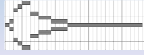
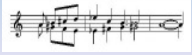


Norbert Christmann

Komponieren mit Diskreter Mathematik

AKMUI-Tagung SB 2013

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 1

Hinweise zu den Folien

- Die Folien repräsentieren ein Maximalprogramm mit Reserven für Nachfragen
- Musikbeispiele sind nicht abrufbar, teilweise Urheberrechtsprobleme
- Die Ausarbeitung wird voraussichtlich ab Ende Februar vorliegen
- Umwandlung in PDF-Datei zwecks Kapazitätseinsparung

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 2

Mathematik und Musik – Ansatzpunkte zum Thema

- Passend zur Rolle der Mathematik in unserer Welt, die vielfach unbeobachtet im Hintergrund mitwirkt. Der **Komponist J. B. Smith** stellt dazu fest:
„Es gibt auf der ganzen Welt kein Phänomen, bei dem Mathematik keine Rolle spielt, also ist auch die Musik nicht ohne Mathematik zu denken.“
- In den letzten Jahren gab es zu unserm Thema internationale Tagungen, z. B. eine dreigeteilte in Paris, Wien und Lissabon. Ein Aufsatz zu unserm Thema von **B. ENDERS** trägt den Titel:
„Mathematik ist die Musik für den Verstand, Musik ist die Mathematik für die Seele.“
 Vgl. auch **MU 1/2011**

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 3

Zwei Aspekten widmen wir unser Aufmerksamkeit:

- **Musikalische Gestaltung mathematischer Sachverhalte** (Homo/Isomorphismen zwischen Mathematik und Musik), also **Komponieren über Mathematik**
- **Mathematische Methoden beim Komponieren** (vgl. z. B. Transposition, Krebs, Umkehrung; Beschreibung von Rhythmen/Notenwerten)
- **Musikalische Strukturen i. a. diskret**

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 4


1

Beispiele zur musikalischen Gestaltung von Problem der diskreten Mathematik

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 5

MERSENNE: to compose = to combine

1588 - 1648



AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 6

T. Johnson 1984 Tango (of Permutations)

- Set with five elements, p. a.
 $M = \{1,2,3,4,5\}$
- Search all Permutations of M ($5 \times 24 = 120$)
- Notation per line

12345	12354	12435	12453
12534	12543	13245	13254
13425	13452	13524	13542
14235	14253	14325	14352
14523	14532	15234	15243
15324	15342	15423	15432

Pitches: 1 → d, 2 → f, 3 → gis, 4 → a, 5 → b(h)

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 7

(Permutations-) Tango T. Johnson




AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 8

Modification: Tango OS

- Idea: Take accords of an other tango
- Set for permutations: pitches of this accords (changing sets) :
- d f a** → **d fis a** (D-major accord), or **d g h**, or **c# e a**
- Add to the accord two pitches (function of the accord)
- Result (Accords from J. Rixner: **Blauer Himmel**) :

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 9

Tango OS



AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 10

Tom Johnson

Narayanas Kühe,

für Instrumente und Erzähler,

Edition 75, 75, rue de la Roquette 75011 PARIS

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 11

Tom Johnson: Narayanas cows


„Der Text ist keine musikalische Analyse, keine Mathematikstunde und auch keine komische Zugabe. Er soll einfach und als direkter Bestandteil des Stücks gesprochen werden, entweder von den Musikern oder von jemand anderem.

Erzählung:
Narayana war ein indischer Mathematiker aus dem 14. Jahrhundert. Er stellte folgende Aufgabe: eine Kuh gebärt jedes Jahr ein Kalb. Ab dem vierten Jahr gebärt jedes Kalb, zu Beginn jedes Jahres, seinerseits ein Kalb. Wie viele Kühe und Kälber haben wir, alles in allem, sagen wir nach 17 Jahren?
Während Sie sich das überlegen, geben wir Ihnen eine musikalische Demonstration der Aufgabe.


AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 12

Tom Johnson: Narayanas cows

- Recurrence
 - $C(n+3) = C(n+2) + C(n)$



Status: Kuh, Kalb (Duration) Gen.: Pitch



AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 13

Tom Johnson: Narayanas cows

Im ersten Jahr haben wir nur die erste Kuh mit ihrem ersten Kalb.
 Hier folgt eine erste, noch näher zu untersuchende **Musik 1**

Im zweiten Jahr haben wir die erste Kuh und zwei Kälber.
 (**Musik 2**)

Im dritten Jahr haben wir die erste Kuh und drei Kälber.
 (**Musik 3**)

Im vierten Jahr wird das älteste Kalb Mutter, womit eine dritte Generation von Narayanas Kühen beginnt.“
 (**Musik 4**)

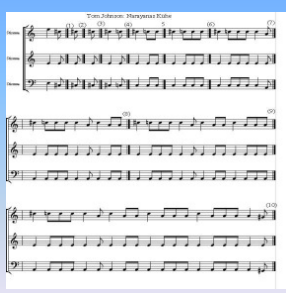
AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 14

Tom Johnson: Narayanas cows

- „Im sechzehnten Jahr haben wir eine neue Tochter, 13 neue Enkelinnen, 55 neue Ur-enkelinnen, 84 neue Ur-ur-enkelinnen, 35 neue Ur-ur-ur-enkelinnen und die allererste Ur-ur-ur-enkelin.“ (**Musik 16**)
- Wir gelangen ins siebzehnte und Jahr der Aufgabe. Die meisten unter Ihnen haben den Schlussbestand der Herde sicher schon berechnet. Sollten Sie noch nicht so weit sein, oder wenn Sie ihr Resultat kontrollieren möchten, brauchen sie bloß die Noten zu zählen, die wir spielen.“ (**Musik 17**)

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 15

Tom Johnson: Narayanas cows



AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 16

The Fibonacci Numbers


The Problem

- In the year 1202, LEONARDO OF PISA (1180? – 1250?), better known as FIBONACCI, posed the following problem in his book „Liber Abaci“:
- Suppose that we study the prolific breeding of rabbits. We start with one pair of newborn rabbits (of opposite sex). This pair become adults in two month. Assume that each pair of adult rabbits produce one pair of young (of opposite sex) each month. A newborn pair of rabbits become adults in two months, at which time they also produce their first pair of young. Assume that rabbits never die.
- The Fibonacci Number $F(k)$ count the number of rabbit pairs present at the beginning of the month k .

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 17


The Fibonacci Numbers

Month 0 with **one pair of newborn rabbits** (of opposite sex).



Month 1: **One pair of young rabbits**

$F(0) = 1$




$F(1) = 1$

AKMUI SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 18

The Fibonacci Numbers (month 2)

This pair become adults in two month.
Assume that each pair of adult rabbits produce one pair of young (of opposite sex) each month.




$$F(2) = F(1) + F(0) = 1 + 1 = 2$$


AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 19

The Fibonacci Numbers (month 4)

The „Oldies“ produce the next pair of newborn rabbits (to the right of their parents), the newborn of month 3 are the young one-month-old rabbits of month 3



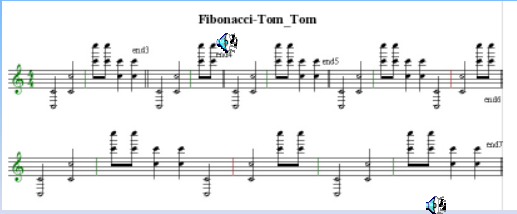
The young one-month-old rabbits of month 3 become adults and produce their first pair of newborn rabbits



$$F(4) = F(3) + F(2) = 3 + 2 = 5$$

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 20


Fibonacci tom tom



AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 21


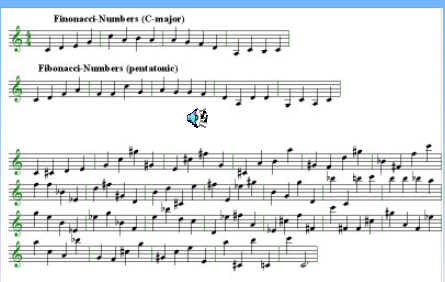
Fibonacci Songs

• Number (mod m) → pitch
Example m = 7:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → c d e f g a b(h)




AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 22

Fibonacci Songs





AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 23

Fibonacci Songs




First_48_notes
pentatonicscale
maintheme
mainthemerythmic
Froberg_Fibonacci_Waltz



And your song??

WinMatrix™ Design Software
Download Free Trial



AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 24

2 Mathematik hinter der Musik von Arvo Pärt

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

25

Der Tintinnabuli-Stil (Glöckchen-Stil) von Avo Pärt (geb. 1935 in Estland).



Bild 2011

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

26

Arvo Pärt

- 1954 begann er ein Musikstudium,
- arbeitete als Tonmeister beim Estnischen Rundfunk
- studierte in Tallinn von 1958 bis 1963 Komposition bei V. Tormis und H. Eller.
- Sein neoklassisches Frühwerk wurde von der Musik [Schostakowitschs](#), [Prokofjews](#) und [Bartóks](#) beeinflusst.
- Anschließend experimentierte Pärt mit [Schönbergs Zwölftontechnik](#) und dem [musikalischen Serialismus](#).
- Seine Musik erregte den Unwillen der sowjetischen Kulturfunktionäre (nicht systemkonforme moderne Komponierweise / religiöser Gehalt).
- Seine Komposition *Nekrolog*, das erste estnische Werk in Zwölftontechnik, wurde 1960 offiziell missbilligt.

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

27

A. Pärt

- Pärt suchte nach einem neuen künstlerischen Ausdrucksweg
- ab 1962 als Student am Moskauer Konservatorium sogenannte **Collage-Technik**,
- in dieser wird (wie in seiner Komposition *Credo*) Klangmaterial aus den Werken anderer Komponisten entlehnt, vor allem von [Johann Sebastian Bach](#) und mit avantgardistischen Elementen kombiniert.
- Die Collage-Technik erwies sich jedoch für Pärt als Sackgasse: Er hatte das Gefühl, **es mache keinen Sinn mehr, Musik zu schreiben, wenn man fast nur mehr zitiert.**
- **Schöpferischen Pause (1968–76)** mit 3. Sinfonie (1971) als einzigem autorisierten Werk
- In dieser Beschäftigung mit Gregorianik und Musik der Renaissance (klassische Vokalpolyphonie).
- **1980 Emigration über Wien nach Berlin (lebt dort seit 1981)**

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

28

A. Pärt

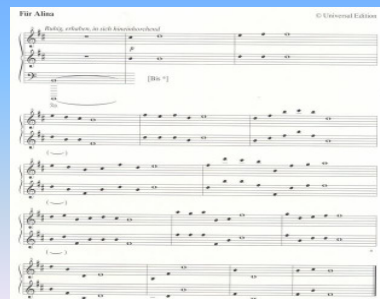
- **1976** Klavierstück **Für Alina**
- In der langen Abgeschiedenheit hatte er einen neuen persönlichen Stil entwickelt,
- die persönliche Gefühlswelt tritt zugunsten einer dem Asketischen entsprungenen Balance zurück
- **Tintinnabuli-Stil.**

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

29

Für Alina (1976)



AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

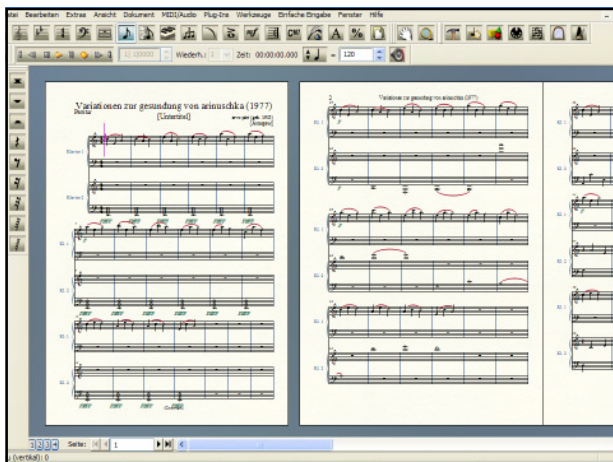
30

Kennzeichen des Tintinnabuli-Stils (seit etwa 1976)

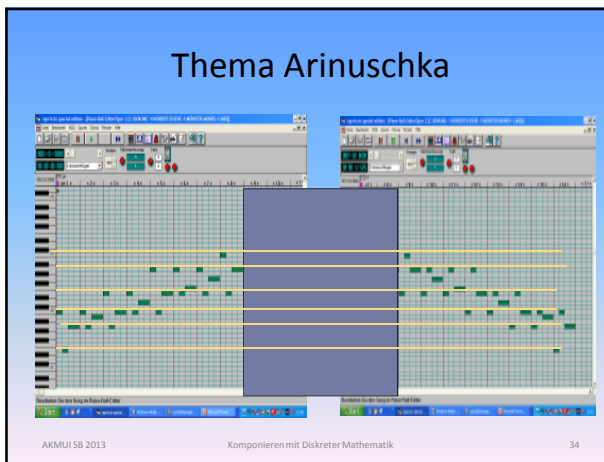
- Beschränkung auf die einfachen tonalen Grundelemente **Dreiklang** und **Tonleiter**
- Unterscheidung von **Melodiestimmen** (mit Skalen/Tonleiterausschnitten) und **Tintinnabuli-Stimmen** (Dreiklänge nutzend)
- In meist getragenen Tempo wird jedem einzelnen Ton Gewicht und Bedeutung verliehen
- Hochformalisiertes **Kompositionssystem**, bei dem melodische und harmonische Verläufe **algorithmisch (mit Formeln)** beschrieben werden können

Beispiel

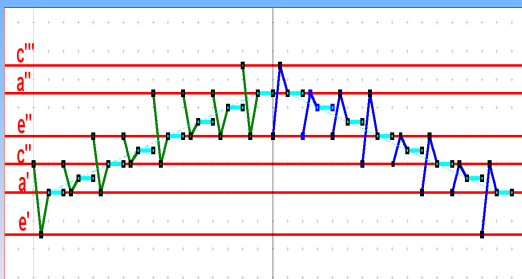
Variationen zur Gesundung von Arinuschka 1977 Themenfindung



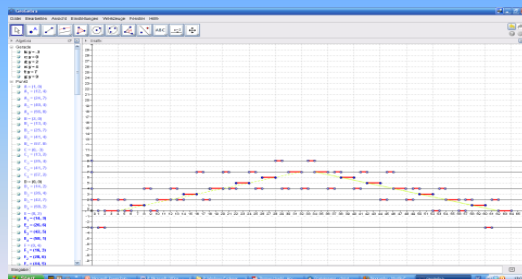
Thema Arinuschka



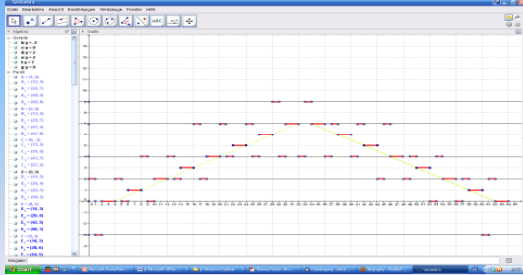
Thema Arinuschka



Variationen zur Gesundung von Arinuschka (1977)



Variationen zur Gesungung von Arinuschka (1977)

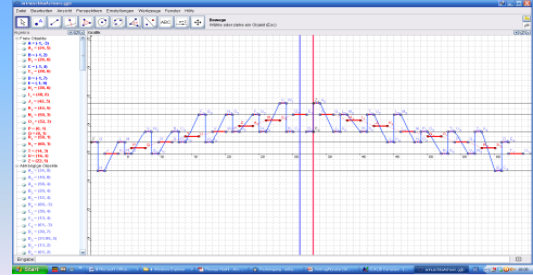


AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

37

Symmetrieachsen zur M-Stimme



AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

38

Beschreibung mit Formel(n)

- Zuordnung: Notennamen -> Zahlen
 - a', h', c', d', e', f', g', a'
 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 - Alternative: MIDI-Nummern
- Zeitachse: [0, 16]
- oder [0; 64] (Viertelzählung)
- Tonhöhenfunktion



AKMUJ SB 2013

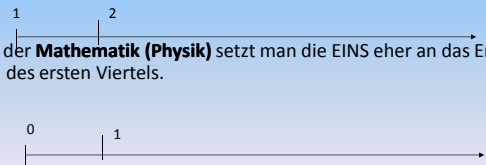
Komponieren mit Diskreter Mathematik

39

• Einsatzzeit

Ein weiteres Problem:

In der **Musik** beginnt man beim Zählen mit EINS, es wird also der Beginn des ersten Viertels usw. markiert.



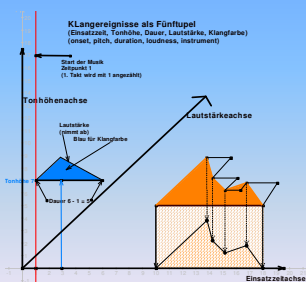
In der **Mathematik (Physik)** setzt man die EINS eher an das Ende des ersten Viertels.

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

40

Piano-Roll-Editor



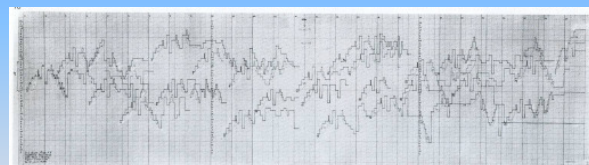
AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

41

Henri Nouveau: „Graphische Darstellung der Fuge Nr. 1 aus dem Wohltemperierten Klavier“, 1922

(Vorwegnahme des Pianoroll-Editors)



AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

42

Transposition Umkehrung Krebs (mit Transp.)

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 43

Krebskanon von Bach im Pianoroll-Editor

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 44

3. Satz von F. Greysen *Dasallendes*

P1 Spiegelbild von P1 um:

Achse

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 45

Kennzeichen des Tintinnabuli-Stils (seit etwa 1976)

- Beschränkung auf die einfachen tonalen Grundelemente **Dreiklang** und **Tonleiter**
- Unterscheidung von **Melodiestimmen** (mit Skalen/Tonleiterausschnitten) und **Tintinnabuli-Stimmen** (Dreiklänge nutzend)
- In meist getragenen Tempo wird jedem einzelnen Ton Gewicht und Bedeutung verliehen
- Hochformalisiertes **Kompositionssystem**, bei dem melodische und harmonische Verläufe **algorithmisch (mit Formeln)** beschrieben werden können

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 46

Aufbau der Komposition Spiegel im Spiegel
Scala: F-Dur; T-Akkord: F-Dur

- Einleitung 3 Takte (TP)
- A(1) TP(3 Takte) B(1) TP
- A(2) / TP B(2) TP
- A(3) \ TP B(3) TP
- A(8) TP B(8) TP TP

Umkehrung → a

Krebs

TP A1 TP B1 TP A2 TP B2 TP A3 TP B3 TP A4 TP B4 TP A5 TP B5 TP A6 TP B6 TP A7 TP B7 TP A8 TP B8 TP TP

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 47

Klavierbegleitung: Gebrochene Akkorde)

Beispiel: Spiegel im Spiegel (1978)

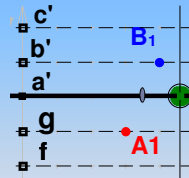
Melodiestimme (hier Cello-Ausgabe)

Doppeloktave-Sequenzende

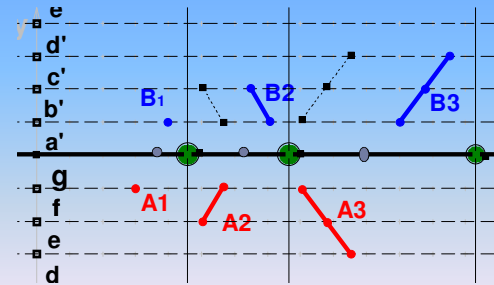
Akkordtoneinwürfe

AKMUJ SB 2013 Komponieren mit Diskreter Mathematik 48

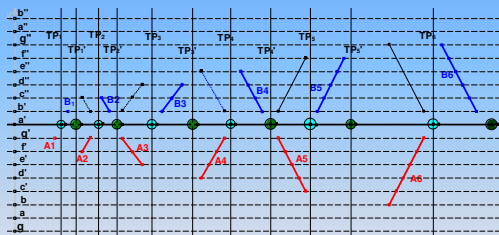
Entstehung der Tonhöhen der Meliestimme



Entstehung der Meliestimme



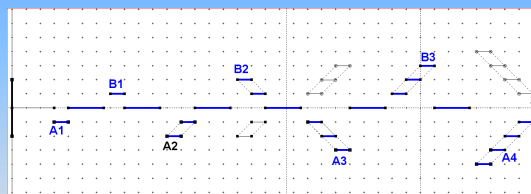
Entstehung der Meliestimme



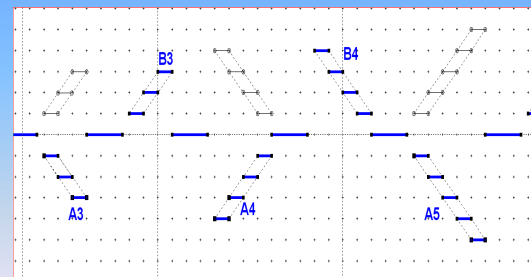
Entstehung der Meliestimme

	Melodie 1	Melodie 2	
A1	g a b	B1	
A2	f g a c b	B2	
A3	g f e a b c d	B3	
A4	d e f g a e d c b	B4	
A5	g f e d c a b c d e f	B5	
A6	b c d e f g a g f e d c b	B6	
A7	g f e d c b a a b c d e f g a	B7	
A8	G a b c d e f g a b' a g f e d c b	B8	

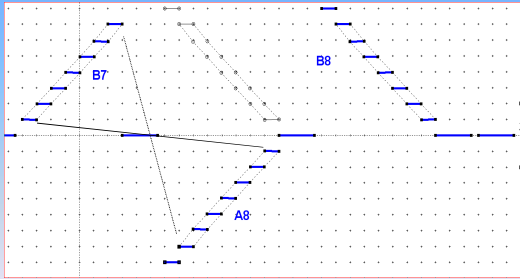
Pianoroll-Darstellung der M-Stimme



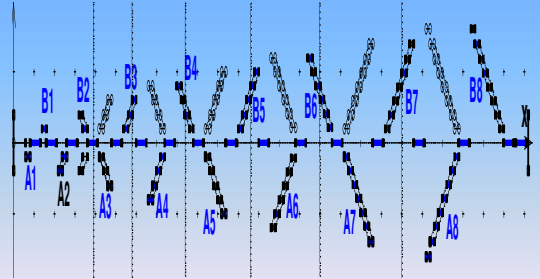
M-Stimme (Pianoroll-D.)



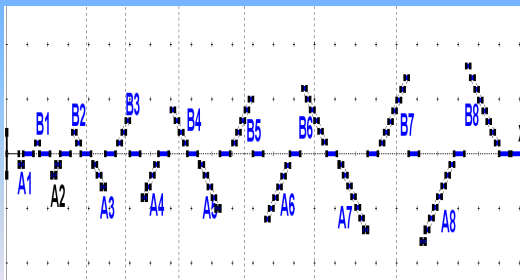
Abschluss der M-Stimme



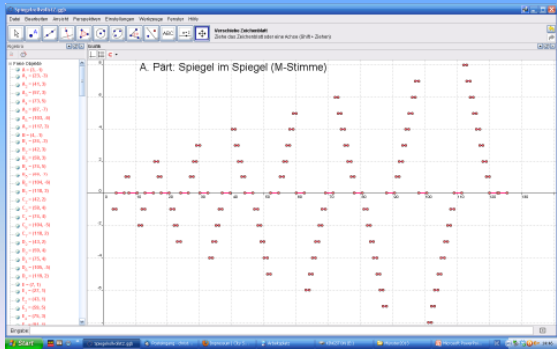
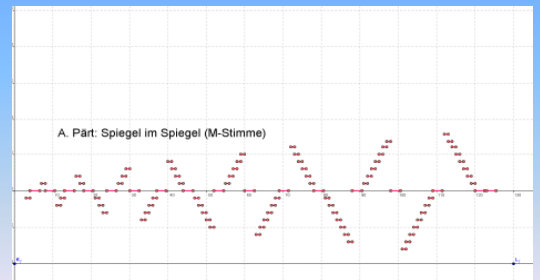
Gesamtbild der Pianorolldarstellung



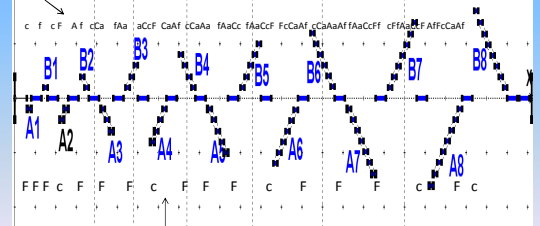
Gesamtbild der Pianorolldarstellung



Spiegel im Spiegel: M-Stimme



Akkordtoneinwürfe in zweiter Takt Hälfte bei A/B-Tönen in M-Stimme



Doppeloktave in den Endstücken

- B-Teile immer tiefe Doppeloktave f
- A-Teile: Wechsel zwischen Doppeloktave c hoch und Doppeloktave f tief

AKMUJSB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

61

Akkordbegleitung

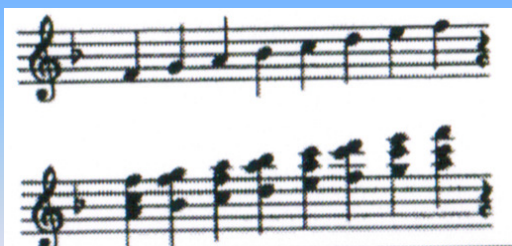
- Jedem Ton der Melodie ist ein Akkord zugeordnet
- Der oberste Ton ist immer der gleiche wie der in der Melodiestimme (Oktave höher),
- der unterste jeweils eine Sexte darunter (bzw. eine Terz über dem Ton der Melodie).
- Der mittlere Ton des Akkordes ist immer der dem obersten Ton nächstgelegene Ton des F-Dur-Akkordes.

AKMUJSB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

62

Akkordbegleitung



AKMUJSB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

63

- Akkordtöne: 0, 2, 4, 7, 9, 11
- 0 7 7-5= 2, 4 2 4 7
- 1 8 3, 7 3 7 8
- 2 9 4, 7 4 7 9
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

AKMUJSB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

64

Einzelöne

Es treten einzelne Töne des F-Dur-Akkordes in allen Oktavlagen auf und zwar auch wieder in Abhängigkeit von der Melodie:

Der übernächste Akkordton über dem höchsten oder unterhalb des tiefsten Tones der Dreiklangbewegung

AKMUJSB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

65

Einzelöne aus Akkord

- | | |
|-------------------|-----------------|
| • f | • f |
| • a f | • f a |
| • a a f | • f a a |
| • c a a f | • f a a c |
| • c a a a * | • f a a c c |
| • f c c a a f | • f a a c c f |
| • f f c c c c a | • f a a c c f f |
| • c f f a a c c f | • f a a c c f f |

AKMUJSB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

66

Modifikationen

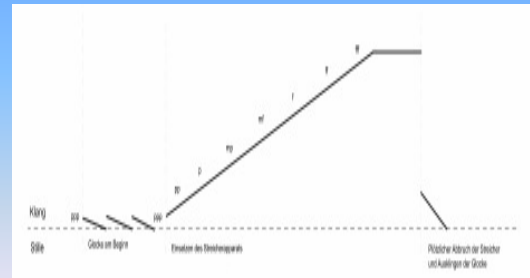
- Skalenwechsel (z. B. F-Moll statt F-Dur)
- Wechsel des Starttones (der Spiegelachse)
- Reihenfolge der Akkordtöne
- Akkordzuordnung modifizieren
- Schrittweise Hinzunahme von zwei Tönen
-

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

67

Dynamik der Komposition *Cantus*



AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

68

Glocke und Stille bei A. Pärt

- „Sie [die Glocke] führt dem Hörer beim vollständigen Verklingen auch die Grenzen seiner Hörfähigkeit vor.“
- Die Unmerklichkeit, mit der der Klang in die Stille entschwindet, genauer: unsere eigene Hörgrenze unterschreitet, ohne doch schon wirklich verklungen zu sein, deutet auf seine Fähigkeit hin,
- beide Sphären [Klang und Stille,] auf einzigartig diskrete Weise zu verbinden.“
- Somit ist eine Besonderheit, die Pärts Stücken innewohnt, das Wechselspiel von Klang und Stille
- im Klang der Glocke äußere sich das „Bündnis des Einfachen mit dem Vollkommenen“
(nach T. Hoehl)

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

69

Auskomponierte Stille



1. Die ersten Takte von „Cantus in Memory of Benjamin Britten“

2. In dem Doppelkonzert für zwei Violinen „Tabula Rasa“ wird Stille sogar am Ende des Stückes auskomponiert.

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

70

Zur Bedeutung der Mathematik

- Die Kompositionen sind „einfach“ gestrickt, dennoch entfalten sie beim Hörer komplexe Gefühle und Vorstellungen, die sicher nicht mit der benutzten Kompositionstechnik erklärt werden können.
- Die Mathematik liefert demnach die technische Seite der Werke, bei ihrer künstlerischen Wirkung kommen viele andere Momente hinzu.

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

71

Aus Salzburger Musikgespräch (Vorsitz H. von Karajan)

- „Weg zum Verständnis einer Komposition liegt in der Aufdeckung der zugrunde liegenden mathematischen Prinzipien.....“
- Da ist aber die Gefahr, dass man durch Wissen sehr viel von dem Genuss verliert ... Nehmen Sie einen Gorgonzola-Käse, den Sie essen wollen. Sehen Sie ihn durch ein Mikroskop an, so essen Sie ihn sicher nicht mehr, weil Sie die Würmer gesehen haben.“

AKMUJ SB 2013

Komponieren mit Diskreter Mathematik

72

Hören?

**Danke für Ihre
Aufmerksamkeit**

christmann@mathematik.uni-kl.de