Term – Tabelle – Graph: Zusammenhänge nur explorieren oder auch Mathematik lernen?

Lernen mit digitalen Werkzeugen

What role does prior experience with suitable mental and written methods play in the process of understanding notation, operations and procedures in arithmetic and algebra, and hence in constituting in pupils' minds the key mental objects of elementary mathematics?

	$-T$ (oh		
01	Schrei $a-(b+$		
02	Schrei $2(a+b$		
03	Schrei $2(ab)$		
04	Schrei $3(5a-$		
05	Schrei $(3+a)(b$		
06	Schreibe anders: $2a+2b$		
07	Vereinfache $x^2y^2+(xy)^2$		
08	Faktorisiere $3ab+6ac$		
09	Faktorisiere x^2-4	Faktorisiere: x^2+4x+4	Faktorisiere x^2-x-6

Herget, Heugl, Kutzler & Lehmann 2002, Gardiner 2001

Lernen mit digitalen Werkzeugen

Gardiner (2001)

Angesichts einer
wachsenden Präsenz digitaler Werkzeuge
im Mathematikunterricht und außerhalb
erscheint die Beweislast umgekehrt:

Wozu die hilfsmittelfreie Verfügbarkeit?

Lernen mit digitalen Werkzeugen

Wozu hilfsmittelfrei verfügbares Grundwissen?

Weil ein verständiger Zugang zu
mathematischen Konzepten und Kompetenzen
mit Hilfe digitaler Werkzeuge
genau diese braucht.

1. Pragmatische Perspektive
2. Epistemologische Perspektive
3. Kognitive Perspektive

1. Pragmatische Perspektive

Produktives Lernen mit digitalen Werkzeugen muss durch Einsicht in Termstrukturen begleitet sein.

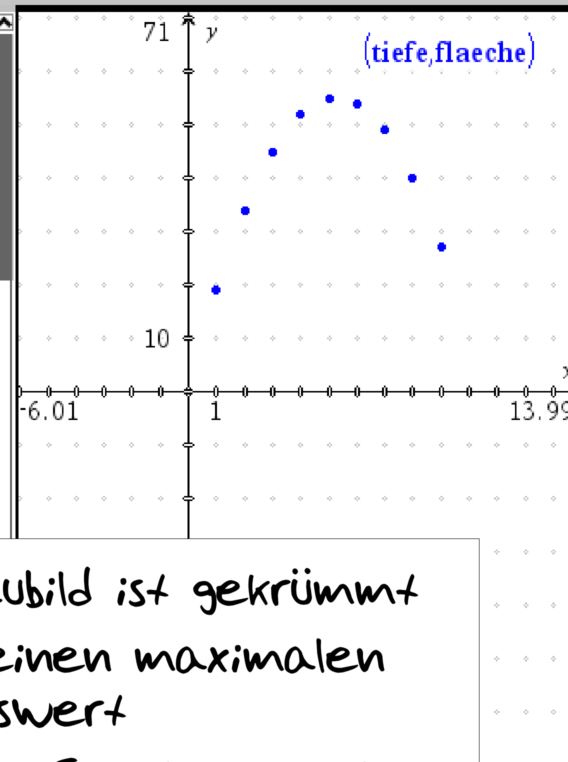
- Eingabefehler (syntaktischer und struktur-verändernder Art)

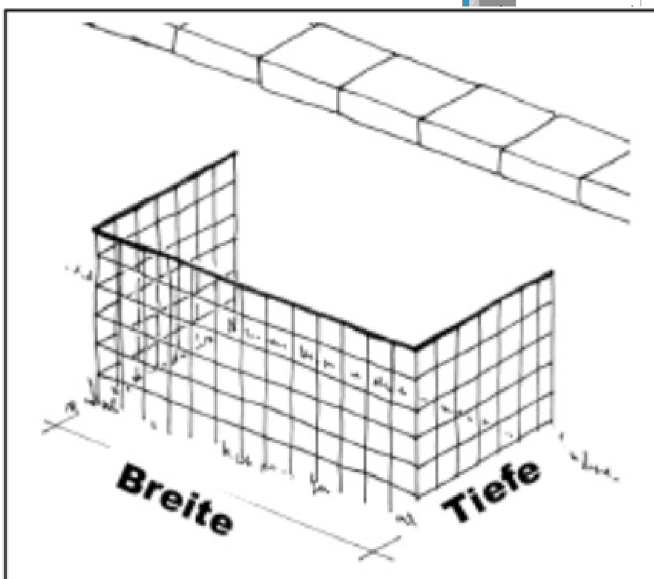
„Kommentiere!“

Eine Klassenarbeitsaufgabe (R. Berding)

2. Epistemologische Perspektive

	A tiefe	B breite	C flaeche
◆		=21−2*tiefe	=tiefe*breite
1	1	19	19
2	2	17	34
3	3	15	45
		13	52
		11	55
		9	54
		7	49
		5	40
		3	27





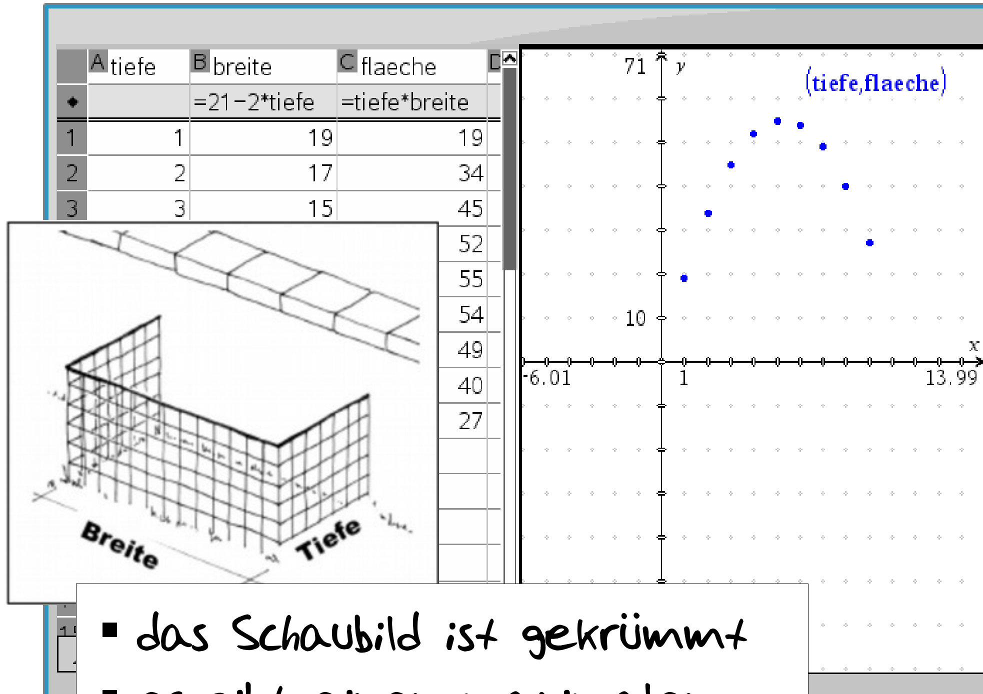
- das Schaubild ist gekrümmt
- es gibt einen maximalen Funktionswert
- zu jedem Funktionswert gibt es zwei Ausgangswerte

2. Epistemologische Perspektive

Beobachtungen in digitalen Lernumgebungen sind insb. formal-mathematisch zu begründen

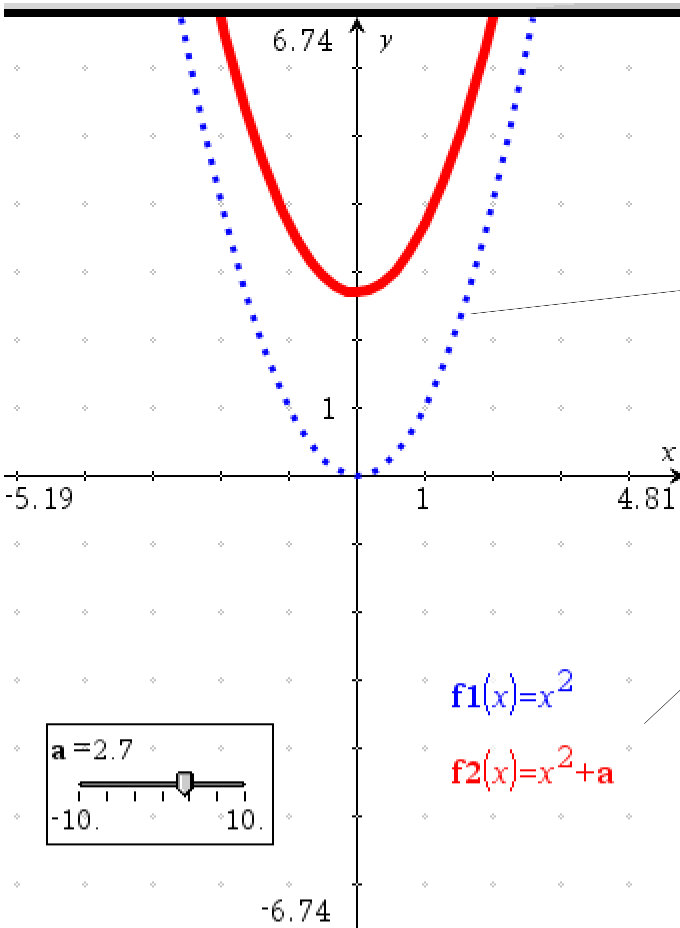
- sinnhafter Zugang zum neuen Funktionstyp mittels digitaler Hilfsmittel, aber
- Begründung des „Neuen“ durch Aufzeigen neuer algebraischer Elemente im Funktionsterm:

$$\text{flaeche} = \text{tiefe} \cdot \text{breite}$$
$$= \text{tiefe} \cdot (21 - 2 \cdot \text{tiefe})$$
$$= 21 \cdot \text{tiefe} - 2 \cdot \mathbf{tiefe^2}$$
$$= 21 - 2 \cdot \mathbf{x^2}$$



- das Schaubild ist gekrümmt
- es gibt einen maximalen Funktionswert
- zu jedem Funktionswert gibt es zwei Ausgangswerte

3. Kognitive Perspektive

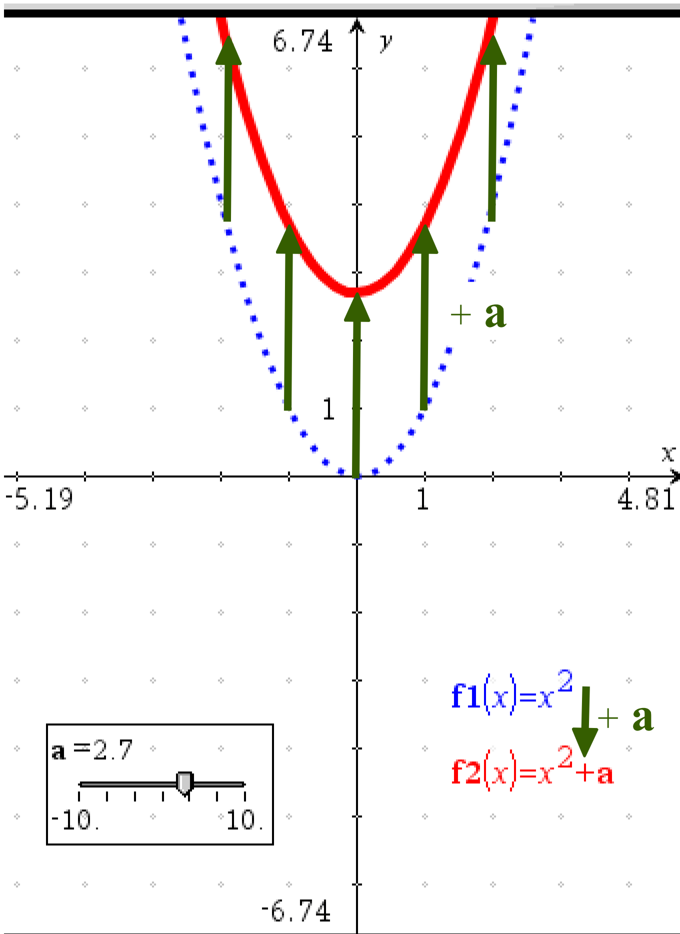


x	f1(x):= x^2	f2(x):= x^2+a
-5.	25.	27.7
-4.	16.	18.7
-3.	9.	11.7
-2.	4.	6.7
-1.	1.	3.7
0.	0.	2.7
1.	1.	3.7
2.	4.	6.7
3.	9.	11.7
4.	16.	18.7
5.	25.	27.7
6.	36.	38.7
7.	49.	51.7
8.	64.	66.7

25.

Jeder Funktionswert wird um a erhöht. Dadurch erhöhen sich die Tabelleneinträge um a und verschiebt sich jeder Punkt des Graphen um a nach oben.

3. Kognitive Perspektive



x	f1(x):= x^2	f2(x):= x^2+a
-5.	25.	27.7
-4.	16.	18.7
-3.	9.	11.7
-2.	4.	6.7
-1.	1.	3.7
0.	0.	2.7
1.	1.	3.7
2.	4.	6.7
3.	9.	11.7
4.	16.	18.7
5.	25.	27.7
6.	36.	38.7
7.	49.	51.7
8.	64.	66.7

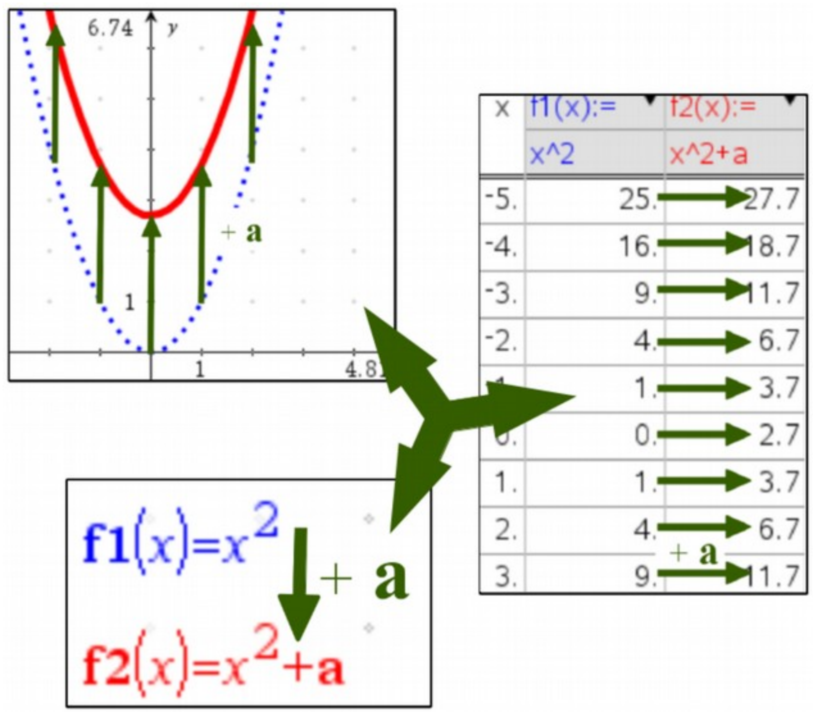
+ a

25.

3. Kognitive Perspektive

Lernen mathematischer Konzepte als kognitiver Abstraktionsprozess: –
<u>notwendig für wissenschaftliches Denken:</u>

- Identifikation von Invarianten in situativ gegebenen Repräsentationen und Kontexten
- Ausbildung wissenschaftlicher Begriffe anstelle Alltagsbegriffe durch Dekontextualisierung
- erfolgreicher Wissenszuwachs durch Anwendung von syntaktisch organisierten Symbolsystemen



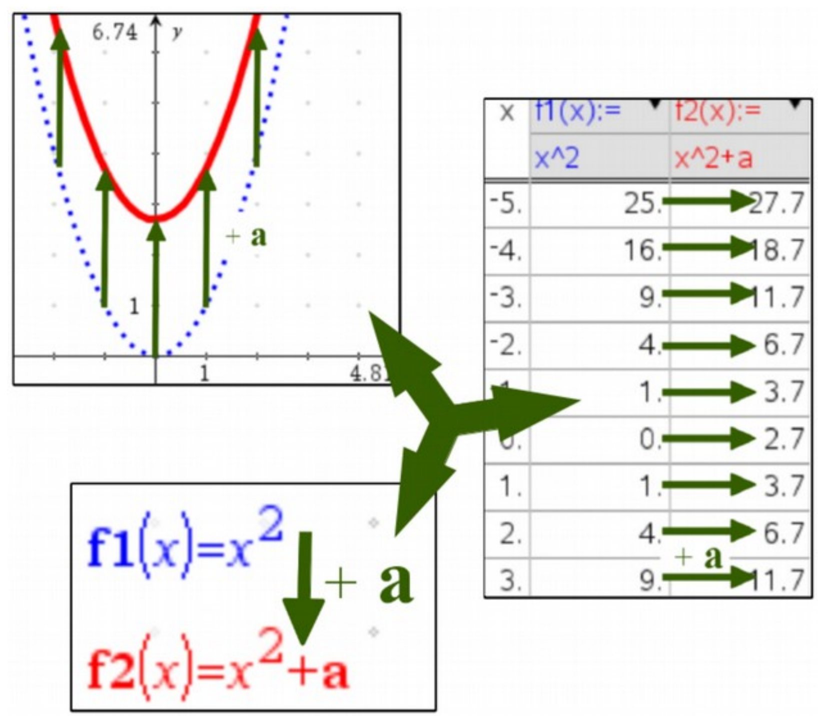
Noss & Hoyles 1996; Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus 2001; Lompscher & Giest 2010; Stern & Schumacher 1994

3. Kognitive Perspektive

Lernen mathematischer Konzepte als kognitiver Abstraktionsprozess –

<u>Der Computer kann unterstützen:</u>

- als kognitiver Prozess
  nicht direkt initiierbar
  oder diagnostizierbar
- beobachtbar aber ist das Beschreiben von Invarianten in multiplen dynamisch vernetzten Repräsentationen.
- Die Dynamisierung ist entscheidend für das Erfassen von Invarianten.
  Digitale Werkzeuge bieten in vielen Fällen hierfür ideale Lernumgebungen an, insb. MDR



Ainsworth 2006, Schnortz & Bannert 2003, Vogel 2006

Lernen mit digitalen Werkzeugen

Wozu hilfsmittelfrei verfügbares Grundwissen?

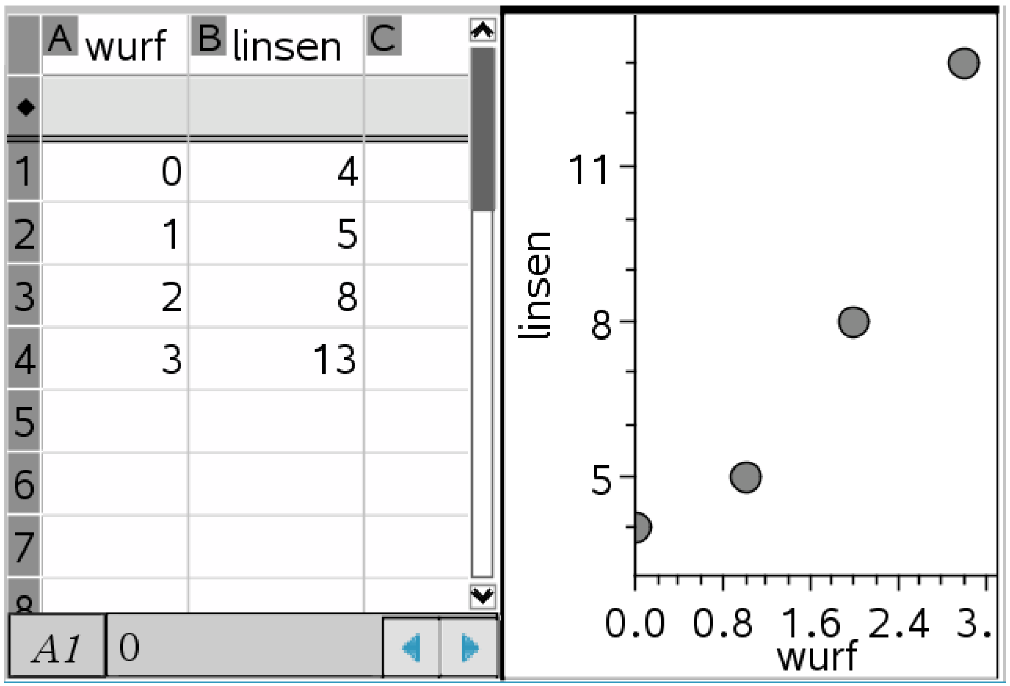
Weil ein verständiger Zugang zu
mathematischen Konzepten und Kompetenzen
mit Hilfe digitaler Werkzeuge
genau diese braucht.

1. Pragmatische Perspektive
2. Epistemologische Perspektive
3. Kognitive Perspektive

Inwieweit sind Lernende in der Lage,
zur Erklärung von Zusammenhängen
zwischen Repräsentationen von Funktionen
sich auf Invarianten zu beziehen?

Ergebnisse einer Vorstudie...

„Ambivalente Aufgaben“

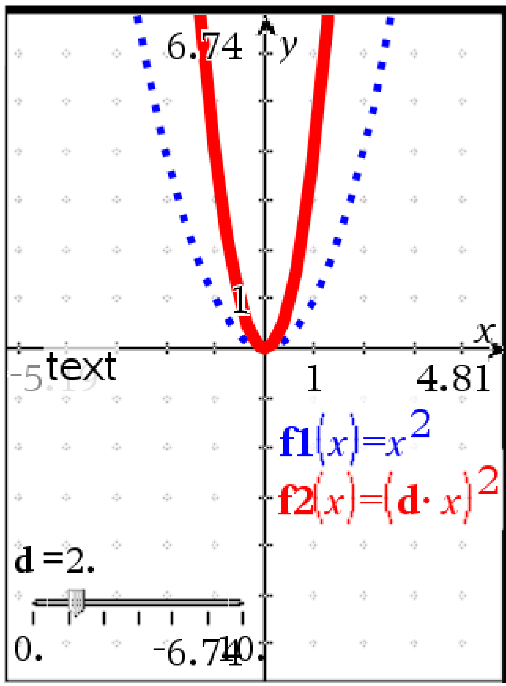


quadratisches oder exponentielles Modell?

- Repräsentationswechsel: zwischen Realsituation und mathematischem Modell
- Invariante: 50% Gewinn-wahrscheinlichkeit bei jedem Wurf)

Pinkernell 2010; Körner 2003

„Ambivalente Aufgaben“



x	f1(x):= x^2	f2(x):= (d*x)^2
-3.	9.	36.
-2.	4.	16.
-1.	1.	4.
0.	0.	0.
1.	1.	4.
2.	4.	16.
3.	9.	36.

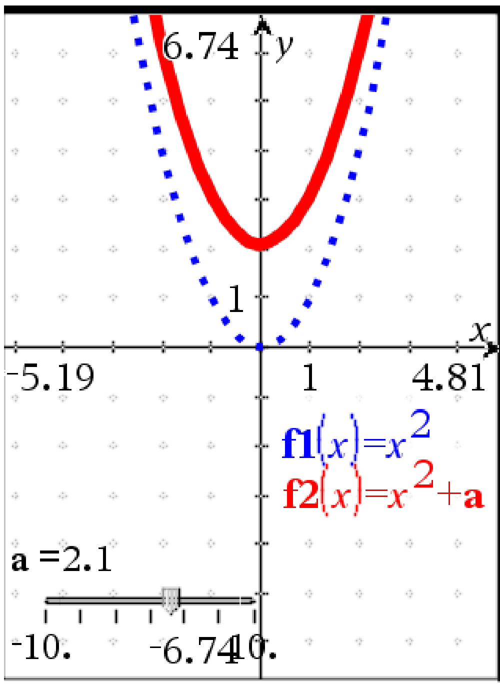
3.

Parabel gestaucht
oder gestreckt?

- Repräsentationswechsel: zwischen algebraischer, numerischer und geometrischer Repräsentation
- Invariante: Vergrößerung des Ausgangswertes x um den Faktor d

Pinkernell 2010; Körner 2003

„Ambivalente Aufgaben“

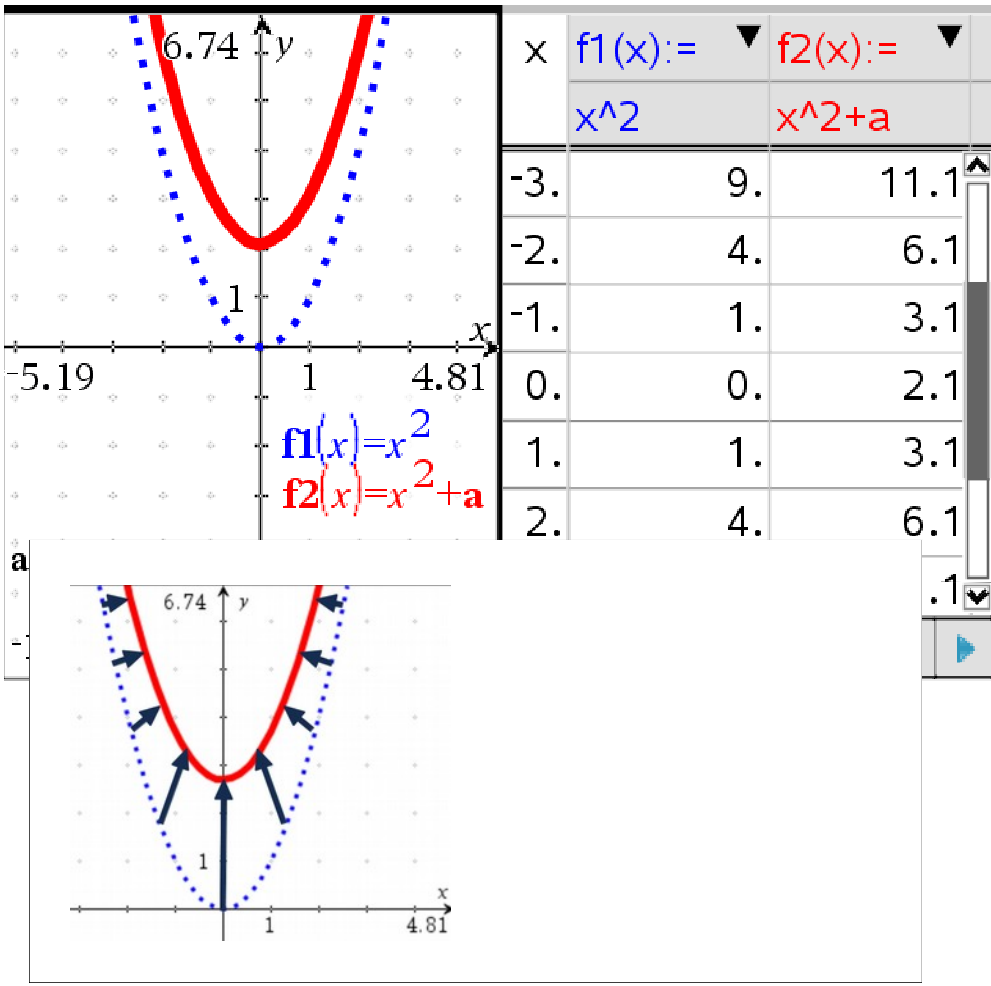


x	f1(x):=	f2(x):=
	x^2	x^2+a
-3.	9.	11.1
-2.	4.	6.1
-1.	1.	3.1
0.	0.	2.1
1.	1.	3.1
2.	4.	6.1
3.	9.	11.1
0.		

Parabel verschoben
oder verkleinert?

- Repräsentationswechsel: zwischen algebraischer, numerischer und geometrischer Repräsentation
- Invariante: Vergrößerung des Funktionswertes f(x) um den Summanden a

ein Interviewausschnitt (05)



S: *[bewegt den Regler nach rechts]*

also die Parabel wird über die y-Achse nach oben verschoben ... die ähm wie heißt des die Breite

[bewegt beide Handflächen wiederholt wie beim Klatschen]

I: Jaja, klar

S: verändert sich ... auf jeden Fall wenn man es nach rechts her zieht ... in in die Plusrichtung

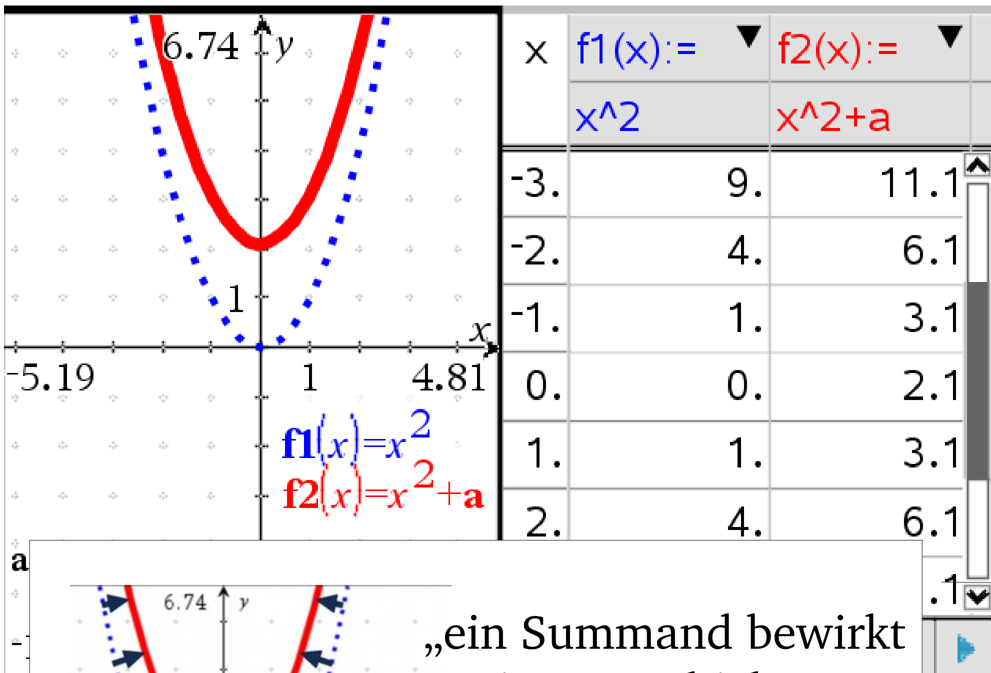
[bewegt dabei den Regler soweit nach rechts, dass die Parabel fast aus dem Fenster verschwindet]

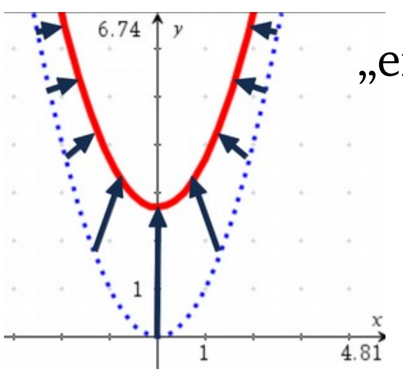
... und wenn man es nach unten zieht in die Minusrichtung

[bewegt den Regler nach links, dass der Scheitelpunkt der Parabel fast den unteren Fensterrand erreicht]

und da wird die Parabel breiter bleibt aber immer noch nach oben geöffnet.

ein Interviewausschnitt (05)





„ein Summand bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f in y-Richtung,

I: Können Sie sich erklären, warum die Parabel sich nach oben bzw. nach unten verschiebt, wenn man den Schieberegler verändert

[weist mit dem Kugelschreiber auf den Schieberegler]

S: *[betrachtet den Screenshot, spricht leise, fast unverständlich]*

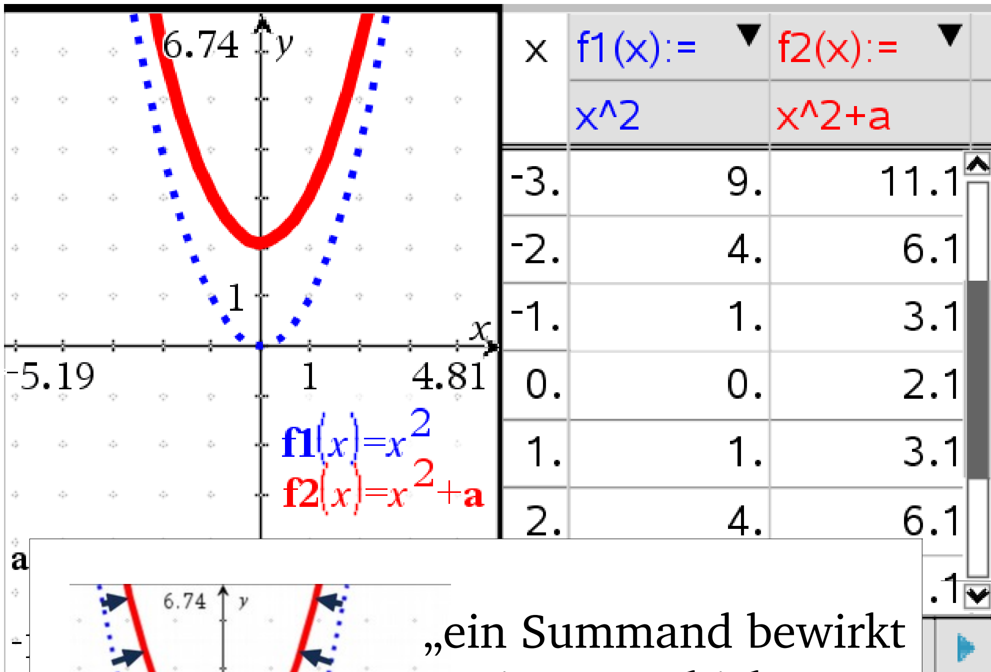
hm was bedeutet a ... was ... bedeutet a

[lehnt sich zurück, spricht laut]

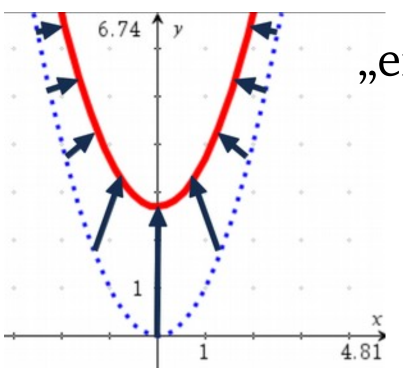
a ist ja ... a war ja auch irgendwas ... a is ja ... die y-Richtung.

I: Aha

ein Interviewausschnitt (05)



x	f1(x):= x^2	f2(x):= x^2+a
-3.	9.	11.1
-2.	4.	6.1
-1.	1.	3.1
0.	0.	2.1
1.	1.	3.1
2.	4.	6.1



„ein Summand bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f in y-Richtung, ein Faktor c eine Verengung.“

S: Wenn ich dann … nach oben … also dann ist es keine Normalparabel mehr dann ist das so ein bisschen enger

[I und S analysieren gemeinsamen dieTabelleneinträge und deren Bedeutung für Gestalt und Position der beiden Parabeln.

Mittlerweile ist a = 1]

S: das ist ja einfach um eine nach oben verschobene Normalparabel, aber die Breite verändert sich ja.

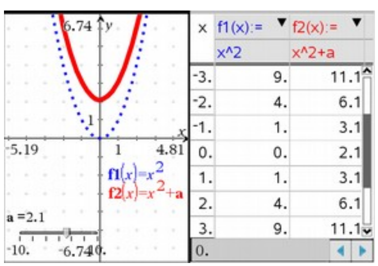
I: Warum sagen Sie 'aber'?

S: die Parabel verschiebt sich ja nicht nur nach oben sondern sie wird ja auch enger dann müsste ja eigentlich vor dem Quadrat noch was stehen

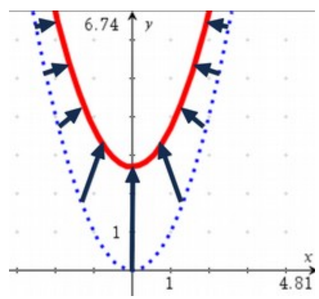
I: Aha. Warum?

S: Weil ich das so gelernt hab.

Bildschirm



Deutung



„Verengung“
„Verkleinerung“
„Verschiebung“
„Achsendurchgang“
„tiefster Punkt“

Wissen

„ein Summand bewirkt
eine Verschiebung
des Graphen von f
in y-Richtung,
ein Faktor
eine Verengung.“

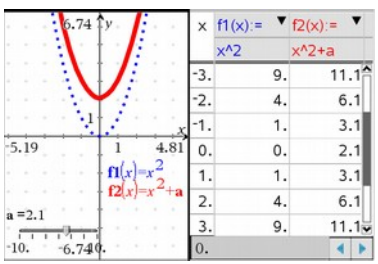
„a war auch
irgendwas“
„habe das so gelernt“
„ich weiß, es geht
um a, also um das
Verschieben“

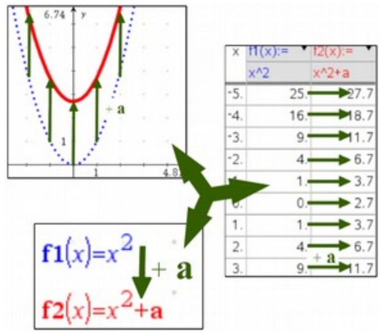
Ober-
flächen-
ebene

eMDR

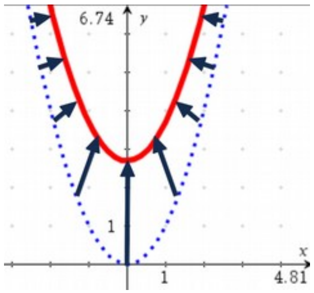
iR

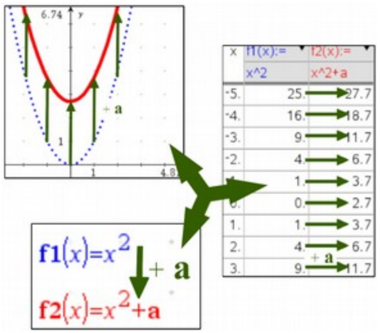
Bildschirm





Deutung





Wissen

„ein Summand bewirkt
eine Verschiebung
des Graphen von f
in y-Richtung,
ein Faktor
eine Verengung.“

Ober-flächen-ebene

„Jeder Funktionswert
wird um a erhöht.
Dadurch erhöhen sich
die Tabelleneinträge
um a und es verschiebt sich
jeder Punkt des Graphen
um a nach oben.“

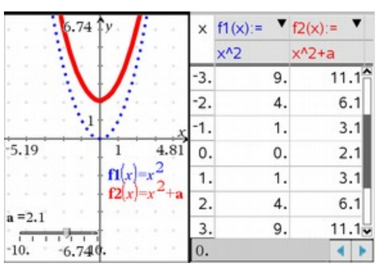
Struktur-ebene

Vogel 2006; Schnotz 1995

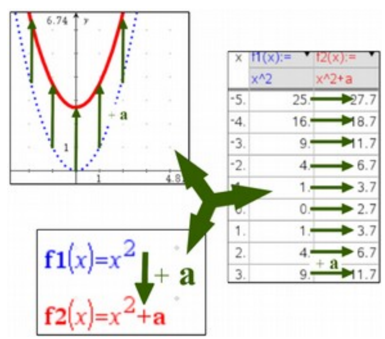
eMDR

iR

Bildschirm



Deutung



Wissen

„Jeder Funktionswert
wird um a erhöht.
Dadurch erhöhen sich
die Tabelleneinträge
um a und es verschiebt sich
jeder Punkt des Graphen
um a nach oben.“

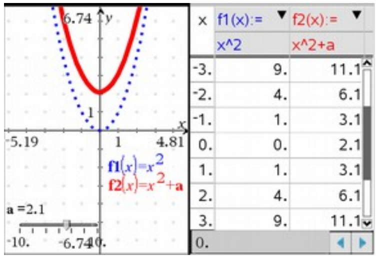
Struktur-
ebene

Vogel 2006; Schnotz 1995

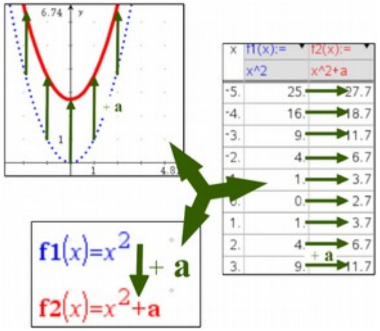
ein Interviewausschnitt (03)

eMDR

Bildschirm



Deutung



S: das a ist ja der y-Achsenabschnitt also oder bzw. halt der Wert um den die Funktion nach oben oder vielleicht auch nach unten verschoben wird und der ist im Moment null bei der roten Funktion

[…]

I: Jemand davor hatte mal gesagt während des Interviews „die Parabel wird größer wenn ich den Schieberegler nach links bewege“ - was sagen Sie dazu?

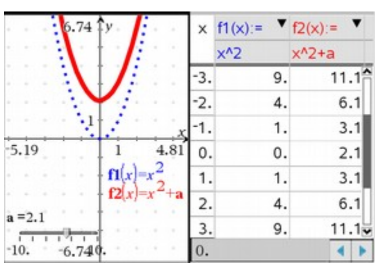
S: Ja die geht ja hier unendlich weiter also…die Größe ist immer gleich nur halt der sichtbare Bereich eben auf diesem Wertebereich das wird halt größer

[…]

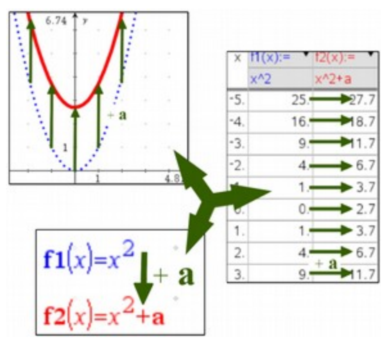
ein Interviewausschnitt (03)

eMDR

Bildschirm



Deutung



I: Genau, können Sie auch begründen, in welcher Form auch immer, warum Sie jetzt diese Auswirkungen des Parameters a auf den Graphen als Verschiebung bezeichnen

S: Also weil da ja also die ursprüngliche Funktion das x^2 ist und
egal was man einsetzt
es wird ja immer dieselbe Zahl dazu addiert

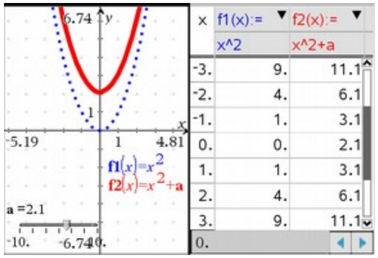
I: Ok, können Sie das jetzt auch anhand der Wertetabelle deutlich machen die Sie da rechts sehen?

S: Ähm, ich hab noch gar nicht drauf geguckt, ja also jetzt müsste es 2 nach rechts sein, also immer auf diese Werte da werden dann 2 dazu addiert, also 25 plus 2 ist 27, 16 plus 2 ist 18 und so weiter,
also immer wenn man hier zwei abzieht, dann hat man immer hier die ursprüngliche Funktion also die Normalparabel.

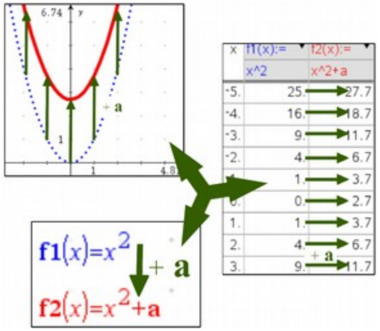
ein Interviewausschnitt (03)

eMDR

Bildschirm



Deutung



I: Hm, können Sie diese Differenz von 4 zu 6 hier

[deutet auf die Graphen]

irgendwie graphisch verdeutlichen.

S: Man könnte ja ein Lineal nehmen und mit dem rüber wandern und dann immer - also der Abstand oder so von den Schnittpunkten, der wäre immer derselbe, der wäre immer 2

[...]

wenn wir das jetzt so betrachten würden, quasi den Abstand als Senkrechte zur Normalparabel das wird natürlich kleiner, aber das darf man nicht, man muss ja halt immer eine Parallele zur y-Achse zeichnen und dann ist eben der Abstand immer 2.

Zusammenfassung

- Lernen mit MDR
  - „Visualisierungen“ nur scheinbar eine Verständnishilfe,
    wenn der Schritt von oberflächlicher Wahrnehmung zur Erkenntnis struktureller Gemeinsamkeiten nicht gelingt, insb.:
  - korrektes Antwortverhalten muss nicht auf Verstehen hinweisen
  - wenn Verstehen Abstrahieren vom Kontext heißt,
    dann wird dies durch explizites Identifizieren von Invarianten beim Repräsentationswechsel deutlich

Zusammenfassung

Mathematisches Grundwissen

- Beherrschen von relevanten Berechnungsverfahren und Kalkülen,
- Aktivieren von wichtigen Grundvorstellungen und Bewusstsein über typische Fehler,
- Fähigkeit zu Wechsel zwischen gängigen Repräsentationen
- Kenntnisse über wichtige Eigenschaften und Anwendungen

(vgl. Pinkernell & Greefrath 2011)

- Lernen mit MDR:
  - „Visualisierungen" nur scheinbar eine V
    wenn der Schritt von oberflächlicher W
    struktureller Gemeinsamkeiten nicht g
  - korrektes Antwortverhalten muss nich
  - wenn Verstehen Abstrahieren vom Kor
    dann wird dies durch explizites Identif
    Repräsentationswechsel deutlich
- Grundwissen: MDR als Instrument für eine ausgeschärfte Diagnose grundlegenden mathematischen Begriffswissens
- Algebra: Wechselwirkungen mit grundlegenden algebraischen Fähigkeiten (Strukturmodell R. Oldenburg)