„Sammelbilder würfeln
– manchmal dauert’s länger als man denkt“
weitergedacht

Die betrachtete Situation: Das Sammelbildproblem

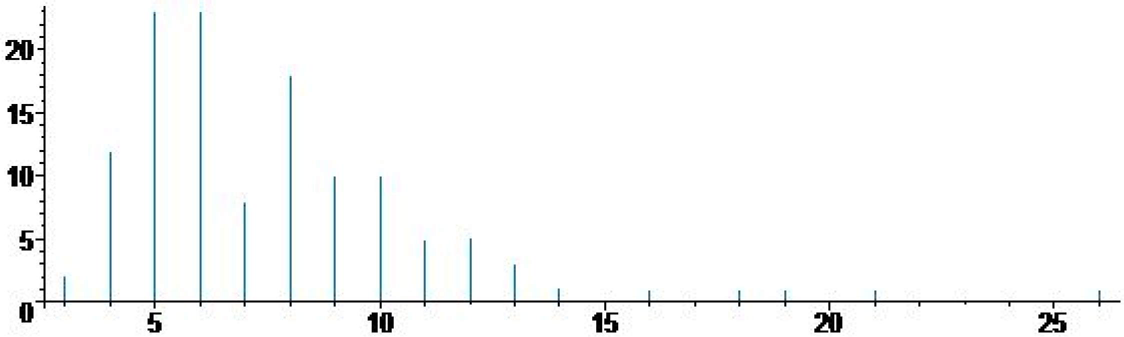
Zur Euro 2012 wird ein Sammelalbum für 540 Sammelbilder auf den Markt gebracht. Wie üblich sind die zu kaufenden Bilder in undurchsichtigen Tüten verpackt ☹ – zu je 5 Bilder pro Päckchen. *Wie viele Päckchen muss man wohl kaufen, bis das Album voll ist?*

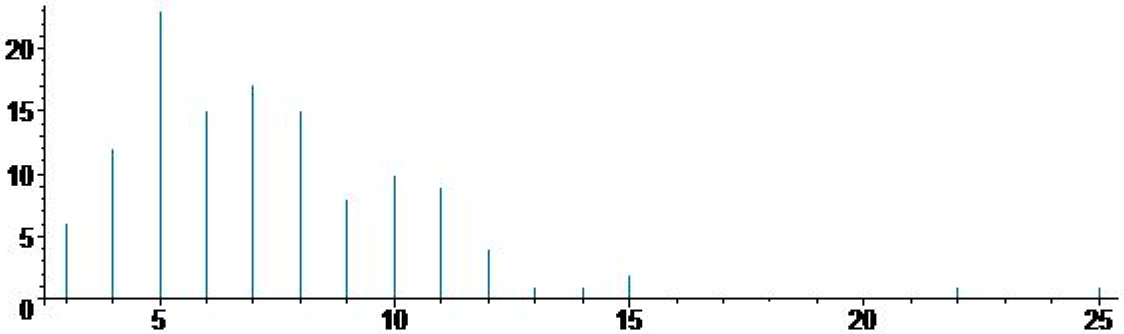
Die didaktisch reduzierte Situation

Zur EM 12 wird ein Sammelalbum für 6 Sammelbilder auf den Markt gebracht. Wie üblich sind die zu kaufenden Bilder in undurchsichtigen Tüten verpackt ☹ – zu je 2 Bilder pro Päckchen. *Wie viele Päckchen muss man wohl kaufen, bis das Album voll ist?*

Zur Beantwortung kann man durch Würfelzahlen simulierte Bilder zählen. Was kann man aus dem Würfeln lernen?

Bei einer Klasse mit 25 Schülern kommen 125 Daten zusammen, deren Verteilung wie in den folgenden Diagrammen aussehen kann. Es sind dort jeweils die aufgetretenen Häufigkeiten (senkrechte Achse) der Anzahlen der benötigten Päckchen (waagerechte Achse) darstellt
Im ersten Schaubild sieht man z.B. dass in dieser Klasse zehnmal der Fall auftrat, dass neun Päckchen benötigt wurden und es zwei Glückspilzfälle gab, in denen schon mit drei Päckchen Erfolg verzeichnet wurde, sowie einen Pechvogel, der 26 Päckchen brauchte.





Im Mittel benötigt man 7 bis 8 Päckchen. Wegen der geringen Anzahl der Versuche, gibt es zwar schon beobachtbare Gemeinsamkeiten, aber ebenso noch beobachtbare Schwankungen. Das macht gerade den Reiz des Zufalls aus.

Wie lösen wir mit dieser Erkenntnis das Sammelbildproblem?

Wir systematisieren unsere Erfahrung. Dazu stellen wir sie zunächst übersichtlich dar. Wir nehmen die Bilder nacheinander aus dem Päckchen. Zu Beginn haben wir alle Plätze frei. Wir benötigen also nur ein Bild, um sicher einen freien Platz zu finden, d.h. um einen Treffer zu landen. Der Erwartungswert für die Anzahl der benötigten Bilder ist damit in diesem Schritt 1. Im nächsten Schritt ist nun bereits ein Platz besetzt und wir haben fünf Möglichkeiten für einen Treffer, aber auch eine für eine Niete. Im Verhältnis zur Anzahl der Treffer haben wir damit einen Nietenzuschlag von ein Fünftel, also 20% zu berücksichtigen. Das bedeutet, dass wir erwarten, im Mittel statt 1 nun 1,2 zufällige Bilder zu benötigen, um den nächsten Platz zu füllen. Jetzt sind zwei Plätze besetzt, wir haben vier Möglichkeiten für einen Treffer und zwei für eine Niete, damit einen Nietenzuschlag von 50%, also einen Erwartungswert von 1,5 … Diese Überlegung führen wir für jeden Schritt fort – „bis das Album voll ist".

Albumplätze frei	**Nietenzuschlag**	**Erwartungswert Anzahl Bilder**	**als Bruch**
		1	$\frac{6}{6}$
	1:5 = 20 %	1,2	$\frac{6}{5}$
	2:4 = 50 %	1,5	$\frac{6}{4}$
	1:1 = 100 %	2	$\frac{6}{3}$
	4:2 = 200 %	3	$\frac{6}{2}$
	5:1 = 500 %	6	$\frac{6}{1}$
Album voll	Summe:	14,7	$6\left(\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n}\right)$

Das Addieren der Erwartungswerte für die einzelnen Schritte ergibt den Erwartungswert für die Gesamtanzahl der Bilder: $1 + 1{,}2 + 1{,}5 + 2 + 3 + 6 = 14{,}7$. Das 14,7-te Bild wird dabei dem achten Päckchen entnommen. Zufall führt zu Abweichungen und damit faktisch zur beobachtbaren Bandbreite von Ergebnissen im Experiment.

Wie können wir mit diesem Wissen das Sammelbildproblem lösen? Wir müssen aus dem betrachteten Spezialfall das allgemeine Muster herauslesen! Dazu ist es hilfreich, die Darstellung der Zahlen zu wechseln, um mehr sehen zu können. Wir stellen, motiviert durch das Wissen, dass die Zahl 6 eine Rolle spielt, die auftretenden Erwartungswerte als Brüche dar, in denen die Zahl 6 vorkommt:

$$\frac{6}{6}+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+\frac{6}{1}\,.$$

Aus dieser Summe lässt sich noch die Zahl 6 ausklammern:

$$6\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right).$$

Damit kommen wir zur Einsicht, dass wir, wenn die Sammelbilderanzahl 540 beträgt, die Anzahl der im Mittel benötigten Bilder berechnen können durch

$$540\cdot\left(\frac{1}{540}+\frac{1}{539}+\frac{1}{538}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right),$$

was uns 3709,643640… liefert – und 3710 Bilder, also 742 Päckchen bedeutet.