



WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

# Mathematik hören und Musik sehen mit Hilfe eines Computeralgebrasystems



wissen.leben  
WWU Münster

[schuermann.uwe@uni-muenster.de](mailto:schuermann.uwe@uni-muenster.de)

Institut für Didaktik der Mathematik  
und der Informatik



# Mathematik hören und Musik sehen mit Hilfe eines Computeralgebrasystems

## Aufbau des Vortrags

- (0) Vorüberlegungen
- (1) Funktionen und Musik
- (2) Anwendungen für den Unterricht
- (3) Ausblick und Grenzen des Ansatzes

(0) Vorüberlegungen

## Motivation

- Musikalischer Laie
- Einfache Anwendungen für den Schulunterricht
- Kreativität im Mathematikunterricht
- Geringer technischer und organisatorischer Aufwand für den Unterricht

## (0) Vorüberlegungen

# Technische Voraussetzungen

- CAS: (wx)Maxima
- Paket namens sound.lisp für Maxima  
(unter: <http://riotorto.users.sourceforge.net/sound/> )
- Gnuplot (unter Windows im Download enthalten)
- Programm zum Abspielen von Wave-Dateien
  
- Alternative: Java-Applet von Reinhard Oldenburg (auf seiner Internetseite)

(0) Vorüberlegungen

## Rolle des CAS

- CAS als Funktionenplotter
  - Plot zum Graph der Tonfunktion
  - Wave-Datei ist auch ein Funktionsplot

(0) Vorüberlegungen

## Medienpädagogik

- Mediendidaktik: CAS/Funktionenplotter als mediendidaktisches Werkzeug
- Medienkunde: SuS erhalten Einblick in die Möglichkeiten eines CAS/Funktionenplotters und üben den Umgang damit
- Medienerziehung: Reflexion über die Bedeutung des Computers in der Populärmusik



# (1) Funktionen und Musik

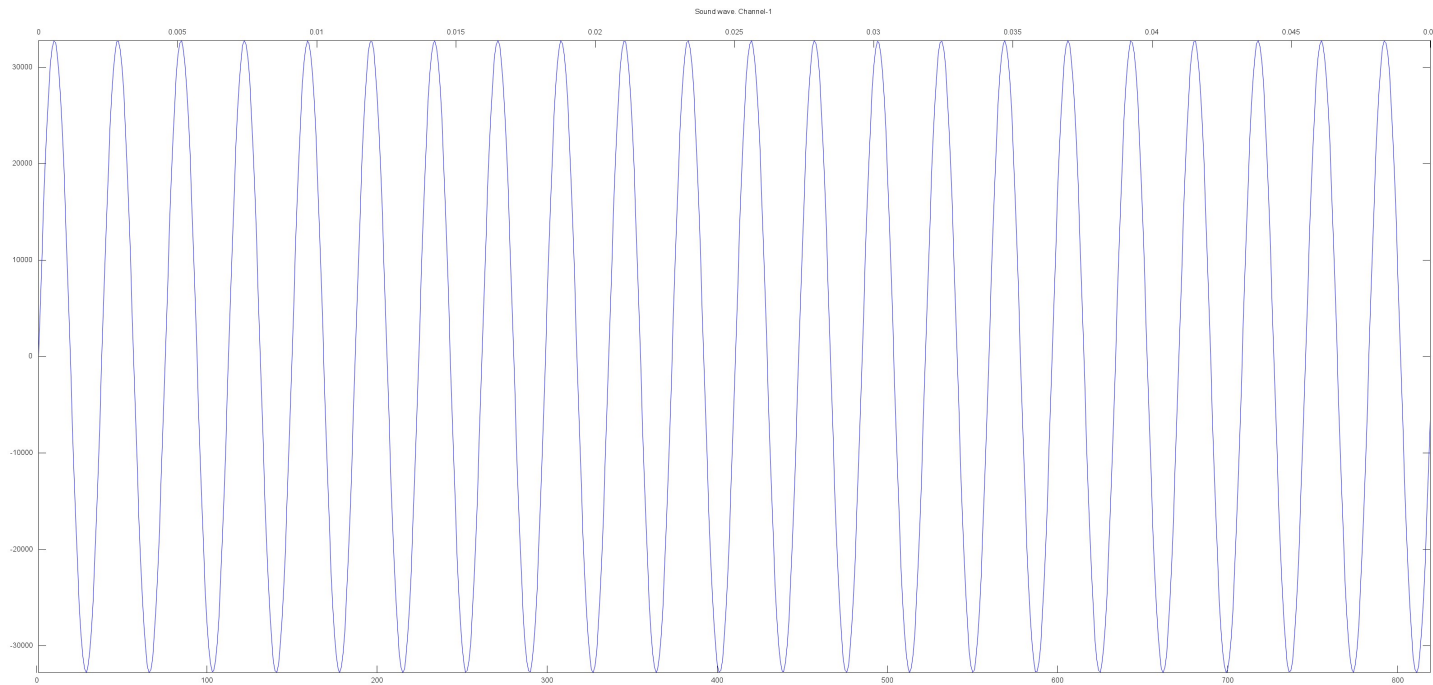
## Ton, Klang, Geräusch und Knall in der Physik und in der Musik

	<b>Physik</b>	<b>Musik</b>
<b>Ton</b>	Reines Sinussignal	Existiert in Wirklichkeit nicht / annähernd Stimmgabel
<b>Klang</b>	Periodisch aber zusammengesetzt aus Grundton und Obertönen	Keine eindeutige Trennung: Klangfarbe =
<b>Geräusch</b>	Nicht periodisches Signal	Lautstärke*(Klang+Geräusch)
<b>Knall</b>	Verlauf der Lautstärke (Amplitude) sprunghaft	

# (1) Funktionen und Musik: Beispiele mit Maxima

(Sinus-)Ton

`--> play (wave(sin(2*%pi*440*t), t, 0, 1) );`

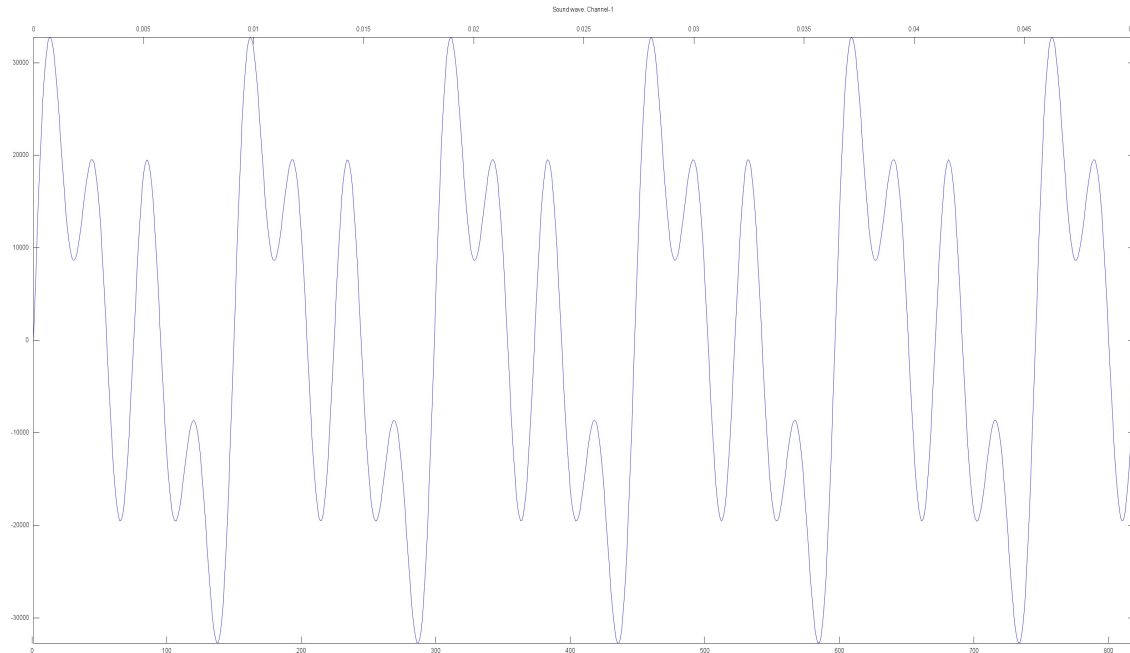




# (1) Funktionen und Musik: Beispiele mit Maxima

Klang

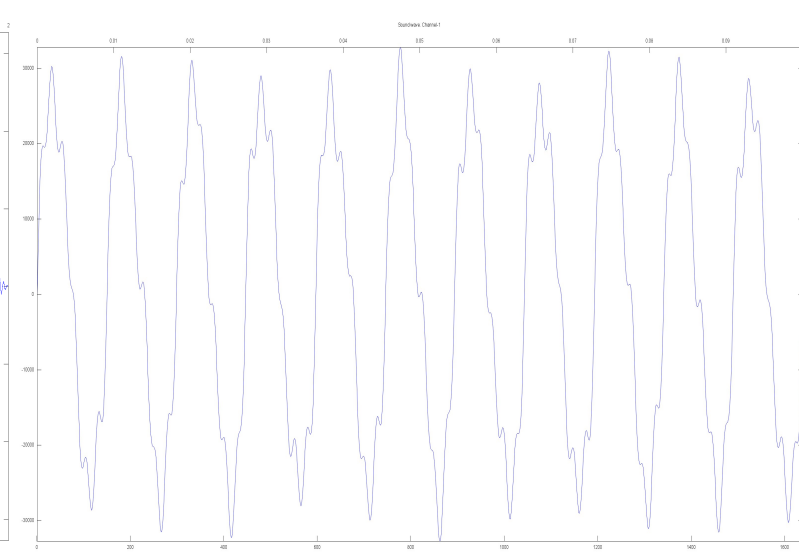
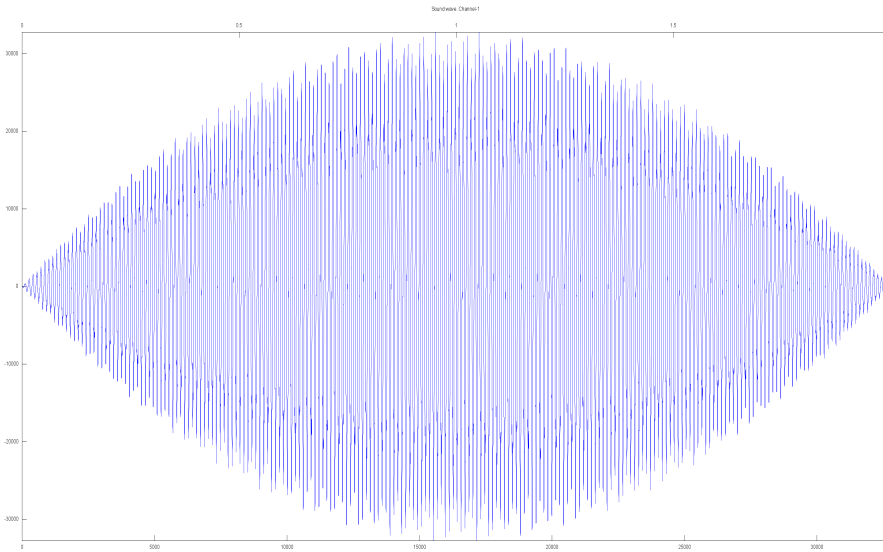
```
--> play(  
    wave(sin(2*%pi*110*t), t, 0, 1),  
    wave(sin(2*%pi*220*t), t, 0, 1),  
    wave(sin(2*%pi*440*t), t, 0, 1)  
);
```



# (1) Funktionen und Musik: Beispiele mit Maxima

Geräusch

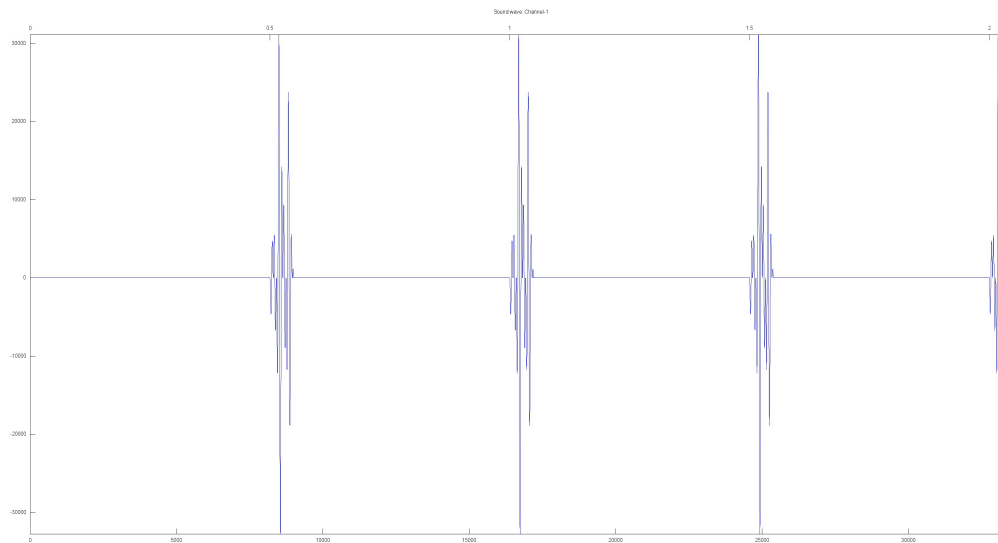
```
--> play ( wave(t*(t-2)*0.7*sin(2*pi*110*t), t, 0, 2),  
           wave(t*(t-2)*0.08*sin(2*pi*220*t), t, 0, 2),  
           wave(t*(t-2)*0.01*sin(2*pi*330*t), t, 0, 2),  
           wave(t*(t-2)*0.02*sin(2*pi*440*t), t, 0, 2),  
           wave(t*(t-2)*0.02*sin(2*pi*550*t), t, 0, 2),  
           wave(t*(t-2)*0.1*sin(2*pi*660*t), t, 0, 2),  
  
           wave(t*(t-2)*0.02*sin(2*pi*150*t), t, 0, 2),  
           wave(t*(t-2)*0.05*sin(2*pi*300*t), t, 0, 2)  
);
```



# (1) Funktionen und Musik: Beispiele mit Maxima

## Knall

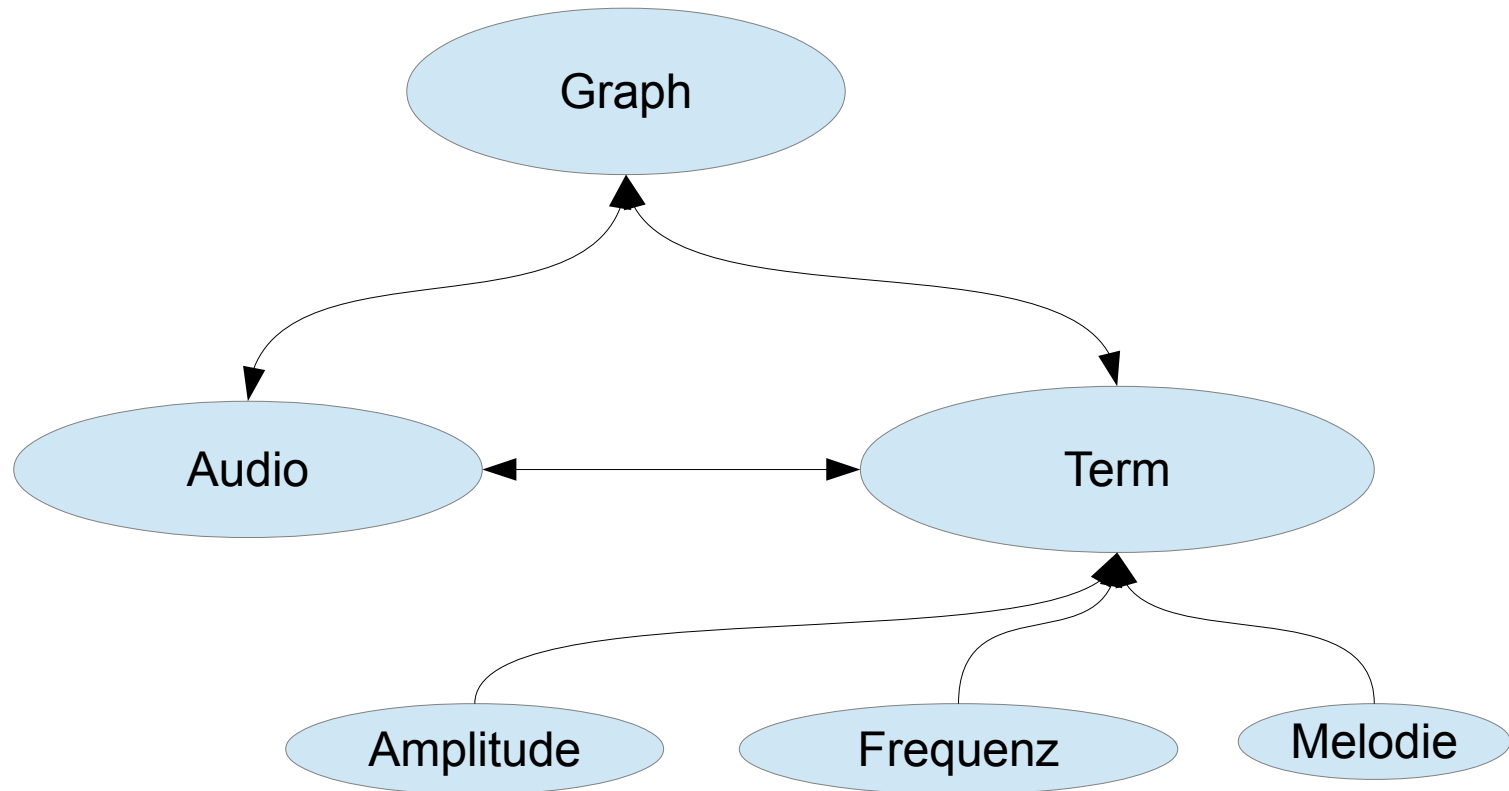
```
--> play ( wave((t*(t-0.05))*sin(2*%pi*100*t), t, 0, 0.05, 0.5, 1, 1.5, 2),  
           wave((t*(t-0.05))*sin(2*%pi*150*t), t, 0, 0.05, 0.5, 1, 1.5, 2),  
           wave((t*(t-0.05))*sin(2*%pi*200*t), t, 0, 0.05, 0.5, 1, 1.5, 2)  
         );
```



## (2) Anwendungen für den Unterricht

- Zuordnungsaufgaben
- Hörtests
- Melodien als abschnittsweise definierte Funktionen
- Weitere Experimente und Forschungsaufgaben

## (2) Anwendungen für den Unterricht: Zuordnungsaufgaben





## (2) Anwendungen für den Unterricht: Hörtests

### Mögliche Fragestellungen bzw. Themen

- Ab welcher Lautstärke hört man einen Ton?
- Welche Frequenzen können überhaupt gehört werden?
- Untersuchung des Hauptsprachbereichs?
- Maskierung

## (2) Anwendungen für den Unterricht:

### Melodien als abschnittsweise definierte Funktionen

- Einfache Melodien „nachspielen“ lassen
- Einfache Melodien selbst gestalten:

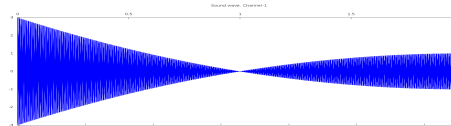
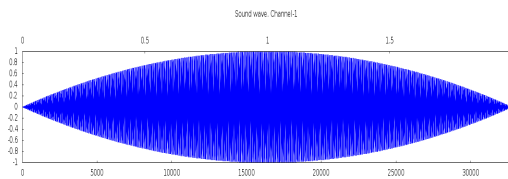
Eine einfache Melodie aus den Tönen C (261,63 Hz), D (293,67 Hz) und E (329,63 Hz)

```
--> play(  
    wave(t^2*(t-0.5)^2*sin(2*pi*261.63*t), t, 0, 0.5, 0, 0.5, 1),  
    wave(t^2*(t-0.5)^2*sin(2*pi*293.67*t), t, 0, 0.5, 1.5),  
    wave(t^2*(t-0.5)^2*sin(2*pi*329.63*t), t, 0, 0.5, 2)  
);
```

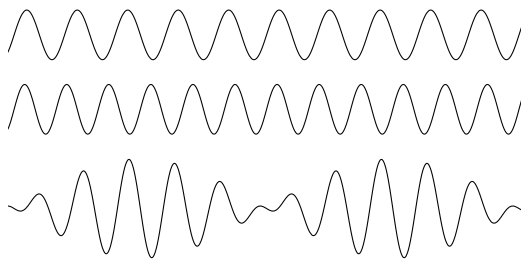
## (2) Anwendungen für den Unterricht:

### Weitere Experimente und Forschungsaufgaben

- Sanfte Übergänge als Trassierungsproblem
- Experimentieren mit Transformationen der Amplitude



- Phänomen Schwebung



--> 

```
play(  
  wave(sin(2*%pi*200*t), t, 0, 5, 0),  
  wave(sin(2*%pi*201*t), t, 0, 5, 0)  
);
```





## (3) Ausblick und Grenzen des Ansatzes

### **Fachübergreifender bzw. fächerverbindender Unterricht**

- Physik (z. B.: Schall, Schallenergie, Schall in unterschiedlichen Trägermedien)
- Musik (z. B.: Stimmung von Instrumenten / musikalische Intervalle)
- Biologie (z. B.: musikalische Intervalle, Hauptsprachbereich und Evolution)



## (3) Ausblick und Grenzen des Ansatzes

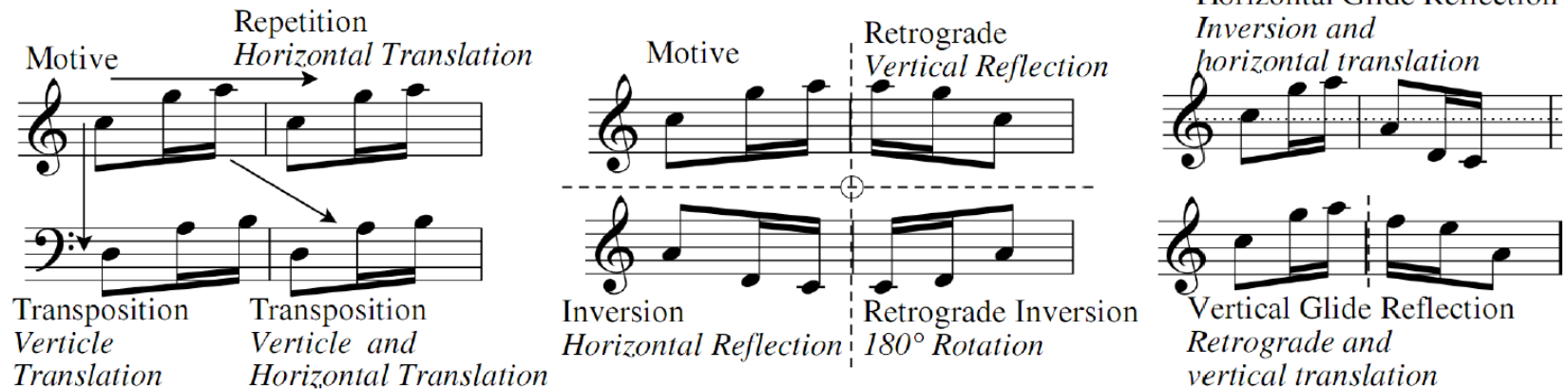
### Bruchrechnung

- Klopfen von Rhythmen
- Tonintervalle als Teilungsverhältnisse am Monochord, z. B.:
  - Oktave: 1:2 (aufwärts bei Halbierung der Länge einer Seite)
  - Quinte: 2:3 (aufwärts bei zwei Dritteln der Länge einer Seite)

## (3) Ausblick und Grenzen des Ansatzes

### Geometrie

- Komponieren mit Kongruenzabbildungen in der Ebene:  
Verschiebung, Spiegelung, Drehung



Motive

Repetition  
*Horizontal Translation*

Transposition  
*Verticle Translation*

Transposition  
*Verticle and Horizontal Translation*

Motive

Retrograde  
*Vertical Reflection*

Inversion  
*Horizontal Reflection*

Retrograde Inversion  
*180° Rotation*

Horizontal Glide Reflection  
*Inversion and horizontal translation*

Vertical Glide Reflection  
*Retrograde and vertical translation*

**Figure 1:** *All Eight Isometric Transformations in Musical Space*



## (3) Ausblick und Grenzen des Ansatzes

### Hürden

- Zugang zu moderner Hardware ist Voraussetzung
- Kontextspezifisches Wissen abseits der Mathematik



# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

(Dateivorlagen unter <http://tinyurl.com/pt6xp8r> )