Hans-Georg Weigand (Universität Würzburg)

Natürlich diskret, aber beachte die Folgen! – Ein diskreter Zugang zu den Grundlagen der Analysis.

Gliederung und zentrale These

1. Zugänge zur Analysis im Wandel der Zeit – Grenzwert- und Ableitungsbegriff
2. Vorschlag für einen diskreten Zugang zur Ableitungsfunktion

   Ziel: Diskrete Vorbereitung für ein besseres (adäquates) Verständnis eines intuitiven Grenzwert- und Ableitungsbegriffs

Zentrale These: *Diskrete Denk- und Arbeitsweisen sind unverzichtbare Hilfsmittel für ein adäquates inhaltliches Verständnis der Grundbegriffe der Analysis, insbesondere von Grenzwert- und Ableitungsbegriff!*

Gliederung und zentrale These

1. Zugänge zur Analysis im Wandel der Zeit – Grenzwert- und Ableitungsbegriff
2. Vorschlag für einen diskreten Zugang zur Ableitungsfunktion

   Folgen → Z-Funktionen → Diskrete Funktionen
   → Reelle Funktionen und intuitiver Grenzwertbegriff

Zentrale These: *Diskrete Denk- und Arbeitsweisen sind unverzichtbare Hilfsmittel für ein adäquates inhaltliches Verständnis der Grundbegriffe der Analysis, insbesondere von Grenzwert- und Ableitungsbegriff!*

Die Analysis kommt in den MU

Meraner Reform von 1905 (Felix Klein): Analysis als „Krönung des funktionalen Denkens" im MU.

Pietzker im Lehrgang der Elementarmathematik II. Oberstufe (1908):
"Von einer Einführung in die Infinitesimal-Analysis habe ich abgesehen, da ich nach wie vor an dem Standpunkt festhalte, daß das über die Sphäre der zu vermittelnden mathematischen Allgemeinbildung hinausgeht."

Oder Schmalz (1912):
"Der Schüler muss nicht und darf nicht einen flüchtigen Blick in ein uferloses Gebiet werfen: vertieft begründete Bildung, nicht die Oberfläche streifende Halbbildung ist Erziehungs-Zweck."

Schulbücher 1970er Jahre: „Vorbaukapitel" Folgen

Etwa Schröder u. Uchtmann (1973):

- "Funktionen von der Form f: N → R, x → f(x) heißen Folgen, genauer: reelle Zahlenfolgen."
- Konvergente Zahlenfolgen: Grenzwert A einer Folge $(a_n)_{IN}$:

  $$\forall\, \varepsilon > 0:\ \exists\, n_o \in IN:\ \forall n > n_o:\ |A - a_n| < \varepsilon$$

- Konvergenzkriterien. …. Grenzen bei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oder $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$
- Übergang zu (lokalen) Grenzwerten von (reellen) Funktionen.

Neuansätze durch Computereinsatz

Gordon (1979), Ralston & Young (1983) oder Seidman & Rice (1986): „Diskreter Anlauf zur Analysis" – Differenzengleichungen, endliche Summen und numerische Verfahren zur Approximation von Funktionen

Stowasser u. Mohry (1978): Rekursive Verfahren

Baumann (1980): Mathematik ↔ Computer (Informatik)

Reformbestrebungen

- H. Karcher (1973): Lipschitz-Analysis
- R. Danckwerts u. D. Vogel (1991): Lokale Linearisierung
- E. Artin (1957) und S. Lang (1973): Intuitiver Grenzwertbegriff:

  "Some small number h, positive or negative, but $h \neq 0$. $f(x) = x^2$. The slope is then:

  $$\frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

  As h approaches 0, 2x + h approaches 2x. Consequently, the slope of the curve $y = x^2$ at an arbitrary point (x, y) is 2x. … "
- Blum und Kirsch (1975ff): Einfache Folgen auf intuitiver Ebene – Vertiefter Folgenbegriff „später".

Heute

Es gibt (fast) keine Folgen mehr im MU!

KMK-Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (2012): *„Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwert-begriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen".*

Empirische Untersuchungen Grenzwert- u. Ableitungsbegriff

1980er Jahre: Tall u. Vinner, Sierpinska,..
2010ff: Bauer, Swinjyard & Larsen (2012)…
….

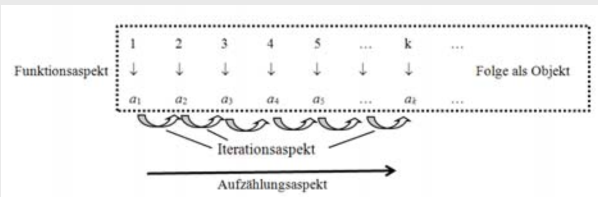
Ergebnisse:

1. Schrittweise – diskrete – Prozesse sind grundlegend für Approximationsprozesse und das Verständnis des Grenzwertbegriffes.
2. Ableitungsbegriff: Verständnis des Grenzwertbegriffs – Übergang mittlere-lokale Änderungsrate – Lokale Linearisierung.

Gliederung

2. Vorschlag für einen stufenweisen diskreten Zugang zur Ableitungsfunktion (10 Schritte)

Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

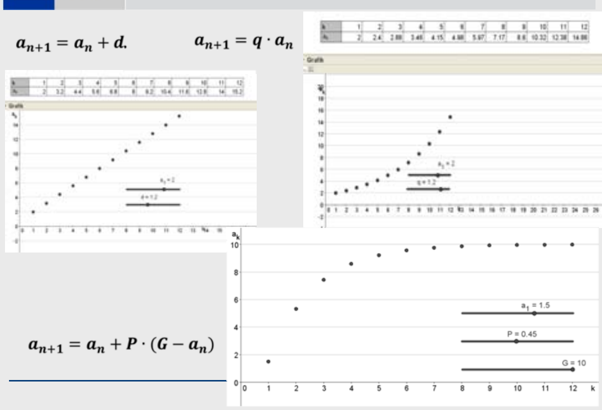


Aufzählungsaspekt:

Cauchy: *"Eine unbestimmte Reihenfolge von Größen u_o, u_1, u_2, u_3, & . . . . heißt eine Reihe."*

1. (Rek. def.) Folgen und Wachstumsprozesse

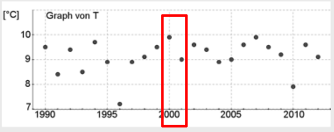
$a_{n+1} = a_n + d.$ $\quad a_{n+1} = q \cdot a_n$



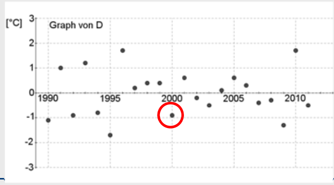
$a_{n+1} = a_n + P \cdot (G - a_n)$

2. Differenzenfolgen

T: Durchschnittliche Jahreslufttemperatur



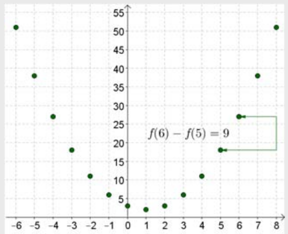
D: Differenzenfolge $\Delta a_n := a_{n+1} - a_n$

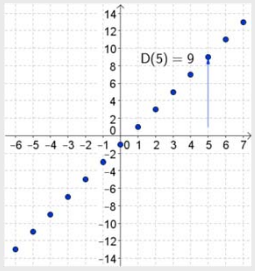


3. Z-Funktionen[1)]

$$f: Z \to IR \qquad D_f(z) = f(z+1) - f(z).$$

$$f(z) = z^2 - 2z + 3$$

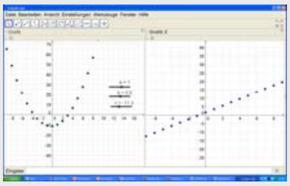




1) S. Thies (2002)

4. Quadratische Z-Funktionen

$$f(z) = a\,z^2 + b\,z + c$$



Begründung symbolisch:

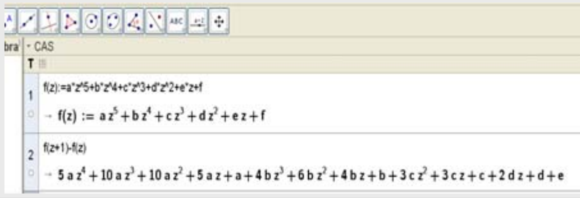
$$D_f(z) = f(z+1) - f(z) = a(z+1)^2 + \ldots. \;= 2\,a\,z + a + b.$$

5. Allgemeine Z-Polynome

$$f(z) = a\,z^3 + b\,z^2 + c\,z + d$$

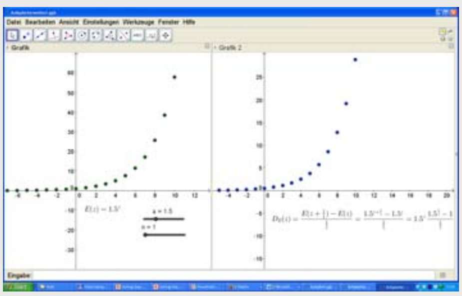
$$D_f(z) = f(z+1) - f(z) = \; 3\,a\,z^2 + \ldots..$$

$$f(z) = a_5\,z^5 + a_4\,z^4 + \ldots. + a_1\,z + a_o$$



6. Exponential-Z-Funktion

$$f(z) = a^z \quad a \in IR^+, z \in Z, \quad D(z) = (a-1)\,a^z$$



7. Differenzenquotienten-Z-Funktionen

$$f: z \to y, \quad z \in Z_n = \{\ldots, -\tfrac{2}{n}, -\tfrac{1}{n}, 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \ldots\}$$

$$D_n(z) \;=\; \frac{f(z+\frac{1}{n}) - f(z)}{\frac{1}{n}},$$

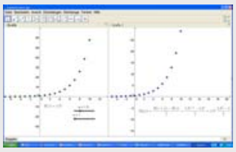
$$f(z) = a\,z^3 + b\,z^2 + c\,z + d$$

$$D_n(z) = 3\,a\,z^2 + (2\,b + \tfrac{3a}{n})\,z \;+\; \tfrac{a}{n^2} + \tfrac{b}{n} + c$$

$$\lim_{n\to\infty} D_n(z) = 3\,a\,z^2 + 2\,b\,z \;+\; c$$

8. Differenzenquotienten der Exponential-Z-Funktion

$f(z) = a^z$, $z \in Z^n = \{\ldots, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\}$



$$D_e(z) = \frac{E(z+\frac{1}{n}) - E(z)}{\frac{1}{n}} = \frac{a^{z+\frac{1}{n}} - a^z}{\frac{1}{n}} = a^z \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

9. Die **lokale** Änderungsrate

$f\colon x \to y, \quad x \in D \subseteq IR, \quad x_o \in D$

$$n \to D_n(x_o) = \frac{f(x_o+\frac{1}{n}) - f(x_o)}{\frac{1}{n}}$$

→ *Konzept des intuitiven Grenzwertbegriffs*
→ $f'(x_o)$

10. Die **globale** Änderungsrate -

$f\colon x \to y, \quad x \in D \subseteq IR$

$f(x) \to f'(x)$

Ergebnisse - Zusammenfassung

Für diesen diskreten Zugang gilt:

- Es steht zunächst die globale Approximation von Funktionen durch Z_n-Funktionen im Vordergrund (Leibniz, De arte combinatoria, 1666).
- Differenzenrechnung (1) ↔ Differenzialrechnung (2)
  (1) am Anfang einfacher und ermöglicht diskrete Argumentationen und algebraische Berechnungen.
- Die lokale Änderungsrate wird aus der *diskreten* mittleren Änderungsrate entwickelt.
- Grenzübergänge sind unverzichtbar und stellen mentale „Hindernisse" dar. Sie können nicht (didaktisch) beliebig vereinfacht werden. (Einstein)

Ergebnisse - Zusammenfassung

Einstein: „Man muss alles so einfach wie möglich erklären, aber nicht einfacher." 1)

1) Auf die Bitte eines Journalisten, die Relativitätstheorie für seine Leser etwas einfacher zu erklären.

D@nke schön!

weigand@dmuw.de
www.dmuw.de