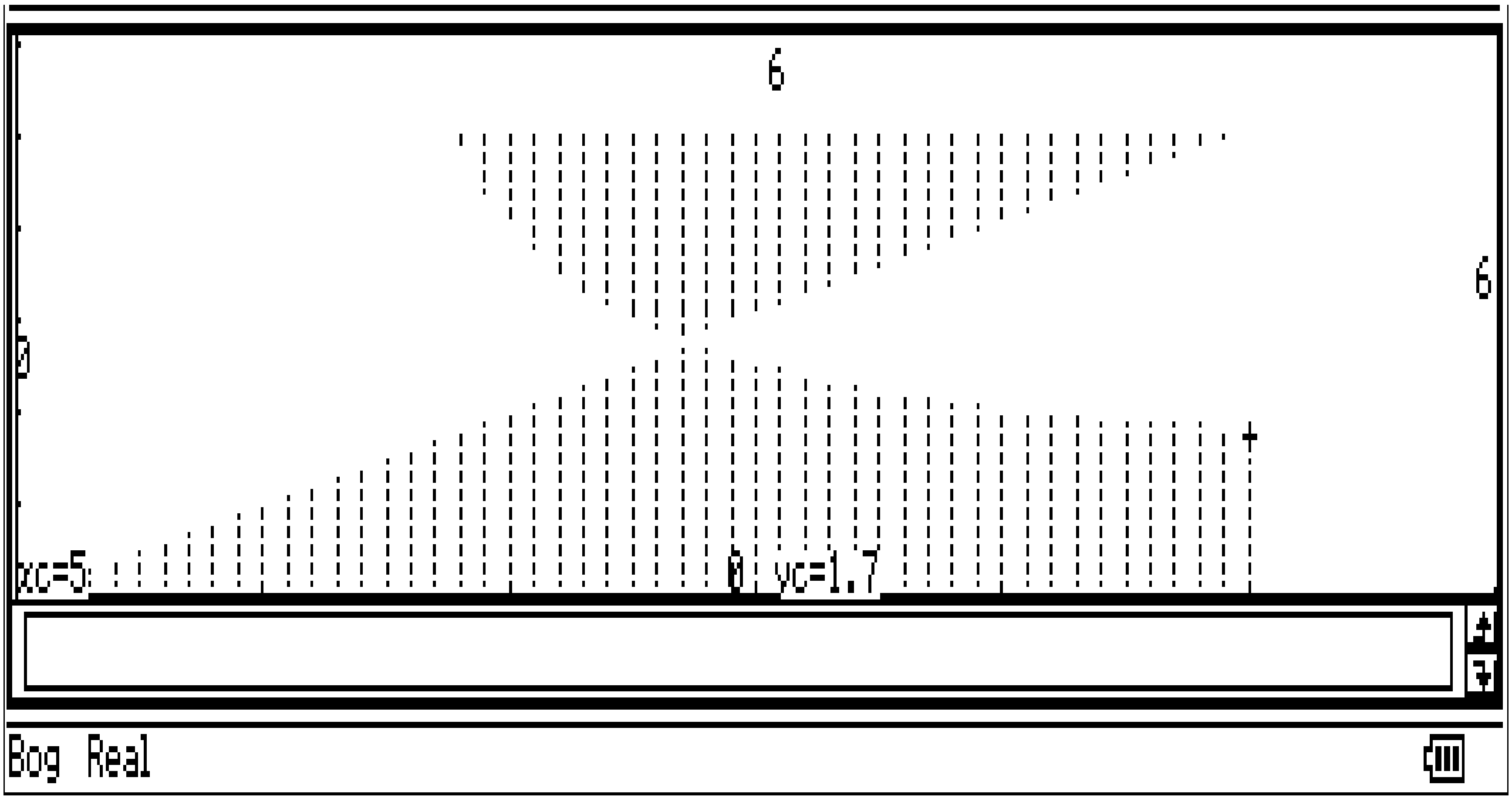
Beispiel

- $3^2 > 2^3$ aber $4^3 < 3^4$

Zielgerichtete Untersuchung



Ergebnis der Untersuchung

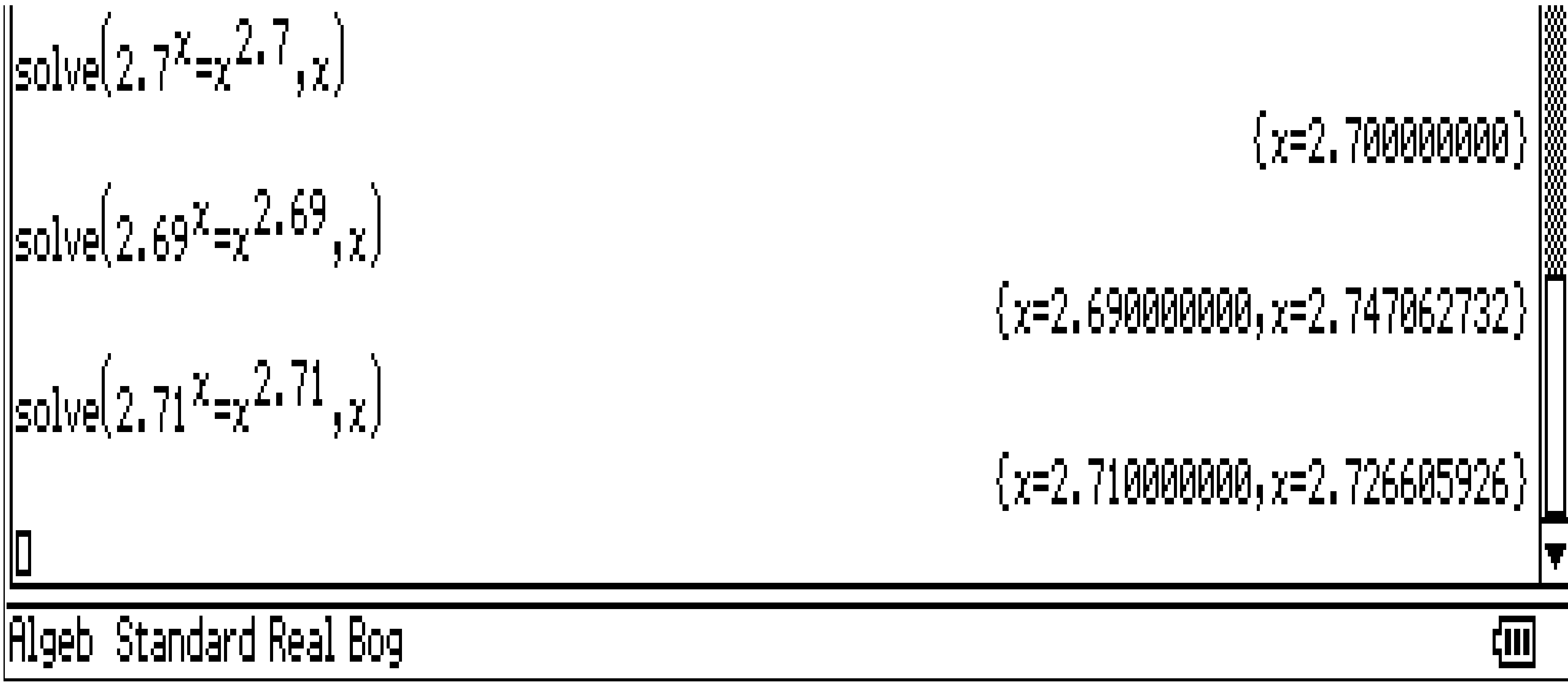


Neue Fragen

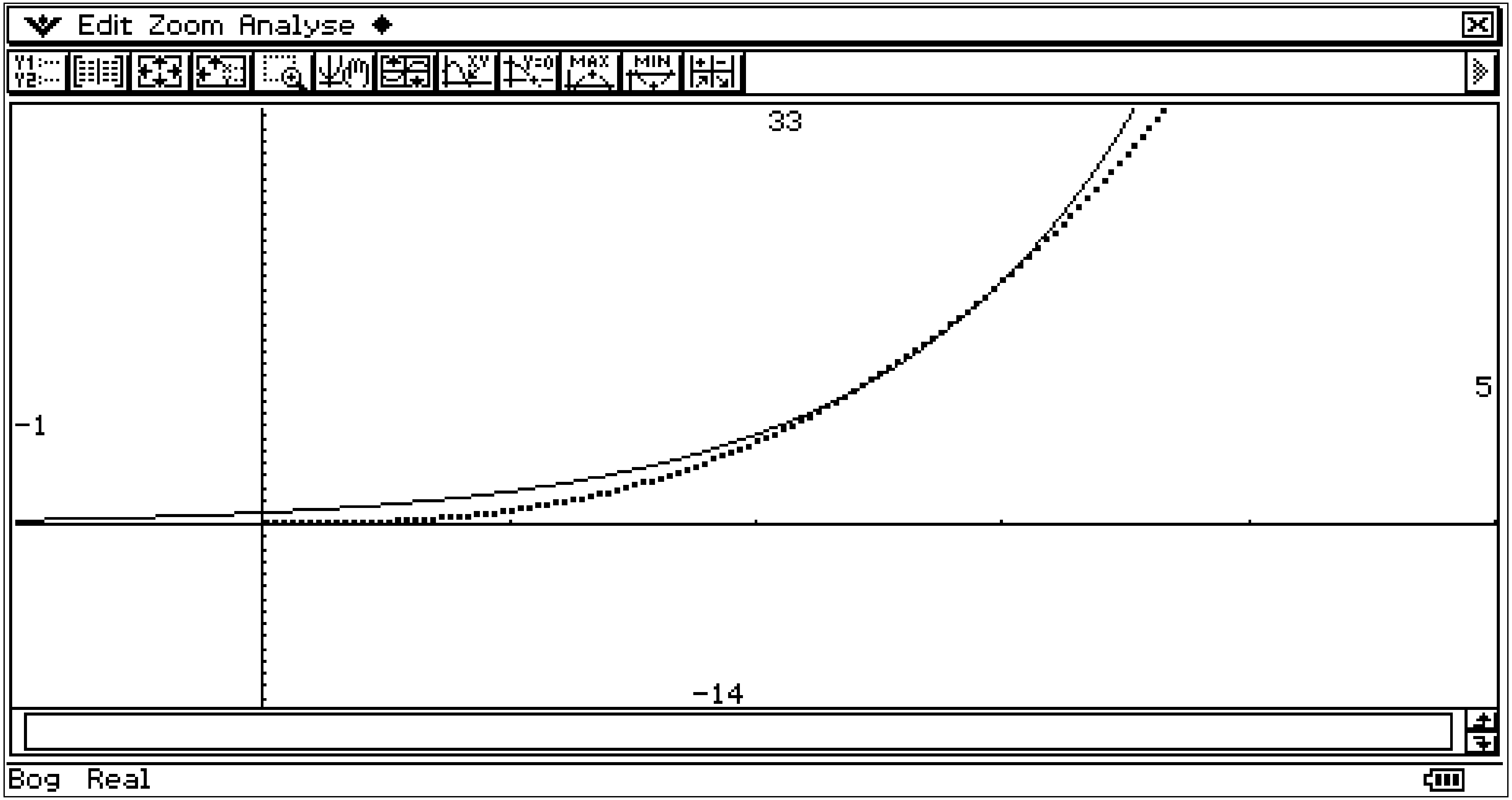
- Für welche Wertepaare (x,y) gilt $x^y = y^x$?
  Die eine Begrenzung ergibt sich durch die Gerade $y = x$. Welche Funktion beschreibt die zweite Grenze?
- Für welches Wertepaar (x,y) hat die Gleichung $x^y = y^x$ genau eine Lösung?

Bestimmung des x- bzw. y-Wertes, für den es genau eine Lösung gibt.

- Durch Probieren erhält man:



„Bestätigung“ durch die Graphen von $g(x) = 2{,}7^x$ und $x^{2,7}$



Aber:

$$\frac{d}{dx}\left(2.7^{x}-x^{2.7}\right)$$

$$\frac{-\left(10\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^{x}\cdot\ln(5)-30\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^{x}\cdot\ln(3)+10\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^{x}\cdot\ln(2)+27\cdot x^{\frac{17}{10}}\right)}{10}$$

$$\text{define } f1(x)=\frac{-\left(10\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^{x}\cdot\ln(5)-30\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^{x}\cdot\ln(3)+10\cdot\left(\frac{27}{10}\right)^{x}\cdot\ln(2)+27\cdot x^{\frac{17}{10}}\right)}{10}$$

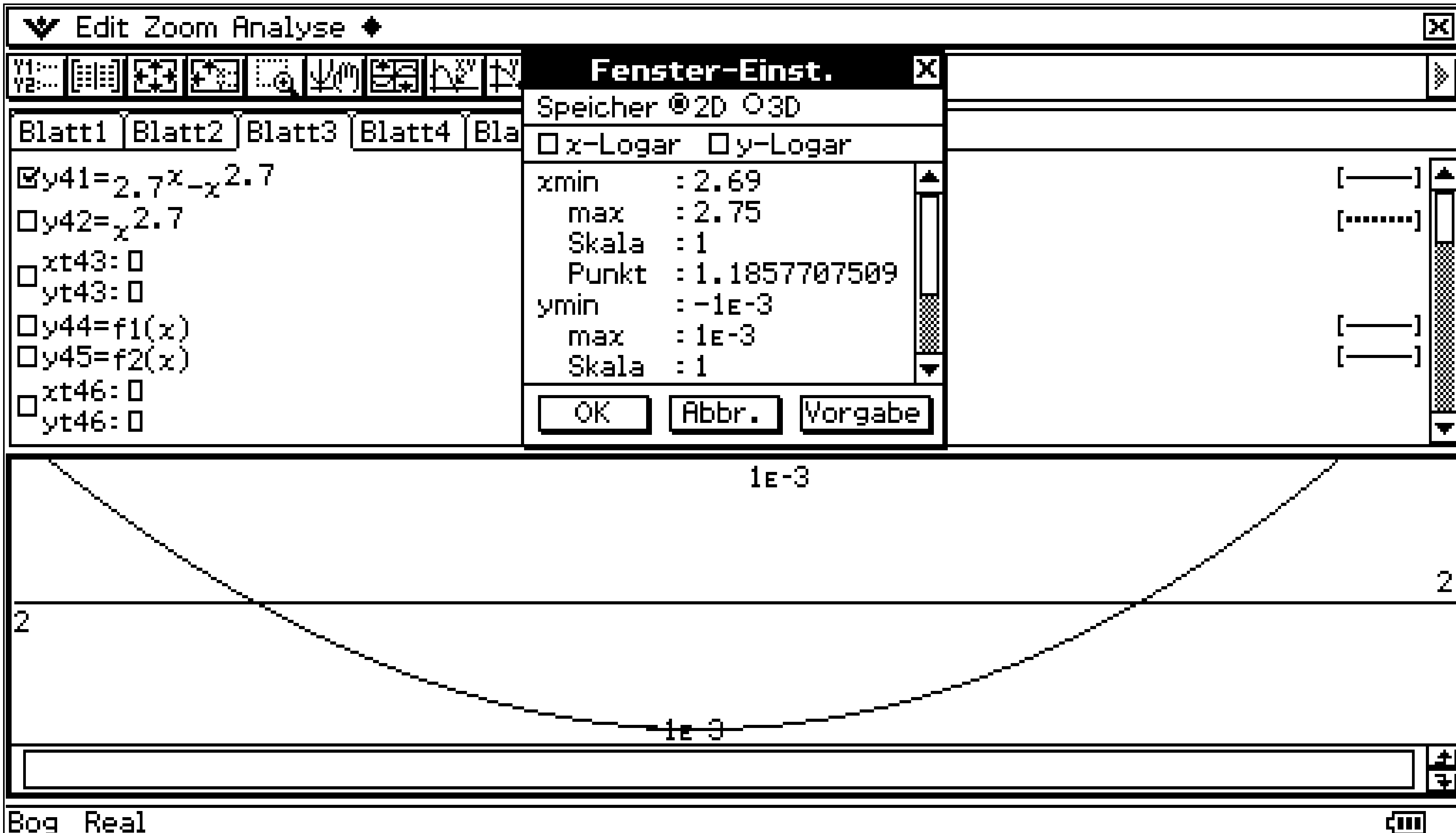
done

$f1(2.7)$

-0.098598849

Algeb Standard Real Bog

Der genauere grafische Blick



Der genauere numerische Blick

Edit Aktion Interaktiv

$\text{solve}\left(2.7^x = x^{2.7}, x\right)$

$\{x=2.7\}$

$\text{solve}\left(2.7^x = x^{2.7}, x, 0, 2.7, 5\right)$

$\{x=2.7\}$

$\text{solve}\left(2.7^x = x^{2.7}, x, 0, 2.71, 5\right)$

$\{x=2.736770904\}$

Vermutung

Die gesuchte Zahl ist die Euler´sche Zahl e

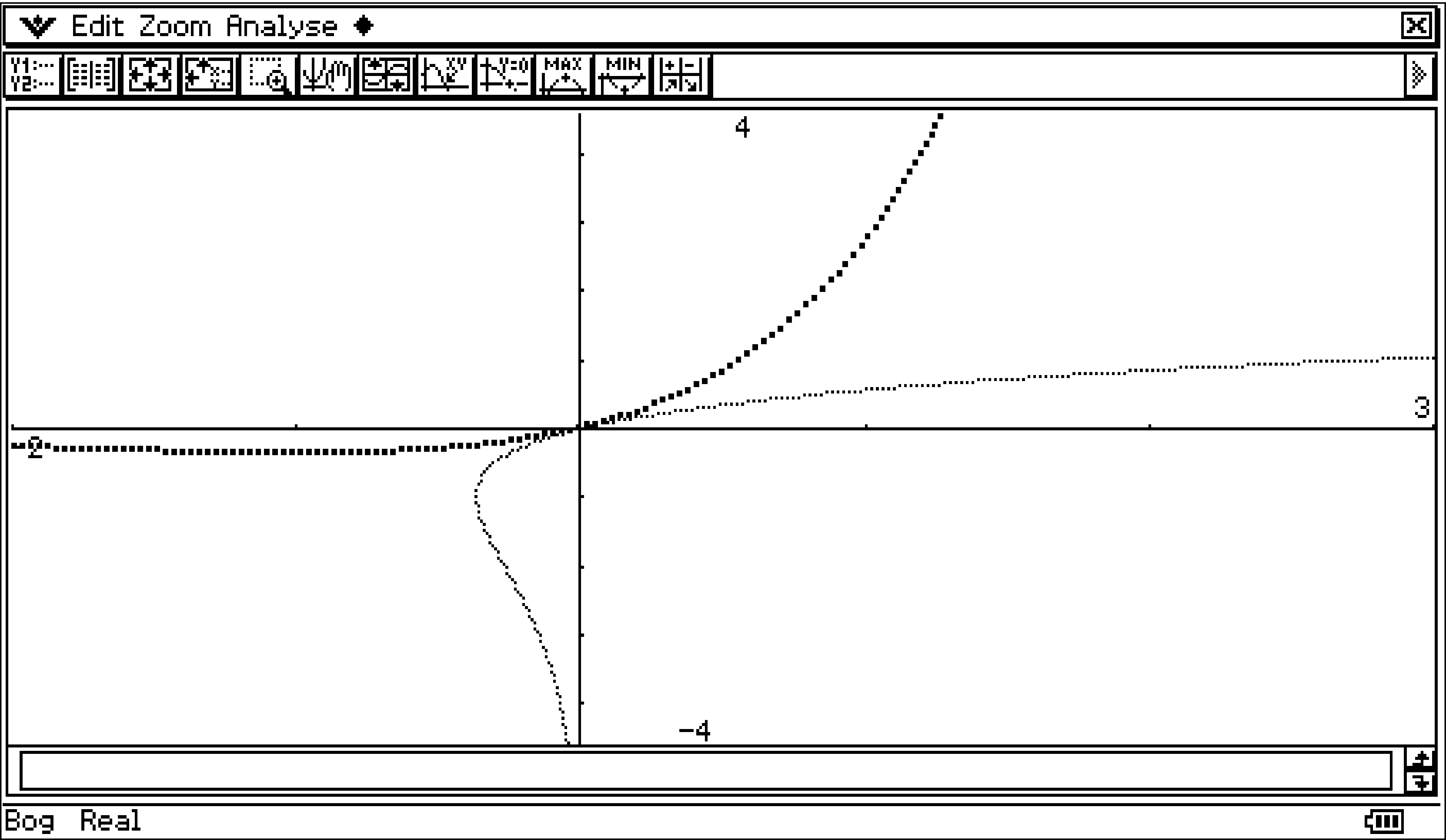
Erste „Bestätigung“

Mathematische Begründung mit Hilfe der Lambert´schen W-Funktion

- Die Lambert´sche W-Funktion ist definiert durch: $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$; das heißt, sie ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x \cdot e^{x}$
  (Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) hat u.a. die Irrationalität von π bewiesen)
- Es bleibt zu klären, welcher Zusammenhang zum obigen Problem besteht.

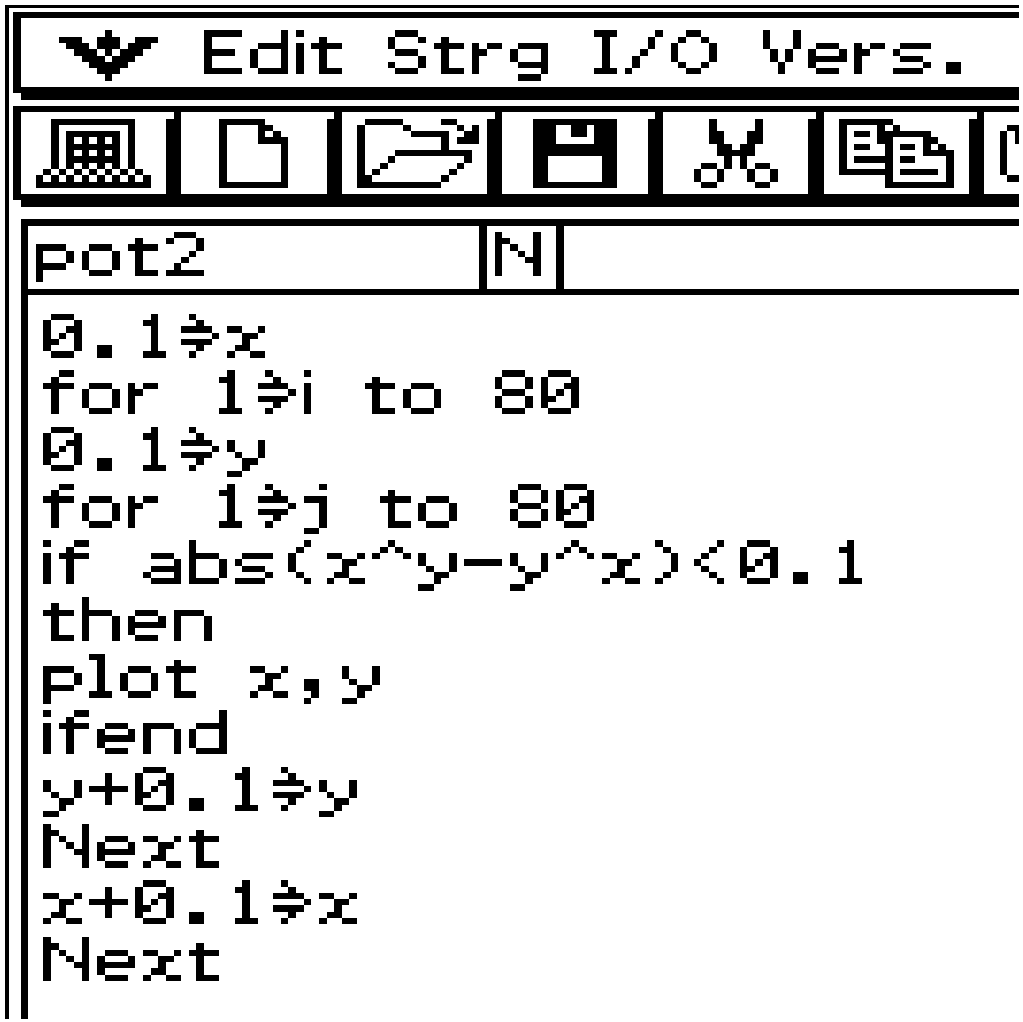
- $x^y = y^x$
- $y \cdot \ln(x) = x \cdot \ln(y)$
- $\frac{y}{\ln(y)} = \frac{x}{\ln(x)}$ $bzw.$ $\frac{\ln(y)}{y} = \frac{\ln(x)}{x}$
- $\frac{1}{y} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(x)}{x}$
- $e^{\ln(\frac{1}{y})} \cdot \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(x)}{x}$
- $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = W(-\frac{\ln(x)}{x})$, da W(x)·e$^{W(x)}$ = x
- bzw. $y = e^{-W(-\frac{\ln(x)}{x})} = -\frac{x \cdot W(-\frac{\ln(x)}{x})}{\ln(x)}$
- da $W(-\frac{\ln(x)}{x}) \cdot e^{W\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)} = -\frac{\ln(x)}{x}$

Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ und der Umkehrfunktion $W(x)$

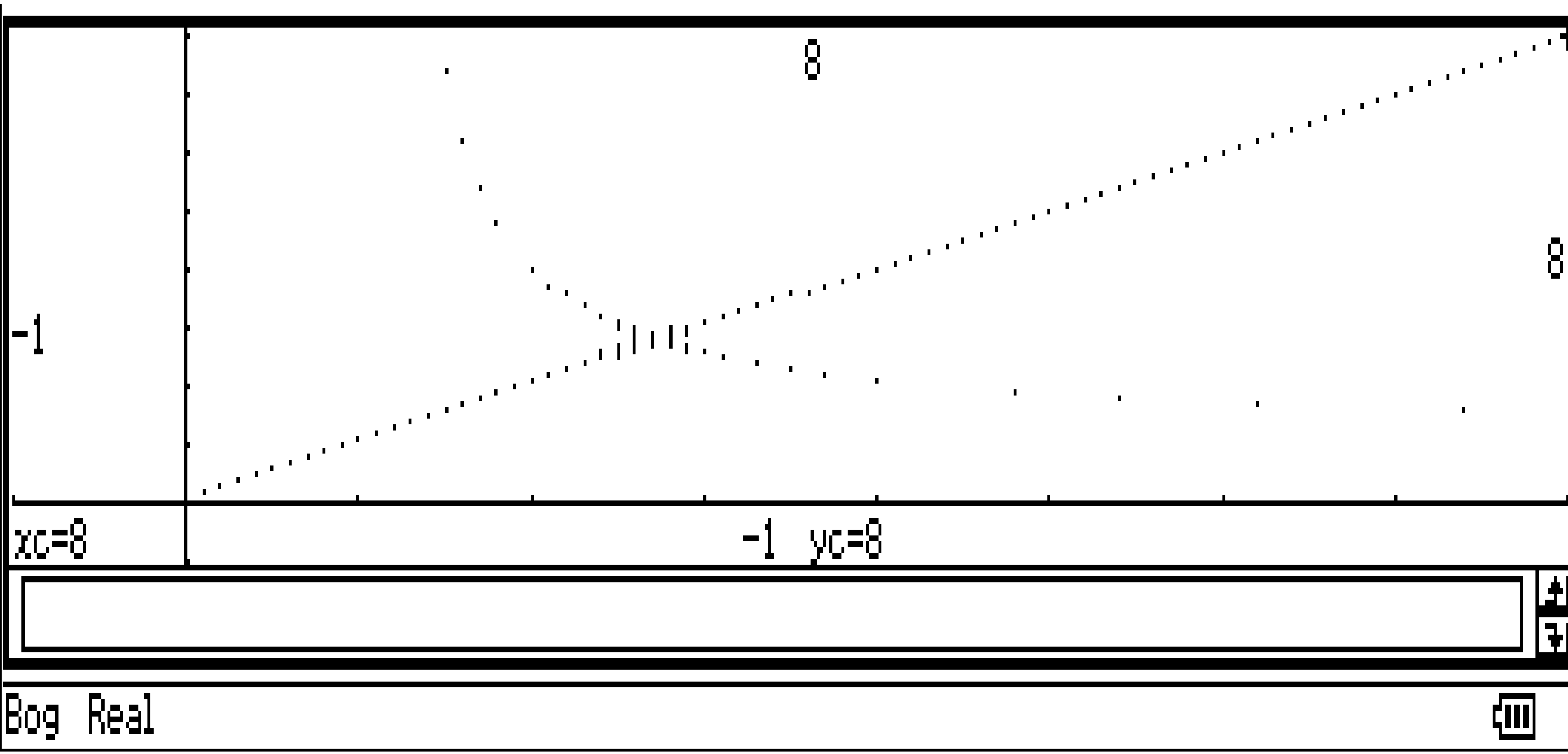


- f(x)= x·e^x hat in (-1/-e^{-1}) ein Extremum
- man benötigt den y-Wert für x = e
- $y(e) = -\frac{e \cdot W\left(-\frac{\ln(e)}{e}\right)}{\ln(e)} = -e \cdot W\left(-\frac{1}{e}\right)$
- $= -e \cdot (-1) = e$
- Das heißt, der gesuchte Punkt ist (e/e)

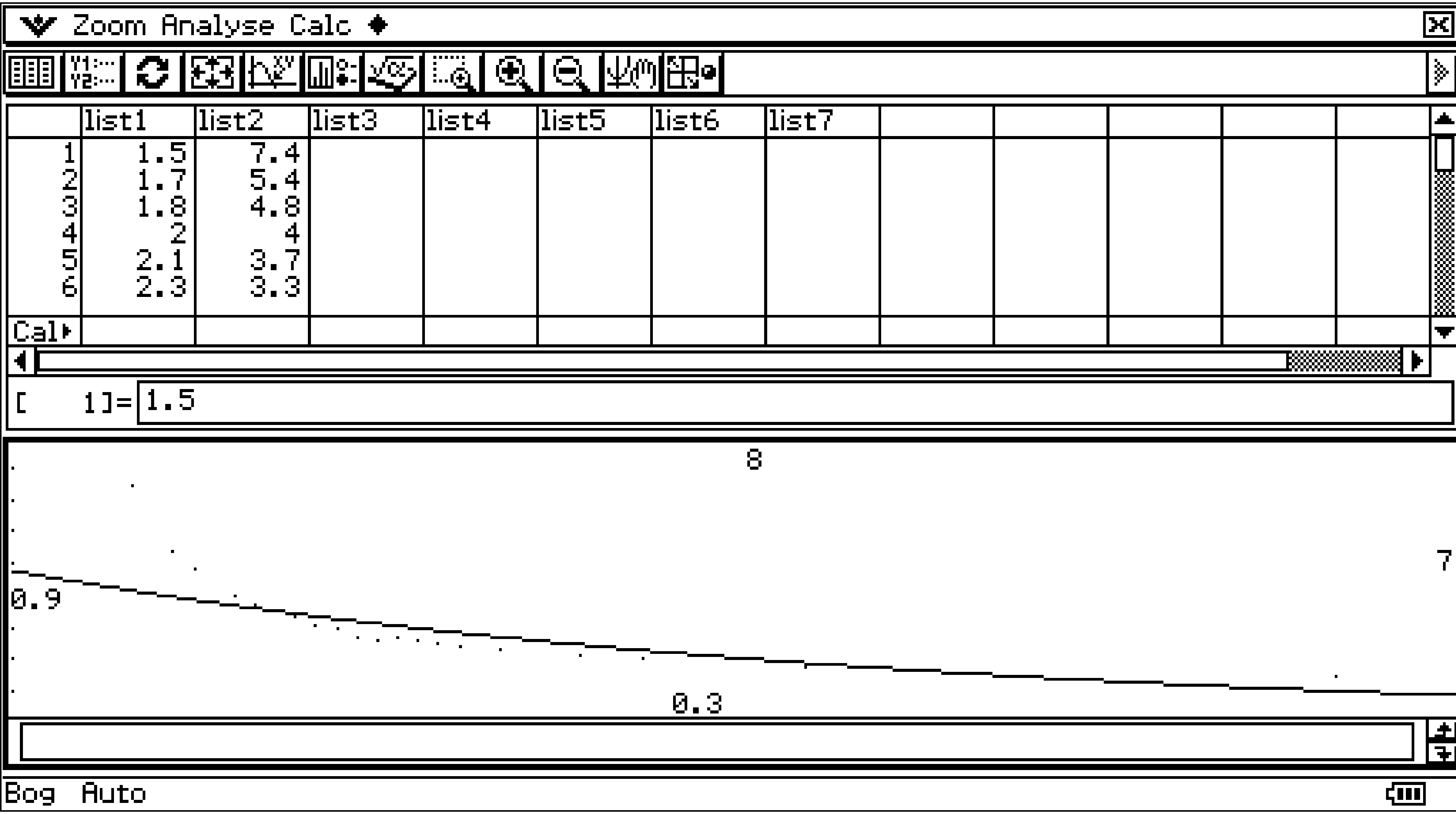
„Bestimmung“ der zweiten Grenzfunktion



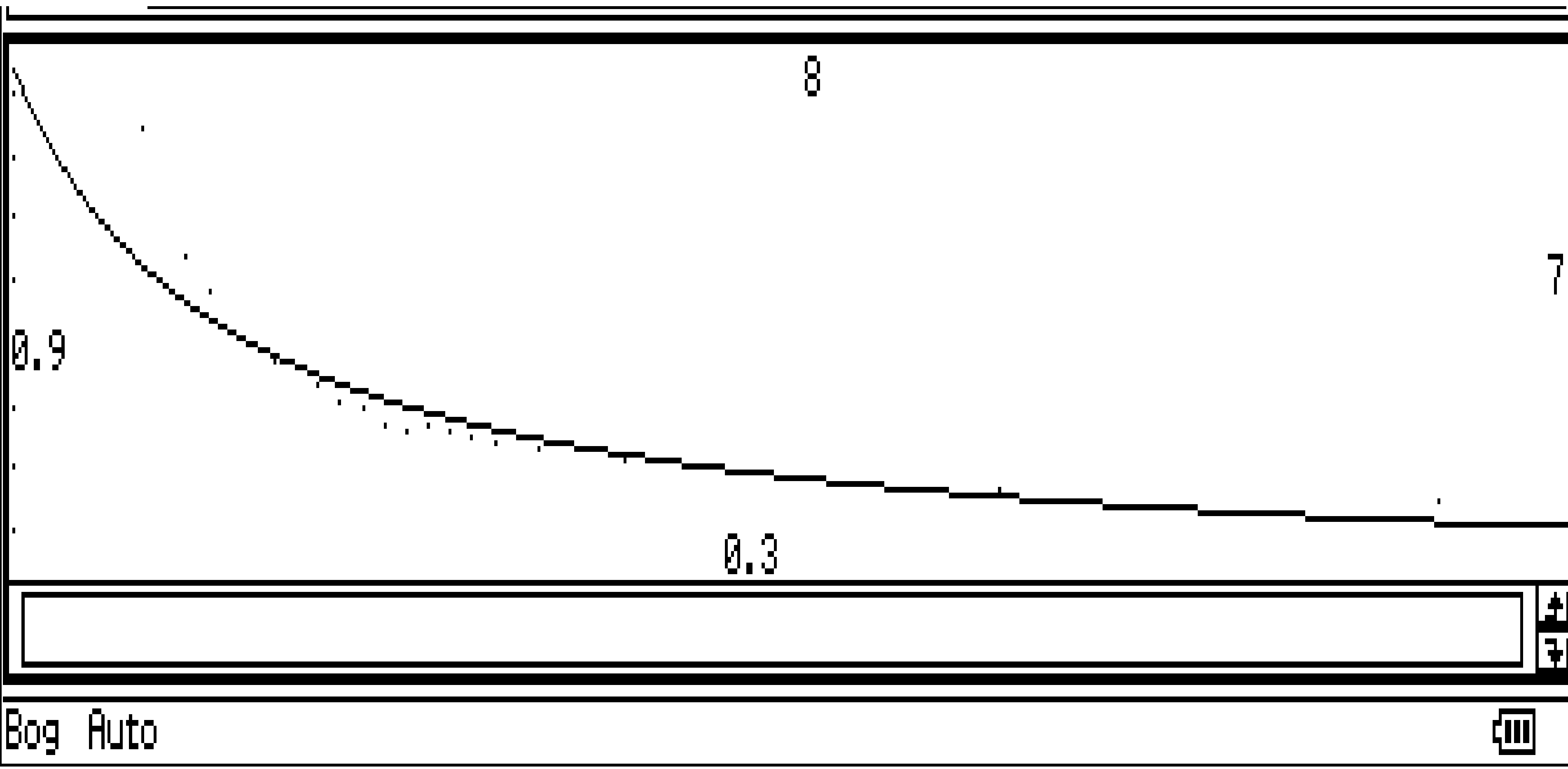
Das Ergebnis



Exponentielle Regression nach „Bereinigung“ der Werte



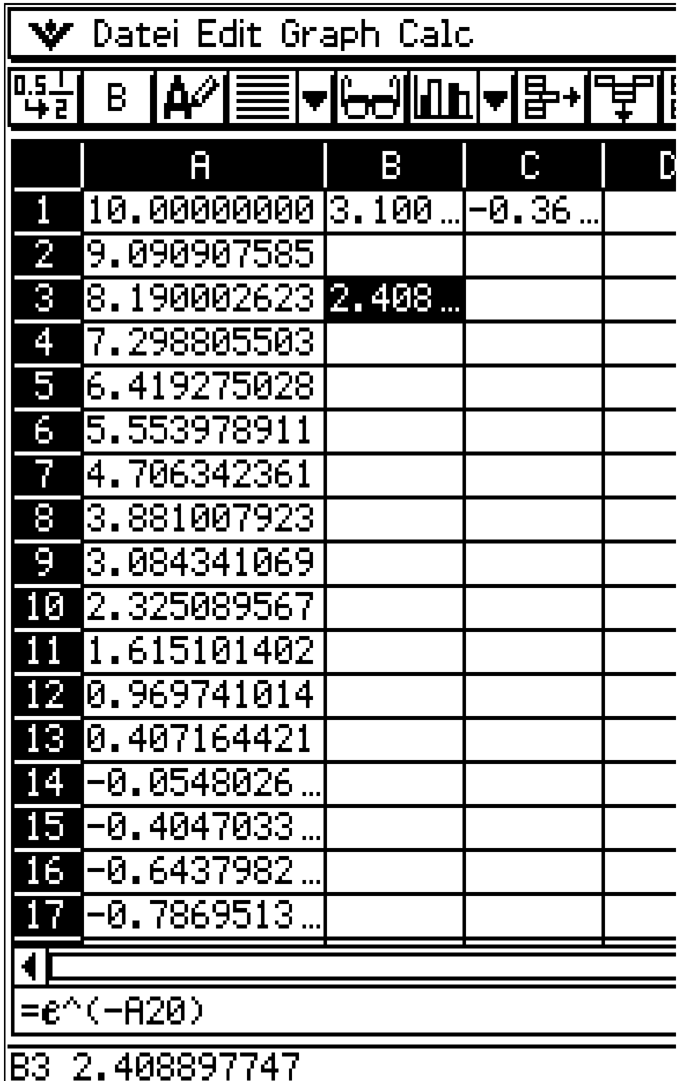
Allgemeine Potenzregression



Newton - Verfahren

- $f(W) = W \cdot e^{W} - x = 0$
- $f'(W) = (1 + W) \cdot e^{W}$
- $W_{n+1} = W_n - \frac{f(W_n)}{f'(W_n)}$
- $W_{n+1} = W_n - \frac{W_n \cdot e^{W_n} - x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$
- $W_{n+1} = \frac{W_n^2 \cdot e^{W_n} + x}{e^{W_n} \cdot (1 + W_n)}$
- Da $y = e^{-W(-\frac{\ln(x)}{x})}$, x -> -ln(x)/x

Newton-Verfahren mit Tabellenkalkulation



A1: Anfangswert
B1: x-Wert
C1: transformierter x-Wert
B3: Lösung

Die Konvergenz ist relativ langsam, da x in der Nähe von e liegt

Vielen Dank für

Ihre Aufmerksamkeit