⚀ - ⚃ Fünfachtel-Pyramide *– Kommentare*

Das ‚offene' Pyramidenmodell dient dazu, in eine Pyramide hineinsehen zu können – z.B. für Berechnungen. Du kannst lernen, rechtwinklige Dreiecke im Raum zu finden, die man in Zeichnungen nicht offensichtlich sieht. So kannst du dein Wissen über rechtwinklige Dreiecke nutzen, um zum Beispiel Streckenlängen oder auch Winkel zu berechnen.

Die Arbeitsblätter ⚀ - ⚃ wollen einen Eindruck davon vermitteln, welche Fragen an das Modell möglich sind, die über „Wie groß ist der Ober- bzw. Mantelflächeninhalt des Modells?" und „Welches Volumen hat das Modell?" hinausgehen. Ungeachtet dessen liefern bereits diese beiden Fragen sehr gute Übungsaufgaben zur Stereometrie zusammengesetzter Körper, die wegen der Notwendigkeit zur eigenen Datenbeschaffung (durch Messen) auch schon über herkömmliche Schulbuchaufgaben hinausgehen.

Zum Arbeitsblatt ⚀ Fünfachtel-Pyramiden-Dreiecke

Schülerinnen und Schülern fällt es häufig schwer, rechtwinklige Dreiecke oder andere ebene Figuren zu identifizieren – insbesondere im Innern von Körpern – die man bei der Bearbeitung und Beantwortung von unterschiedlichen Fragestellungen sinnvoll verwenden kann. Damit entstehen Schwierigkeiten bei der einfachen Berechnung zentraler Größen wie Streckenlängen von Kanten oder Höhen oder Maßen von Winkeln, die durch eine substantielle (Weiter-)Entwicklung von Raumvorstellung deutlich reduziert werden können.

Das Körpermodell ‚Fünfachtel-Pyramide' dient vor allem dazu, in der Pyramide noch einmal wichtige Lagebeziehungen deutlich zu machen. Der Blick in die Pyramide hinein eröffnet die Möglichkeit, die beiden häufig verwendeten rechtwinkligen Dreiecke über einer Diagonalen- bzw. Mittenparallelenhälfte im Inneren einer Pyramide zu sehen und zu identifizieren.

1. Arbeitsauftrag
Was weißt du über rechtwinklige Dreiecke? Stelle dein Wissen übersichtlich dar.

Dieser Arbeitsauftrag dient der Wissensreflexion und -organisation. Er macht die vorhandenen Lernvoraussetzungen (auch für die Lehrperson) transparent. Die Lernenden blicken zurück und tragen ihr Wissen (in Partner- oder Gruppenarbeit) zusammen. Dazu müssen sie Sachverhalte strukturiert darlegen und Zusammenhänge erörtern. Zur Unterstützung beim Lernen lernen ist es empfehlenswert, den Lernenden die Möglichkeit zur individuellen Selbstevaluation über ihr jeweils noch vorhandenes Wissen zu geben – durch Vergleich untereinander oder durch den Abgleich mit einem von der Lehrperson zur Verfügung gestellten Erwartungshorizont.

2. Arbeitsauftrag

Wo überall kannst du am Modell der Fünfachtel-Pyramide rechtwinklige Dreiecke erkennen? Wie viele unterschiedliche rechtwinklige Dreiecke findest du?

Die Lernenden erkunden hier die Fünfachtelpyramide unter einem vorgegebenen, die Aufmerksamkeit fokussierenden Aspekt. Sie aktivieren ihr Vorwissen und erweitern dessen Vernetzung – u.a. eine Diskussion des Ausdrucks ‚unterschiedlich' vor dem Hintergrund des Begriffs der ‚Kongruenz' kann hier Sinn stiftend wirken.

3. Arbeitsauftrag

Färbe die sichtbaren Flächen in den beiden Schrägbildern der Fünfachtel-Pyramide hier jeweils im Farbton, den sie im Faltmodell haben. Beschreibe, wie du dazu vorgehst.

Um die Fünfachtel-Pyramiden-Schrägbilder (bei denen es sich um Parallelprojektionen handelt) richtig färben zu können, ist das Modell aus unterschiedlichen Richtungen zu betrachten. Das Beschreiben des Vorgehens macht dieses der Reflexion zugänglich. Ein darüber hinaus gehender Vergleich von Fotos und/oder Dreitafelbildern der Fünfachtel-Pyramide mit den Schrägbildern erweitert das Bewusstsein dafür, dass es unterschiedliche Darstellungen mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen gibt. Der Winkel α und der Verkürzungsfaktor c in einem Schrägbild sind Konventionen. Dass neben den weitverbreiteten Werten 45° bzw. 0,5 für α bzw. c auch andere Auswahlen sehr gute und evtl. sogar bessere Abbildungen ergeben können, kann mit Hilfe eines DGS-Systems durchgespielt werden.

4. Arbeitsauftrag

Zeichne alle rechten Winkel, die du am Modell gefunden hast, in die beiden Schrägbilder oben ein.

Dieser Arbeitsauftrag fordert die Lernenden auf, die Übersetzungsleistung von der enaktiven auf die ikonische Darstellungsebene selbstständig zu erbringen. Die mögliche ergänzende Aufgabe, eine Zuordnung sich entsprechender Winkel in den beiden Schrägbildern vorzunehmen, bahnt ein Verständnis der symbolischen Darstellungsebene an. Die Fähigkeit zur entsprechenden Zuordnung lässt auf eine passende Vorstellung von konstruktiv-geometrischen Spielregeln schließen.

Zum Arbeitsblatt Fünfachtel-Pyramiden-Strecken

1. Arbeitsauftrag

Welche Namen haben die unterschiedlichen Strecken am Faltmodell? Trage sie in das Schrägbild hier ein. Trage auch ein, welche Variablen du für die (Längen der) Strecken jeweils verwendest.

2. Arbeitsauftrag

Miss die unterschiedlichen Streckenlängen am Faltmodell und fasse die Ergebnisse deiner Messungen in einer Tabelle zusammen. Benenne dazu die Strecke jeweils mit ihrem Variablennamen.

Bezeichner für Begriffe sind stets zu vereinbaren und nicht natürlich gegeben. Die vereinbarte gemeinschaftliche Verwendung von Bedeutungen und Bezeichnungen (insbesondere Variablennamen) ist Grundlage für unmissverständliche mathematische

Kommunikation und Argumentation. Dazu leisten Arbeitsaufträge wie diese ihren wichtigen Beitrag. Darüber hinaus wird hier sowohl das Messen an einem konkreten Objekt, so wie die systematische Zusammenstellung selbst gewonnener Informationen geübt.

Zum Arbeitsblatt ⚁ Fünf- und Dreiachtel-Pyramide

1. Arbeitsauftrag

Thorben hat das Faltmodell „Fünfachtel-Pyramide“ genannt. Was hat er sich wohl dabei gedacht? Wie würde demzufolge eine „Dreiachtel-Pyramide“ aussehen?

2. Arbeitsauftrag

Zeichne ein Schrägbild von Thorbens „Fünfachtel-Pyramide“ und von unterschiedlichen „Dreiachtel-Pyramiden“.

Ein Auftrag „Berechne das Volumen der Fünfachtel-Pyramide.“ wäre eine gute Übung zum Berechnen des Volumens. Hier könnte er auch einen Beitrag zur Leitidee Raum und Form leisten, wenn man das Modell zur Berechnung in eine halbe und eine achtel Pyramide zerlegt. Der obige Arbeitsauftrag zielt dagegen stärker auf die Leitidee Messen, die oft durch zu frühen Einsatz einer Formel vernachlässigt wird, was dazu führt, dass man sie dort, wo man keine Formel zur Verfügung hat und auf Schätzen angewiesen ist, dann auch nicht aktivieren kann. Messen bedeutet Vielfache von Einheiten zu identifizieren. Die Pyramide lässt sich einfach in kongruente Viertelpyramiden zerlegen, diese sich wieder in spiegelsymmetrische Achtelpyramiden halbieren, von denen man in der Fünfachtel-Pyramide insgesamt fünf findet. Die Situation lässt sich auch gut auf den Grundriss reduziert darstellen. Da für alle Pyramiden (und Kegel[1]) gilt, dass ihr Volumen proportional zu ihrem Grundflächeninhalt ist, trägt der Grundriss einen wichtigen Teil der Information über das Volumen.

Die Frage nach der Dreiachtelpyramide soll dazu führen, den gefundenen Weg noch einmal nachzuvollziehen. Zur Binnendifferenzierung können auch andere Brüche herangezogen werden. Der Arbeitsauftrag beginnt mit der Aufforderung sich in das Denken anderer hineinzuversetzen, was einen wertvollen Beitrag zur Auseinandersetzung mit dem eigenen Denken liefert.

Zum Arbeitsblatt ⚃ (Fünfachtel-)Pyramide verwinkelt

Für die folgenden Arbeitsaufträge dient die Fünfachtelpyramide als Modell zum Hineinsehen in eine (ganze) Pyramide.

[1] Pyramiden und Kegel haben gemeinsam, dass sie Körper sind, die durch von einem Punkt – ihrer Spitze – ausgehenden Strahlen – ihren Mantellinien –, welche den Rand einer ebenen Figur – ihre Grundfläche – berühren, und eben dieser Figur begrenzt sind. Damit teilen sie auch (über Ähnlichkeit und das Cavalierische Prinzip) die funktionale Abhängigkeit $V(G,h) = \frac{1}{3}Gh$ des Volumens von Grundflächeninhalt G und Höhe h mit der gleichen Proportionalitätskonstanten $\frac{1}{3}$.

1. Arbeitsauftrag

Bestimme rechnerisch den Winkel zwischen Grundfläche und Seitenfläche einer (ganzen) Pyramide. Welche geometrischen Überlegungen musst du dazu anstellen? Welche Längen musst du messen, um die Berechnung durchführen zu können? Findest du mehr als einen Lösungsweg? Überprüfe dein Ergebnis auf Plausibilität, indem du den Winkel am Faltmodell nachmisst.

Um Winkel zu berechnen ist es notwendig, wie bei der Berechnung von Strecken, in einen Körper relevante Dreiecke hineinzusehen. Solche Dreiecke sind nicht notwendig eindeutig bestimmt. Statt eine nächste Aufgabe zu stellen, ist es häufig sinnvoll, nach weiteren Lösungen in einer bereits gegebenen und verstandenen Situation zu suchen und diese so tiefer zu durchdringen, oder die Fragestellung zu variieren, etwa wie in den nächsten beiden Arbeitsaufträgen unten. Die Frage nach dem Maß des Winkels zwischen Flächen bedarf einer Modellierung und Mathematisierung. Was unter einem Winkel zwischen zwei Ebenen verstanden wird, kann an einem gefalteten Blatt Papier geklärt werden. Ein solches kann auch beim Nachmessen des berechneten Winkels eingesetzt werden. Ob ein Ergebnis plausibel ist, ist im Modellbildungskreislauf – siehe Kommentar zum Arbeitsblatt Kleine Pyramide *– bei der Validierung eine zentrale Frage.*

2. Arbeitsauftrag

Bestimme nun zur Übung, ebenso wie du im 1. Arbeitsauftrag vorgegangen bist, den Winkel zwischen zwei gegenüberliegenden Seitenflächen einer (ganzen) Pyramide rechnerisch. Falls Dir das zu einfach erscheint, bearbeite den nächsten Arbeitsauftrag.

Dieser Arbeitsauftrag und der folgende sind zur Binnendifferenzierung gedacht. In Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit wird mit dem 2. Arbeitsauftrag gefördert oder mit dem 3. Arbeitsauftrag gefordert; die Entscheidung selbst treffen zu lassen unterstützt die Entwicklung metakognitiver Kompetenzen.

3. Arbeitsauftrag

Dieser Arbeitsauftrag ist eine echte Herausforderung an Dein Raumvorstellungsvermögen: Bestimme rechnerisch den Winkel zwischen zwei Seitenflächen der (ganzen) Pyramide, die durch eine gemeinsame Seitenkante verbunden sind. Helft Euch in der Klasse bei dieser schwierigen Aufgabe auch gegenseitig.

Tipps: a) Wie würdest du den Winkel messen? b) Versuche zur rechnerischen Lösung auch hier zunächst ein geeignetes Dreieck in die Pyramide hineinzusehen.

Um den hier betrachteten Winkel zu berechnen, ist ein Dreieck in eine Pyramide hineinzusehen, das auch in der Fünfachtel-Pyramide nicht direkt zu sehen ist. Aufgaben, die echte Herausforderungen sind, kann man durchaus als solche zu erkennen geben, um einem zu schnellen Nachlassen der Motivation vorzubeugen. Anzahl und Umfang der Tipps sollte von den bereits bei den Lernenden vorhandenen Kompetenzen abhängig gemacht werden. Der gegenseitige Austausch von Ideen zwingt zur klareren Darstellung der eigenen Gedanken.

⚄ Werkstück(e) *– Kommentare*

Zum Arbeitsblatt ⚄ Werkstück(e)

Führe die Arbeitsaufträge jeweils für beide Werkstücke durch. Stelle dabei auch für dich selbst zusammen, für welches Werkstück du die jeweiligen Arbeitsaufträge einfacher findest. Kannst du auch beschreiben, warum du es einfacher findest?

Das Werkstück mit dem dreieckigen Loch kann sinnvoll auch zunächst ohne dieses Loch eingesetzt werden. Die Frage nach der Bewertung der einzelnen eigenen Bearbeitungen nach Schwierigkeit soll dafür sorgen, neben dem mathematischen auch einen metakognitiven Kompetenzerwerb anzuregen.

1. Arbeitsauftrag

Miss Breite, Länge und Höhe des Werkstücks. Wo bekommst du beim Messen Probleme und wie löst du diese?

Es ist äußerst wichtig, auftretende Probleme beim Messen zu thematisieren und die Lernenden auch selbst Lösungsvorschläge machen zu lassen, wie die Probleme bewältigt werden können.

2. Arbeitsauftrag

Zeichne alle Teilflächen der Oberfläche (in dein Heft). Kannst du, ohne zu rechnen, die einzelnen Teilflächen der Oberfläche nach der Größe ihres Flächeninhaltes ordnen?

Schön wäre es, wenn Lernende von sich aus Deckungsgleichheiten (Kongruenz) erkennen. Zeichnen statt skizzieren wird als Operator verwandt, um Maßtreue zu erzwingen. Alternativ könnte man auch eine Zeichnung im Maßstab 1:2 verlangen, die mit Heftplatz sparsamer umgeht, aber gerade noch groß genug für eine präzise Zeichnung ist.

Es ist es schwierig, die Fläche mit dem dreieckigen Loch genau zu zeichnen. Zunächst sollte die Fläche ohne Loch gezeichnet werden. Die Frage, wo das Loch ist, bedarf einer genaueren Untersuchung. Z.B. kann durch Parallelen zu Kanten ein Koordinatensystem auf einer Werkstückseite eingeführt werden und so die Lage der Dreieckseckpunkte beschrieben werden.

Die Frage nach dem Größenvergleich zielt auf die Leitidee Messen, auf die Leitidee Funktionaler Zusammenhang und begriffliche Argumentationen – z.B.: bei gleicher Breite hat die längere Fläche den größeren Flächeninhalt. Wie gehen die Lernenden beim Größenvergleich vor? Eine Zusammenarbeit zum Vergleich einzelner Teilflächen wäre hier von Vorteil. Wie werden die Flächen verglichen, die keine einfache Form haben? Welche Argumentationen werden vorgenommen? Diese sollte man eventuell notieren lassen. Gerade beim Größenvergleich sollte man das gelochte Werkstück zunächst ohne Loch betrachten und ggf. binnendifferenzieren: Ohne Loch / Mit Loch.

3. Arbeitsauftrag

Berechne den Oberflächeninhalt des Werkstücks. Wie gehst du vor?

Verschiedene Wege können auch hier angeregt werden. Eine naheliegende Modifikation der Aufgabe ist, die Vorgehensweise einem anderen Lernenden erklären zu lassen. Sollte das zu schwierig sein, kann zunächst nur der Weg ohne den Erklärungszusatz notiert werden.

4. Arbeitsauftrag

Berechne das Volumen des Körpers. Finde möglichst viele Möglichkeiten. Beschreibe den Lösungsweg, den du selbst für den besten hältst, für jemanden, der noch nie das Volumen eines solchen Körpers berechnet hat.

Die verschiedenen Wege können auch hier notiert werden. Eine Variante des Umgangs mit beiden Werkstücken könnte eine Aufteilung der Lernenden in Gruppen zu beiden unterschiedlichen Werkstücken sein. Am Ende der ersten Arbeitsphase könnte ein Austausch stehen, in dem die Lernenden gegenseitig ihre Wege bewerten.

5. Arbeitsauftrag

Was wiegt mehr: Das Werkstück, wenn es aus Gold wäre, oder vier Malzbierflaschen? Was wäre das Werkstück wert (in €), wenn es aus Gold wäre?

Maurerflasche
0,5 Liter
308 Gramm

Quelle:
www.systempack.de

Die Pappmodelle liefern einen wertvollen Beitrag, Unterrichtsinhalte in der Wirklichkeit erlebbar zu machen. In vielen Fällen erhöht es den Wirklichkeitsbezug von Arbeitsaufträgen, nicht alle zur Bearbeitung notwendigen Informationen schon bereit zu stellen: die Lernenden sollen selbst recherchieren. Wenn im Unterricht keine Möglichkeit dazu besteht, kann dieser (Teil-)Auftrag auch als Hausaufgabe erledigt werden. Die Vergleichsgröße ‚vier Malzbierflaschen' ist bewusst absurd, um zu signalisieren, dass es sich bei dieser Aufgabe um eine Einkleidung und nicht um eine authentische Anwendung handelt. Es stehen die Tätigkeiten der Präzisierung der Fragestellung (Drittelchen oder Halbeliter? Spielt das überhaupt eine Rolle?) und der Datenbeschaffung (Welche Dichte hat Gold? Welche Masse – umgangssprachlich: Gewicht – hat eine Flasche? Usw.) im Vordergrund. Wenn Lernende auf die Aufgabenstellung mit noch absurderen Vergleichen reagieren, haben Sie den Sinn verstanden ☺ Die Aufgabe lässt sich mit der folgenden offenen Aufforderung leicht erweitern: Gebt Beispiele für Dinge mit dem gleichen Gewicht an.

6. Arbeitsauftrag

Zeichne ein maßgerechtes Schrägbild des Körpers. Trage am Schrägbild die von dir am Pappmodell des Werkstücks gemessenen Längen ein.

Die Lernenden wählen eine geeignete konstruktiv-geometrische Darstellung und setzen sich mit einem Darstellungswechsel zur formal-algebraischen Darstellung auseinander.

6 - 8 Pyramide und -nstumpf – *Kommentare*

Die Arbeitsblätter 6 - 8 zur kleinen Pyramide und dem Pyramidenstumpf ermöglichen im Unterricht unterschiedliche Aktivitäten mit Formeln: Neben der üblichen Berechnung von Volumen und Flächeninhalten durch Einsetzen von Zahlenwerten in Formeln und ggf. dem Umstellen einer Formel insbesondere auch das häufig zu kurz kommende eigene Aufstellen von Formeln und das Interpretieren von Formeln, etwa unter dem Gesichtspunkt des Funktionalen Zusammenhangs.

Zum Arbeitsblatt 6 Kleine Pyramide

1. Arbeitsauftrag

Miss die Kantenlängen der kleinen Pyramide. Berechne die Länge der Grundflächendiagonalen. Überprüfe deine Rechnung durch Nachmessen am Faltmodell.

*Mathematik ist u.a. eine deskriptive Sprache, die Vorhersagen über die Wirklichkeit macht, welche wiederum an der Wirklichkeit überprüfbar sind – z.B. in physikalischen Modellen oder auch in statistischen Prognosen, wie etwa Vorhersagen über den Ausgang von Wahlen. Diese Erkenntnis ist ein wesentlicher Bestandteil der Kompetenz des Problemlösens durch mathematisches Modellieren. Durch das Vorhandensein der greifbaren Pappmodelle kann der Bezug der **Ebenen Mathematik und Wirklichkeit**, sowie der **Seiten Problem und Lösung** zueinander bewusst gemacht werden. Dies lässt sich in einem Modellbildungskreislauf (nach Schupp) übersichtlich darstellen:*

	Problem		Lösung
Wirklichkeit	Situation	← *validieren* ←	Ergebnisse
	↓ *modellieren, mathematisieren* ↓		↑ *interpretieren* ↑
Mathematik	Mathematisches Modell	→ *schließen* →	Konsequenzen

*Mathematische Modelle (wie z.B. Formeln zu geometrischen Objekten) beschreiben Situationen in der Wirklichkeit (hier: Pappmodelle). Dazu muss in der konkreten **Situation idealisiert** werden und von der konkreten Situation **abstrahiert** werden, sowie **notwendige Daten identifiziert und beschafft** werden. Auf diesem Weg gelangen wir zum mathematischen Modell „Quadrat“ für die Grundfläche der Papppyramide, das es erlaubt, das Werkzeug „Satz des Pythagoras“ zu nutzen.*

Mit innermathematischen Schlüssen (Formel an Modell anpassen: $a^2 + a^2 = d^2$, dann algebraisch umformen, einsetzen …) können wir nun eine Aussage über die Diagonalenlänge herleiten, die im konkreten Fall interpretiert und am Pappmodell validiert werden kann.

2. Arbeitsauftrag

Wie hoch ist die kleine Pyramide? Berechne die Antwort ausgehend von den von dir im 1. Arbeitsauftrag gemessenen Längen. Zeichne ein Schrägbild der Pyramide und beschreibe mithilfe der Zeichnung den Rechenweg, so wie du ihn selbst am besten verstehst. Gibt es noch einen anderen Rechenweg? Erhältst du das gleiche Ergebnis? Welchen Weg findest du einfacher? Warum? Überprüfe nun deine Berechnungen, indem du die Höhe am Faltmodell möglichst genau nachmisst. Wie gehst du zur Messung am besten vor?

Auch hier spielt wieder der Einsatz des mathematischen Werkzeugs „Satz des Pythagoras" eine zentrale Rolle. Über die Anwendung entsprechenden Wissens hinaus werden Exploration, Organisation und Reflexion – die drei Arten des Wissensumgangs im Mathematikunterricht (nach SJUTS) – adressiert: Es sollen weitere Wege gefunden werden, dargestellt werden und bewertet werden. Dadurch wird auch die Kompetenz des mathematischen Kommunizierens breit angesprochen, da sowohl geometrische als auch algebraische Anteile in der Darstellung der Lösungswege von den Lernenden verlangt werden. Für die Validierung des Ergebnisses ist zur Messung eine geometrische Überlegung notwendig: Die Höhe lässt sich als Abstand einer zur Grundfläche parallelen Ebene durch die Pyramidenspitze, die durch eine Pappe realisiert werden kann, bestimmen.

3. Arbeitsauftrag

Berechne die Seitenhöhe aus den Kantenlängen. Wie genau kannst du sie messen?

Die Frage nach der Genauigkeit der Messung soll einerseits direkt anregen, das Messwerkzeug erst nach Markieren eines Grundkantenmittelpunktes anzulegen, und andererseits indirekt, sich auch Gedanken über die Genauigkeit in der Angabe des Ergebnisses zu machen, wobei auch die Ungenauigkeit der Eingangsdaten eine Rolle spielen kann. Eine Fehlerrechnung vertieft das Verständnis; dazu genügt bereits das Durchspielen einiger Fälle mit jeweils leicht abweichenden Eingangsdaten.

4. Arbeitsauftrag

Kannst du Volumen, sowie Mantel- und Oberflächeninhalt der kleinen Pyramide bestimmen? Beschreibe, wie du vorgehst.

Dieser Arbeitsauftrag wird sinnvollerweise vor der Kenntnis einer Formel für das Volumen bzw. für Mantel- und Oberflächeninhalt einer Pyramide bearbeitet. Er kann zur Aufstellung dieser Formeln aus dem konkreten Fall genutzt werden.

Das Volumen lässt sich experimentell durch das Füllen der Pyramide mit (nicht zu feinem) Sand mit einem Messbecher bestimmen. Den Funktionalen Zusammenhang

$$V_{\text{Pyramide}}(G,h) = \frac{1}{3}Gh$$

erhält man aus den Messwerten durch den Vergleich mit dem bekannten Funktionalen Zusammenhang

$$V_{\text{Quader}}(l,b,h) = l \cdot b \cdot h = G \cdot h$$

und der Erkenntnis, dass Grundfläche und Höhe bei der Pyramide berechenbar sind. Zur Durchdringung der Fragestellung empfiehlt es sich auch, das Volumen in Abhängigkeit von den Kantenlängen als einfach messbare Größen zu entwickeln. Alternativ könnte zur Gewinnung der Formel (oder zur Validierung) ein Quader mit der Grundfläche und der Höhe der Pyramide gebaut und mit „drei Pyramiden Sand" (Leitidee Messen: Pyramide als Einheit) gefüllt werden. Ein Bastelbogen für Quader gegebener Maße steht zum Download zur Verfügung.

Inhalt von Mantel- und Oberfläche erhält man durch Zerlegung in bekannte Flächen, die man im Zusammenspiel von Netz und Körper identifiziert.

Im Anschluss an den 3. Arbeitsauftrag bietet sich auch hier die Frage nach der Genauigkeit des Ergebnisses an. Es kann auch thematisiert werden, dass Fehler in der Längenmessung sich bei Flächeninhalts- und Volumenberechnungen potenzieren. Einfaches Beispiel: Vermesse ich mich bei einer Würfelkantenlänge um ein Zehntel, habe ich im Volumen bereits einen Fehler von etwa einem Drittel, wegen

$$V_{Würfel}(1{,}1 \cdot a) = (1{,}1 \cdot a)^3 = 1{,}1^3 \cdot a^3 = 1{,}331 \cdot V_{Würfel}(a).$$

Da die Maßeinheiten im Raum durch Würfel gebildet werden, ist dieser Fehler unabhängig von der Gestalt des Körpers. Eine solche Diskussion vertieft die Verbindung der Leitidee Raum und Form mit den Leitideen Messen und Funktionaler Zusammenhang.

5. Arbeitsauftrag

Wie viele unterschiedliche Pyramidennetze gibt es? Skizziere zunächst selbst möglichst viele und tausche dich dann mit anderen aus.

Das Netz des Faltmodells ist nur eines der möglichen Netze. Zur Förderung der Raumanschauung ist es nützlich, weitere selbst zu finden. Dies kann hier im Zusammenspiel der Darstellungsebenen enaktiv – ikonisch – symbolisch geschehen. „Symbolisch" bedeutet darin nicht zwangsläufig die Verwendung formal-algebraischer Symbole, sondern verweist allgemeiner darauf, dass man Spielregeln in den verwendeten Zeichen, die dadurch zu Symbolen werden – hier konstruktiv-geometrische – erkennt und nutzt. Die Zeichnungen der Netze (ikonische Ebene) sind wegen der beteiligten Figuren „Quadrat" und „gleichschenkliges Dreieck" einfach zu erstellen. Die Netzzeichnungen können ausgeschnitten und zu Pyramiden gefaltet werden (enaktive Ebene).

Dabei lässt sich erkennen, welche Strecken am Netz in der Pyramide in Kanten zusammenfallen. Diese Identifikation macht den angestrebten Symbolgehalt aus, der es Lernenden ermöglicht, Pyramidennetze von ungeeigneten Netzen zu unterscheiden. Der Vorstellungserwerb kann durch die selbsttätige farbliche Kennzeichnung zusammenfallender Strecken begünstigt werden. Durch den Austausch über mögliche und unmögliche Netze wird mathematische Argumentation und Kommunikation im Unterricht angeregt.

Zur Binnendifferenzierung bieten sich hier folgende Fragen an: Aus welchen nicht gleichschenkligen Dreiecken an einem Quadrat können (ggf. schräge) Pyramiden entstehen? Wie sehen dort weitere Netze aus?

6. Arbeitsauftrag

Um welchen Faktor würde sich das Volumen der Pyramide erhöhen, wenn man ihre Höhe verdoppeln würde – bei gleicher Form bzw. bei gleicher Grundfläche? Ist das bei allen Pyramiden so? Vergleiche auch mit anderen Körpern. Was fällt dir auf? Erkläre deine Beobachtung.

Dieser Arbeitsauftrag spricht die in den Formeln kondensierten Funktionalen Zusammenhänge an. Die Frage lässt sich durch algebraische Betrachtungen beantworten. Die Erkenntnis kann durch konkrete Beispiele gestützt werden. Darüber hinaus können Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Formeln herausgearbeitet werden, die Formelwissen vernetzen.

7. Arbeitsauftrag

Wie groß darf ein Würfel maximal sein, wenn er auf der Grundfläche der Pyramide stehend noch ganz in die Pyramide hineinpassen soll?

Die Frage zielt darauf, geeignete Modelle für die Situation zu finden, die eine Beantwortung ermöglichen. Ein möglicher Weg ist, unter allen Quadern, deren Grundfläche in der Pyramidengrundfläche liegt und deren weitere Ecken auf den Pyramidenseitenkanten, den Würfel zu suchen; ein anderer, das im Dreieck, das durch den diagonalen Schnitt durch die Pyramide gegeben ist, einbeschriebene Rechteck mit den passenden (vom diagonal geschnittenen Würfel stammenden) Seitenverhältnissen zu konstruieren …

Ein Dynamisches Geometrie System kann das Finden von Lösungen unterstützen.

Zum Arbeitsblatt ⚅ Kleine und große Pyramide

Dieses Arbeitsblatt fokussiert auf unterschiedliche Funktionale Zusammenhänge, die in geometrischen Situationen entstehen: lineare beim Längenvergleich, und davon abhängig quadratische beim Flächeninhaltsvergleich. Volumenberechnungen *werden hier (noch) ausgeklammert, was einen Einsatz des Arbeitsblattes schon in der Dreieckslehre – der Stereometrie spiralcurricular vorausgehend – ermöglicht.*

1. Arbeitsauftrag

Miss die Streckenlängen von Kanten und Höhen sowohl an der kleinen als auch an der großen Pyramide. Vergleiche die Längen sich entsprechender Strecken bei kleiner und großer Pyramide. Was fällt dir auf?

Als Streckenlängen bieten sich die Längen der Grundkanten, Seitenkanten, Höhen bzw. Seitenhöhen an. Durch deren systematische Untersuchung lässt sich hier die Verhältnisgleichheit bei Ähnlichkeit (wieder-)entdecken

2. Arbeitsauftrag

Kannst du Mantel- und Oberflächeninhalt der Pyramide(n) bestimmen? Beschreibe jeweils wie du vorgehst.

Hier lässt sich gut mit der kleinen Pyramide als Körper und Netz (in Partnerarbeit) beginnen und das Gelernte dann an der großen Pyramide üben.

3. Arbeitsauftrag

Vergleiche sich entsprechende Flächeninhalte an kleiner und großer Pyramide.

Wenn der 1. Arbeitsauftrag bearbeitet wurde, sollten die Schülerinnen und Schüler selbst darauf kommen, hier eine Tabelle als heuristisches Hilfsmittel zu verwenden. Ziel ist die Einsicht, dass sich Flächeninhalte bei Ähnlichkeit quadratisch – und eben nicht linear – verhalten. Darauf aufbauend können dann Funktionale Zusammenhänge beim Volumen von Körpern in Abhängigkeit von Streckenlängen untersucht werden – vgl. Arbeitsblatt ⚅ Kleine Pyramide, *speziell den 6. Arbeitsauftrag.*

Zum Arbeitsblatt ⚅ Pyramidenstumpf

1. Arbeitsauftrag

Zeichne den Pyramidenstumpf in einer Draufsicht (von oben) im Maßstab 1:2. Dafür benötigte Maße kannst du über eigene Messungen am Faltmodell und darauf aufbauende Rechnungen erhalten.

Einige der Maße sind leicht durch Messung zugänglich, andere können gut berechnet werden. Eine einfache Lösung besteht darin, die Position der Deckfläche über die (Hälfte der) Differenz der Seitenlängen von Boden- und Deckfläche zu bestimmen.

2. Arbeitsauftrag

Zeichne ein Schrägbild des Pyramidenstumpfes in dein Heft. Dafür benötigte Maße kannst du wie im 1. Arbeitsauftrag bestimmen. Kommst du auch ohne Rechnung aus?

Auch hier bietet sich eine Bestimmung der Maße durch Messung und Rechnung an. Ergänzend liefert der Vergleich unterschiedlicher Lösungswege Gelegenheit zur Reflexion. Es gibt auch einen Lösungsweg ohne Rechnung, welcher konstruktiv-geometrisch die Boden- bzw. Deckflächenseitenlänge und die Höhe nutzt.

3. Arbeitsauftrag

Wie hoch ist der Pyramidenstumpf? Wie könnte man seine Höhe berechnen? Gib unterschiedliche Rechenwege an und vergleiche sie. Erläutere dein Vorgehen auch am Schrägbild.

Eine Skizze genügt hier, wenn der Schwerpunkt auf das Finden und Vergleichen unterschiedlicher Rechenwege gelegt werden soll. Der Arbeitsauftrag kann auch im Duett mit dem vorhergehenden eingesetzt werden.

4. Arbeitsauftrag

Welches Volumen hat der Pyramidenstumpf? Schätze zunächst, welchen prozentualen Anteil das Volumen des Stumpfes an dem Volumen der ganzen Pyramide besitzt. Berechne dann das Volumen und den Anteil. In welcher Höhe müsste man die Pyramide parallel zur Grundfläche durchschneiden, wenn Spitze und Stumpf gleiches Volumen haben sollen?

Die Fragen und Aufforderungen zielen nun auf den kubischen Zusammen hang, der bei Volumenvergleichen zueinander ähnlicher Körper auftritt – da der Streckfaktor in diesem Fall in alle drei Dimensionen eingeht. Es ist nicht so einfach, Volumen bei gegebenen Längen zu halbieren. Das Problem lässt sich auch einkleiden in die klassische Sekt-Orange-Aufgabe: „Wie hoch muss ich ein pyramiden(- oder auch kreiskegel)förmiges Glas zunächst mit Sekt füllen, wenn ich nach dem Auffüllen mit Orangensaft einen Sekt-Orange im Verhältnis $\mathbf{1}:\mathbf{1}$ *haben möchte?“ Meist überrascht es, dass bei einen halbhoch mit Sekt gefüllten Glas anschließend nur ein Achtel Sekt in der Mischung ist. Der Funktionale Zusammenhang klärt auf.*

5. Arbeitsauftrag

Recherchiere die Formel für den Oberflächeninhalt und die für das Volumen eines Pyramidenstumpfes in einer Formelsammlung und im Internet. Kannst du die Formeln jeweils nachvollziehen? Was bedeuten die Teilterme? Kannst du die Formeln auch selbst herleiten?

Die verständige Nutzung einer Formelsammlung zur Informationsgewinnung und zum Erkenntnisfortschritt ist ein wichtiges Ziel im Mathematikunterricht. Die hier gestellten Fragen gliedern die Auseinandersetzung mit unbekannten Formeln sinnvoll.