Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 180

Funktionen und Medien — Anmerkungen zur Trias ihrer Beziehung

Horst Hischer

Saarbrücken 2006

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 180
submitted: October 10, 2006

Funktionen und Medien — Anmerkungen zur Trias ihrer Beziehung

Horst Hischer

Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

Funktionen und Medien — Anmerkungen zur Trias ihrer Beziehung

von

Horst Hischer, Saarbrücken

1 Einleitung

Der Funktionsbegriff begegnet uns bereits bei den Babyloniern in deren Tabellen, also lange vor dem „offiziellen“ (mit dem Namen von Leibniz verbundenen) „Beginn“ in der Mathematik. Andererseits treten Funktionen noch bis in das 19. Jahrhundert hinein – vor allem außerhalb der Mathematik – in der Gestalt „empirischer Funktionen“ (insbesondere bei zeitachsenorientierten Darstellungen) auf, die in aller Regel nicht (in der Sprache der Mathematik: fast nie) termdefinierbar sind.

Solche sich einer Termdarstellung hartnäckig widersetzenden, mit einem „Realitätsbezug“ versehenen Funktionen sind dann für Jean Baptiste Joseph Fourier (in seiner « Théorie de la Chaleur », mit der er die Darstellung periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen untersucht) und seinen Schüler Peter Gustav Lejeune Dirichlet (in seiner Arbeit « Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données », mit der er untersucht, ob sich für „beliebige“ Funktionen ein bestimmtes Integral definieren lässt) ein wichtiger Anlass zur Entwicklung des modernen „termfreien“ Funktionsbegriffs, der Anfang des 20. Jahrhunderts nach grundlagentheoretischen Vorarbeiten von Cantor, Peano, Peirce, Schröder und ferner auch von Frege, Russell und Whitehead schließlich durch Felix Hausdorff in Gestalt der „rechtseindeutigen Relation“ zu höchster formaler Perfektion gelangt.

Mit entsprechender zeitlicher Verzögerung hält diese – formale – Funktionsdefinition im Rahmen der „New Math“ dann auch in Deutschland in den 1970er Jahren Einzug in den Mathematikunterricht. Zwar spielt diese ästhetische, präzise Funktionsauffassung auch in der Hochschulmathematik der 1960er und 1970er eine gewisse Rolle, sie hat sich jedoch nie gänzlich durchgesetzt. Heute haben wir uns davon (leider!?) sehr entfernt, und so begegnen uns Funktionen in großer Vielfalt – „Funktionen haben viele Gesichter“ (vgl. [Herget & Malitte & Richter 2000]).

Während Funktionen zunächst außerhalb der Mathematik als „Medien zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit“ auftreten, werden sie schließlich im Zusammenhang mit der Entstehung der Analysis zu eigenständigen Objekten der Mathematik, was sinnig als die „Wende vom Medium zum Objekt“ bezeichnet sei.

Andererseits werden viele konkrete Funktionen schon von Anbeginn bei den Babyloniern bis heute gerne durch Medien dargestellt, und darüber hinaus treten manche Medien z. T. selber als Funktionen auf, wie wir noch sehen werden! Wir müssen somit folgende *Trias in der Beziehung von Funktionen und Medien* zur Kenntnis nehmen und didaktisch würdigen:

- *Darstellung von Funktionen durch Medien:*
  Konkrete Funktionen werden oft durch Medien dargestellt.
- *Funktionen als Medien:*
  Funktionen dienen oft der medialen Darstellung von Kultur und Wirklichkeit.
- *Medien als Funktionen:*
  Medien können oft als Funktionen (also als eindeutige Zuordnungen) auftreten.

Bezüglich des ersten Aspekts liegt mittlerweile mit dem Funktionenplotter ein selbstverständliches und kaum mehr wegzudenkendes Werkzeug vor, und zwar in Forschung, Entwicklung und Produktion, in der Schule und auch im Alltag (z. B. die auf Anzeigetafeln im Börsenparkett dargestellten Funktionsplots der Kursentwicklung). Im Sinne des dritten Aspekts sind Funktionenplotter ihrerseits Funktionen, weil sie ja den eingegebenen Funktionstermen und entsprechenden Randbedingungen (Intervalle, Farbe, Strichdicke, …) jeweils eindeutig einen Funktionsplot zuordnen. Wir können aber sogar die von ihnen erzeugten Funktionsplots selber als Funktionen ansehen (vgl. [Hischer 2002, 307] und die vertiefenden Beispiele in [Selzer 2006]). Hier treten dann merkwürdige Effekte wie etwa das *Aliasing* auf, und wir müssen feststellen, dass jeder Funktionsplot stetig ist (*Erster Hauptsatz für Funktionenplotter*) und dass die Plots trigonometrischer Funktionen fast immer falsch sind (*Zweiter Hauptsatz*) (vgl. [Hischer 2002, 307 ff.] und [Hischer 2006]). Im Mathematikunterricht sollten diese drei Aspekte im Rahmen einer sog. „Integrativen Medienpädagogik“ thematisiert werden (vgl. Abschnitt 12 dieser Abhandlung).

2 Gibt es derzeit ein einheitliches Verständnis von „Funktion“?

Wir beobachten heutzutage eine Fülle formal nicht vereinbarer Auffassungen und Verwendungen des Wortes „Funktion“ im mathematischen Kontext, z. B.:

> *die Funktion* $y = f(x)$, *die Funktion* $f(x)$, *die Funktion* f, *die Funktion* $y = y(x)$, *die Funktion* $x \mapsto f(x)$, *der Weg ist eine Funktion der Zeit* (oft z. B. notiert als $s = s(t)$), man betrachtet eine *Parabel als quadratische Funktion*, es wird eine *Wertetabelle als Funktion* bezeichnet, …, usw.

Strengen formalen Ansprüchen hält hierbei (zunächst?) nur *„die Funktion* f*“* stand, mit gewissen Abstrichen auch noch *„die Funktion* $x \mapsto f(x)$*“*. So ist zu fragen: Soll das bedeuten, dass es in der heutigen Mathematik und ihren Anwendungen kein einheitliches Begriffsverständnis dessen gibt, was eine Funktion ist?

Dieser Verdacht wird genährt, wenn man zur Kenntnis nimmt, dass in letzter Zeit (auch in der Mathematik) in zunehmendem Maße (wieder!) von *„Funktionen mit mehreren Veränderlichen"* gesprochen wird (etwa bei Titeln von Lehrbüchern), wo doch eine Funktion in strenger Begriffsauffassung (nämlich als einer rechtseindeutigen Relation) gar keine Veränderlichen hat bzw. haben kann (korrekt wäre: „einstellige" bzw. „mehrstellige Funktionen")! So weist dann diese Sprechweise darauf hin, dass solche Autoren (wie die Altvorderen vor der Mitte des 20. Jhs.) *Funktionen als Terme* auffassen, also der Sprechweise *„die Funktion* $f(x)$*"* zuneigen. Spürt man dem in Gesprächen mit Mathematikern nach, so wird dieser Verdacht insofern bestätigt, als dass das, was für sie eine Funktion *ist*, von dem Kontext abhängt, in dem sie forschend tätig sind:

Beispielsweise sind für Numeriker (in ihrem Kontext nachvollziehbar!) oftmals „Funktion" und „Tabelle" Synonyme, oder sie identifizieren (ebenfalls kontextuell nachvollziehbar!) „Funktion" mit „Term". Oder man findet häufig die Auffassung, Funktionen seien spezielle Abbildungen, und zwar von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, wobei eine Abbildung dann lediglich eine „eindeutige Zuordnung" (im Sinne eines undefinierten, unmittelbar einleuchtenden Grundbegriffs) ist, somit dann also „Funktion" und „Abbildung" im Gegensatz zur mengentheoretisch begründeten Auffassung nicht identifiziert werden. Beispielsweise für Zahlentheoretiker sind dann Funktionen nur Abbildungen von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$.

Dass die althergebrachte (antiquierte?) Bezeichnung „Funktionentheorie" mitnichten eine „Theorie der Funktionen" im Sinne der Auffassung von „Funktion als rechtseindeutiger Relation" meint, ist sattsam bekannt, so wie die sog. „Zahlentheorie" ja keine „Theorie der Zahlen" schlechthin ist, sondern vor allem eine „Ganzzahlentheorie". Und während bei der Identifikation von „Funktion" und „Abbildung" (beides präzisierbar als rechtseindeutige Relation) z. B. ein Funktional „eigentlich" eine spezielle Funktion ist, treten in der Funktionalanalysis Funktionen dann interessanterweise wieder als spezielle Funktionale auf (die begriffliche Verwirrung wird komplett!). So hat man in der Funktionalanalysis früher auch von *Funktionenfunktionen* gesprochen (Dank für diesen Hinweis an Anselm Lambert!).

Wagen wir noch einen Blick in ein Anwendungsfeld der Mathematik: Wenn etwa Physiker z. B. von $s = s(t)$ sprechen und diese Gleichung dann eine „Weg-Zeit-Funktion" nennen, muss man sich als formal strenger Mathematiker mit Grausen abwenden, u. a., weil hier die Variable s in formal zwei unterschiedlichen, nicht vereinbaren Rollen auftritt. Andererseits kommt in dieser Formulierung eine schöne und inhaltlich sehr reichhaltige Auffassung zum Ausdruck, die in einer formal einwandfreien (und dann auch aufgeblähten!) Darstellung verloren gehen würde.

Wie kommen wir in dieser verworrenen Situation weiter? Der denkbare Ansatz, eine *Funktion als rechtseindeutige Relation* aufzufassen, würde das Problem keinesfalls lösen, denn noch nicht mal bei Mathematikern würde er auf einhellige Zustimmung stoßen!

Zwar würden grundlagentheoretisch orientierte Mathematiker (in der sog. „Theoretischen Mathematik") und (theoretische) Informatiker dem wohl zustimmen, aber wir haben gerade gesehen, welch unterschiedliche Auffassungen sich in der Mathematik etabliert haben – wohl weil die Frage nach dem, was denn eine Funktion *eigentlich* ist, für viele (gar die meisten?) unwichtig ist. Allerdings ist diese Feststellung aus didaktischer Perspektive wenig erquicklich, wenn *einerseits* „Funktion" gemäß gängiger Auffassung zu den wesentlichen und unverzichtbaren Grundbegriffen der Mathematik (und in der Folge: des Mathematikunterrichts!) gehört und *andererseits* der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht *entwickelt* werden soll!

3 Funktionen haben viele Gesichter

Ein anderer Ansatz könnte darin bestehen, die *Geschichte der Mathematik* danach zu befragen, wie der Funktionsbegriff entstanden ist und wie dieser sich entwickelt bzw. weiterentwickelt hat. Aber wonach soll man hier suchen? Der nahe liegende Weg, danach Ausschau zu halten, wer zuerst das Wort „Funktion" in welchem Zusammenhang verwendet hat, führt zwar schnell auf Leibniz (s. o.), erweist sich aber leider als nicht hilfreich: Denn es zeigt sich, dass die gerade beschriebene, formal nicht vereinbare Vielzahl der Auffassungen des Funktionsbegriffs dessen Reichtum ausmacht: *Funktionen haben viele Gesichter!* Diese Erkenntnis hat zur Folge, dass nicht nach dem Auftreten des Wortes „Funktion" (also dem Auftreten des Begriffs*namens*) Ausschau zu halten ist, sondern nach dem Auftreten des zugehörigen Begriffs*inhalts* und damit nach dem sog. *funktionalen Denken* im Sinne von [Vollrath 1989, 3], das er im (positiven Sinn) zirkulär wie folgt beschreibt:

> Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.

Wir müssen also *tatsächliche Verwendungszusammenhänge* von Funktionen in den Blick nehmen, oder anders: *Aspekte beim Umgang mit Funktionen!* Und welche Aspekte können bzw. werden das sein? Schon die o. g. exemplarische Zusammenstellung unterschiedlicher Begriffsauffassungen bzw. -interpretationen hilft weiter und führt etwa zu der folgenden, nicht hierarchisch aufzufassenden Liste von Aspekten (die möglicherweise noch erweiterbar ist!): eindeutige Zuordnung, Abhängigkeit einer Größe von einer anderen, (insbesondere) zeitabhängige Größen, (empirische) (Werte-)Tabellen, Kurven/Graphen/Datendiagramme, Formeln. – Im Einzelnen:

Eindeutige Zuordnung: Dies ist aus formaler Sicht *der* wesentliche Aspekt! Leider bleiben hierbei die für Anwendungen wichtigen Aspekte wie etwa die „Abhängigkeit einer Größe von einer anderen" und die „Zeitabhängigkeit" verborgen.

Abhängigkeit einer Größe von einer anderen: Die mit dieser Bezeichnung verbundene Vorstellung ist zwar aus formal-logischer Sicht wenig erfreulich – aber dennoch: Sie ist (leider!?) Fakt! Und außerdem: Sie ist (z. B.) für die Naturwissenschaften unverzichtbar, und sie ist so praktisch und anschaulich!

Zeitabhängige Größe: Auch mit der Bezeichnung „zeitabhängige Größe" verbindet sich eine formal-logisch wenig erfreuliche Vorstellung – aber dennoch: Sie ist (leider!?) Fakt! Und wiederum: Sie ist (z. B.) für die Naturwissenschaften unverzichtbar, und sie ist so praktisch und anschaulich!

(Empirische) (Werte-)Tabelle: (Werte-)Tabellen kennen wir seit den Babyloniern. Für Numeriker sind „Funktion" und „Tabelle" Synonyme – schön! Empirische Tabellen führten Fourier und Dirichlet zum abstrakten modernen Funktionsbegriff!

Kurve, Graph, Datendiagramm: Diese üblichen Visualisierungen von Funktionen machen den Aspekt der eindeutigen Zuordnung „offen sichtlich", und es erscheint bei ihnen die Funktion als „qualitative Gesamtheit" und nicht nur in Gestalt einzelner Funktionswerte.

Formel: Auch jegliche „Formeln" (etwa in den Naturwissenschaften) können als (i. d. R. sog. „mehrstellige") Funktionen angesehen werden!

Zugleich wird mit dieser (nicht abschließend gedachten) Auflistung deutlich, dass der Funktionsbegriff erst durch die Gesamtheit dieser „vielen Gesichter" erfasst werden kann, nicht aber durch die Beschränkung auf einen oder wenige von ihnen.

4 Zeittafel zur Entwicklung des Funktionsbegriffs

Die Zugrundelegung dieser Aspekte führt zunächst zu folgender vereinfachter Zeittafel, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt und noch detaillierbar ist:

19. Jh. v. Chr.	Babylonier: *Tabellierung* von Funktionen
ab 5. Jh. v. Chr.	Antike: kinematisch erzeugte *Kurven*
ca. 950 n. Chr.	Klosterschule: *erste zeitachsenorientierte Funktion* – graphische Darstellung der Inklination von Planetenbahnen in einem *Koordinatensystem*
Anfang 11. Jh.	Guido von Arezzo: Erfindung der *Notenschrift* – eine weitere zeitachsenorientierte Funktion
14. Jh.	Mittelalter, insbes. Oresme: *graphische Darstellung* zeitabhängiger Größen
17. Jh.	Newton: *Fluxionen, Fluenten*; Leibniz, Jakob I Bernoulli: erstmalig das Wort *„Funktion"*; Johann I Bernoulli: *„Ordinaten"*
18. Jh.	Johann I Bernoulli, Euler: Funktion als *„analytischer Ausdruck"*, d. h. als *„Term"*; Euler: Funktion als *freihändig gezeichnete Kurve*; Lambert und viele andere: *empirische Zusammenhänge*

19. Jh.	Fourier, Dirichlet: Funktion als *eindeutige Zuordnung*; Peano, Peirce, Schröder: Funktion als *Relation*
Anfang 20. Jh.	Hausdorff (1914): Funktion als *zweistellige rechtseindeutige Relation*
21. Jh.	... die große Vielfalt ???

Einige für diese Abhandlung besonders markante Stationen seien nun skizziert. So kann hier weder auf kinematische Kurven in der Antike noch auf die mit den Namen Newton, Leibniz, Bernoulli und Euler verbundenen Stationen und auch nicht auf Peano bis Hausdorff eingegangen werden. Weitere Ausführungen dazu finden sich bei [Hischer 2002, 319 ff.].

5 Funktionen als Tabellen bei den Babyloniern

Seit der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden im heutigen Irak, dem antiken Mesopotamien (das bedeutet: „Zwischenstromland“) etwa *eine halbe Million babylonischer Keilschrifttafeln* ausgegraben bzw. in Bibliotheken gefunden. Dieses kulturelle Erbe hat also nahezu 4000 Jahre bis zu seiner Entdeckung überdauert. Unter diesen Tafeln befinden sich etwa *vierhundert*, die *mathematische Probleme* oder *mathematische Tabellen* enthalten. Viele dieser Keilschrifttafeln kann man in Museen von Paris, Berlin und London und in archäologischen Sammlungen der Universitäten von Yale, Columbia und Pennsylvania besichtigen. Neugebauer lieferte 1935 eine erste Interpretation dieser mathematischen Tafeln, eine weitere Publikation hierzu folgte 1945 von Neugebauer und Sachs.

Besondere Berühmtheit hat u. a. „Plimpton 322“ erlangt, die etwa handtellergroße (12,7 cm × 8,8 cm) und ca. 2 cm dicke Tafel Nr. 322 in der Sammlung von G. A. Plimpton in der Universität von Columbia (Abb. 1). Sie wurde in den 1920er Jahren gefunden, vermutlich in der Gegend von Senkereh, dem antiken Larsa.

Nach [Robson 2002] entstand Plimpton 322 etwa 1800 ± 40 v. Chr.

Wie bei einem Rechenblatt in einem heutigen Tabellenkalkulationsprogramm sind in Abb. 1 Zeilen und Spalten zu erkennen. In den Spaltenköpfen stehen Textangaben bezüglich der Inhalte der darunter stehenden Tabellenzellen, welche numerische Angaben in sexagesimaler Darstellung enthalten.

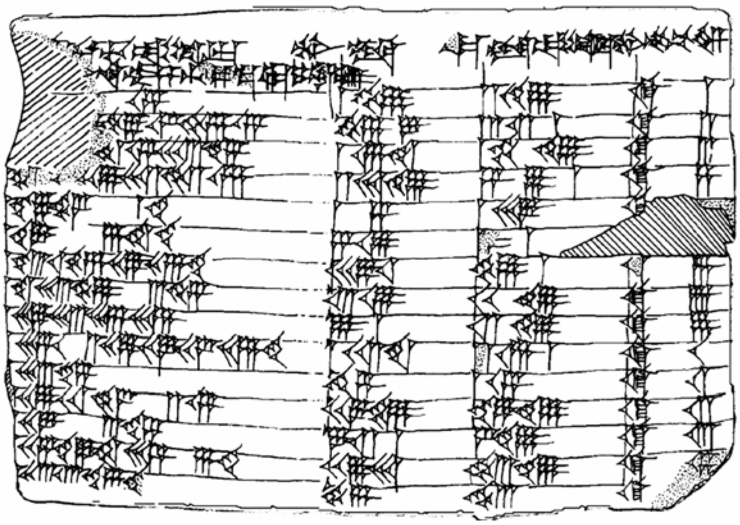


Abbildung 1: Rekonstruierende Transkription von Plimpton 322 durch Eleanor Robson (2002).

Abb. 2 zeigt eine Transliteration von Abb. 1: Ganz rechts stehen von oben nach unten wachsend die Zeilennummern (man schrieb dort, wie noch heute, von rechts nach links). Wir erkennen leicht, dass in Spalte 2 und 3 (von links gezählt) jeweils zwei Partner eines pythagoreischen Zahlentripels stehen, nämlich Hypotenusenlänge und Kathetenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks (etwa $45^2 + ?^2 = 75^2$ in Zeile 11). So verwundert es nicht, dass Plimpton 322 lange Zeit *als erstes bedeutendes historisches Dokument der Zahlentheorie* angesehen wurde.

1;59,0,15	(1.9834)	1,59	(119)	2,49	(169)	1
1;56,56,58,14,50,6,15	(1.9492)	56,7	(3367)	1,20,25	*(4825)	2
1;55,7,41,15,33,45	(1.9188)	1,16,41	(4601)	1,50,49	(6649)	3
1;53,10,29,32,52,16	(1.8862)	3,31,49	(12709)	5,9,1	(18541)	4
1;48,54,1,40	(1.8150)	1,5	(65)	1,37	(97)	5
1;47,6,41,40	(1.7852)	5,19	(319)	8,1	(481)	6
1;43,11,56,28,26,40	(1.7200)	38,11	(2291)	59,1	(3541)	7
1;41,33,45,14,3,45	(1.6927)	13,19	(799)	20,49	(1249)	8
1;38,33,36,36	(1.6427)	8,1	*(481)	12,49	(769)	9
1;35,10,2,28,27,24,26,40	(1.5861)	1,22,41	(4961)	2,16,1	(8161)	10
1;33,45	(1.5625)	45,0	(45)	1,15,0	(75)	11
1;29,21,54,2,15	(1.4894)	27,59	(1679)	48,49	(2929)	12
1;27,0,3,45	(1.4500)	2,41	*(161)	4,49	(289)	13
1;25,48,51,35,6,40	(1.4302)	29,31	(1771)	53,49	(3229)	14
1;23,13,46,40	(1.3872)	56	(56)	1,46	*(106)	15

Abbildung 2: Transliteration von Plimpton 322.
In Klammern sind die dezimalen Werte angegeben.
(Zahlenangaben mit * waren im Original falsch,
sie sind hier korrigiert rekonstruiert.)

Was aber bedeutet die linke Spalte? Hier stehen nicht etwa die jeweils dritten Partner der pythagoreischen Tripel. Vielmehr wurde bald erkannt, dass hier jeweils $\sec^2(\alpha)$ (das Quadrat des Sekans) steht, wobei α derjenige Innenwinkel ist, welcher der Kathete a (in der zweiten Spalte von links) gegenüber liegt. In heutiger Sichtweise wurde hier also eine *zweistellige Funktion* f *tabelliert*, für die gilt (wenn c die in der dritten Spalte von links stehende Hypotenusenlänge ist):

$$f(a,c) := \frac{c^2}{c^2 - a^2} = \sec^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Das können wir so deuten, dass *am* kulturhistorischen *Anfang der Entwicklung des Funktionsbegriffs zweistellige Funktionen* stehen. Die britische Mathematikhistorikerin Eleanor Robson kam nun 2002 in einer interdisziplinären Untersuchung zu dem Ergebnis, dass Plimpton 322 nicht etwa – wie bisher angenommen – als Dokument zahlentheoretischer Forschung anzusehen ist, sondern dass diese *Tafel Lehrenden zur Vorbereitung ihrer Übungsaufgaben diente* – Plimpton 322 war damit also ein *Unterrichtsmittel*! Man kann daher davon ausgehen, dass die Tafel entsprechend mehrfach für diesen Gebrauch (auch fehlerhaft!) manuell kopiert wurde.

Da nun aufgrund archäologischer Befunde bekannt ist, dass bereits um 3000 v. Chr. in Mesopotamien aus der Notwendigkeit der wirtschaftlichen Organisation und Verwaltung heraus die *erste Schrift* entstanden ist und solche wirtschaftlichen Organisationsprozesse auch in Tabellen (sowohl als Speicher- als auch als Darstellungsmedien) erfasst wurden, stellen wir zusammenfassend fest:

In Plimpton 322 sehen wir zunächst die *Darstellung einer* tabellierten *Funktion durch ein Medium*, und außerdem liegt hier ein nahezu *viertausend Jahre altes Unterrichtsmittel* vor. Die hier tabellierte *Funktion* ihrerseits tritt weiterhin *als Medium zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit* auf, nämlich zur Vermittlung eines ökonomischen und damit kulturellen Zusammenhangs, also ganz im Sinne von „Enkulturation" und der pädagogischen Bedeutung von „Medium". Und schließlich können wir die vorliegende Tabelle (also das *Medium* selber) bereits *als Funktion* ansehen, wie es in der Numerischen Mathematik (noch heute) geschieht. Somit sind schon bei Plimpton 322 folgende drei Aspekte bezüglich des Zusammenhangs zwischen Funktionen und Medien zu erkennen (vgl. [Hischer 2002, 194 f. und 324 ff.]) – nämlich die *Trias* im Verhältnis von Funktion und Medium:

- *Darstellung von Funktionen durch Medien*
- *Funktionen als Medien (zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit*)
- *Medien als Funktionen*

6 Zur Dominanz zeitachsenorientierter Funktionen seit etwa 1000 n. Chr.

Von Aristoteles wissen wir, dass er sich in seiner „Physica" u. a. auch mit der *Zeit* befasste und diese mit einer *nach rechts verlaufenden Linie* verglich! Diese Vorstellung hat sich als maßgeblich bis in unsere Zeit erwiesen, und zwar in Verbindung mit der graphischen Darstellung zeitabhängiger Daten. Der Amerikaner Edward R. Tufte veröffentlichte hierzu passend 1983 als Ergebnis einer Langzeitstudie (vgl. [Tufte 1983] und knapp auch [Hischer 2002, 335]): Die *zeitachsenorientierte Darstellung* ist die außerhalb der Mathematik *am meisten genutzte Methode zur Visualisierung von Daten*. Entsprechende Beispiele finden wir seit etwa 1000 n. Chr. Einige wohl weniger bekannte seien skizziert:

Möglicherweise um 950 n. Chr. entstand in einer Klosterschule die in Abb. 3 zu sehende Darstellung.

Nach derzeitigem historischen Kenntnisstand liegt hier wohl die erstmalige *graphische Darstellung einer zeitachsenorientierten Funktion* vor, und zwar die zeitabhängige *Darstellung* der Inklination der Planetenbahnen (*des Zodiac*) von Venus, Merkur, Saturn, Mars und Jupiter und der Bahnen von Mond und Sonne (vgl. [Hischer 2002, 336 ff.]).

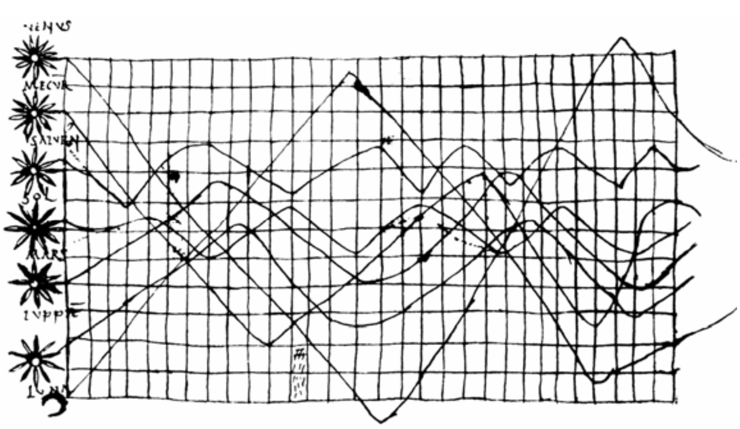


Abbildung 3: Darstellung des Zodiac über horizontaler Zeitachse, ca. 950 n. Chr.

Und diese Darstellung war ferner in dieser Klosterschule ein *Unterrichtsmittel*.

Wir heben hervor: Diese graphische Darstellung ist ein *Medium*, sie *stellt* (zugleich sieben) zeitachsenorientierte *Funktionen dar* (wobei die Zeitachse für jede dieser sieben Funktion individuell skaliert zu denken ist), die hier visualierten (abstrakt zu denkenden) *Funktionen* wiederum stellen einen wichtigen Zusammenhang über die Erkenntnis der Planetenbewegungen im Tierkreis dar, sie *sind* also *Medien zur Darstellung von Wirklichkeit*. Und schließlich begegnen uns diese Medien in der Gestalt von „Funktionsgraphen" selber als Funktionen!

Etwa zur selben Zeit wird vom Mönch Guido von Arezzo (ca. 995 bis 1050) mit seinen „Neumen" die Notenschrift (wir sagen heute „Notentext") erfunden (Abb. 4).

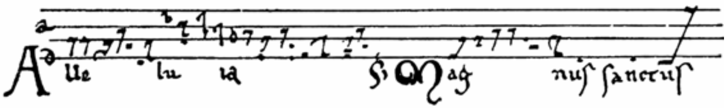


Abbildung 4: Erfindung der Notenschrift durch Guido von Arezzo

Es fällt uns nicht schwer, diesen Notentext als eine zeitachsenorientierte Funktion zu begreifen: Die Zeitachse verläuft von links nach rechts, und die Noten werden nach Tonhöhe und Dauer als Funktionswerte (ggf. als Tupel) vertikal über diskreten Zeitpunkten aufgetragen. Auch hier erkennen wir die Aspekte *„Darstellung einer Funktion durch ein Medium"* (nämlich der Darstellung der „Vorstellung" des Komponisten von seiner „Notenfunktion" durch seinen konkreten „Notentext" als Medium) und *„Funktion als Medium zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit"*. Und für Musiker *ist* ein Notentext bereits die o. g. Notenfunktion des Komponisten (also: *Medium als Funktion*), die er (wohl nur schwach-isomorph!?) interpretiert.

Diese drei medial-funktionalen Aspekte von Notentexten gelten bis in die heutige Zeit hinein – und ferner für die in der Audio-Technik wichtigen „MIDI-Dateien" (**M**usical **I**nstruments **D**igital **I**nterface) und die „Wave-Dateien", worauf in Abschnitt 8 dieser Abhandlung noch kurz eingegangen wird.

In der Folgezeit finden wir zeitachsenorientierte Funktionen bei Nicole d'Oresme (14. Jh., Bischof von Lisieux) in seinen Darstellungen der zeitlichen Veränderung physikalischer Größen, die an Säulendiagramme erinnern; bei der auf John Graunt (dem Entdecker der *demographischen Statistik* für die Entwicklung von Lebenserwartungstabellen) zurückgehenden Lebenserwartungskurve von Christiaan Huygens (1669); bei der Langzeittemperaturmessung im Erdboden („Pyrometrie") durch Johann Heinrich Lambert (1779 publiziert); bei dem von John Southern und James Watt 1796 erfundenen *Watt-Indikator*, einer Maschine zum Aufzeichnen von Kreisprozessen bei Dampfmaschinen (also einer „funktionierenden" Maschine als Funktion); ferner bei der von William Playfaire erfundenen „Linearen Arithmetik" für die Datenvisualisierung durch Balkendiagramme, Tortendiagramme und Kreisdiagramme.

Diese (und weitere) Beispiele werden in [Hischer 2002, 341 ff.] beschrieben. Sie repräsentieren zugleich die *Trias* im Verhältnis von Funktion und Medium!

7 Empirische Funktionen und ihre Bedeutung für Fourier und Dirichlet

Empirische Funktionen treten auch ohne Zeitbezug auf. So erkennen wir auch in den folgenden drei Beispielen die erwähnte *Trias* (vgl. [Hischer 2002, 350 ff.]):

Edmond Halley (1656–1742), bekannt durch den nach ihm benannten Kometen, berichtet 1686 über Beobachtungen, die er mit einem Barometer in verschiedenen Höhen gemacht hatte. Er stellt seine Messwertpaare als Punkte in einem Koordinatensystem dar und interpoliert sie zu einer *Luftdruckkurve*. Somit liegt hier eine weitere *empirische Funktion* vor.

Johann Peter Süßmilch (1707–1767) gilt in Deutschland als geistiger Vater der Statistik und der Demographie. Sein 1741 erschienenes Buch „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflanzung" stellt seine Untersuchungen von Bevölkerungsstatistiken als *tabellierte empirische Funktionen* dar (dazu bietet sich heute ein Tabellenkalkulationsprogramm an!). So versucht er also aus unserer Sicht, die für ihn göttlich bedingten immanenten Zusammenhänge der demographischen Daten funktional darzustellen.

1821 stellt Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) die *Häufigkeitsverteilung der Altersstruktur* der Einwohner von Paris durch einen Funktionsgraphen dar.

Fouriers empirische Untersuchungen führen ihn 1822 in seiner „Theorie der Wärme" dazu, die Definition einer Funktion nicht an einen Term zu binden: Er fordert nach [Felgner 2002] nicht mehr, dass die Funktionswerte *„einem gemeinsamen Gesetz unterworfen sind"*, für ihn ist *„jede Ordinate [...] so gegeben, als wäre sie allein gegeben"*. 1837 veröffentlicht sein Schüler Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) die Arbeit „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen". Er war dazu wie Fourier durch die Physik inspiriert – also durch empirische Funktionen! [Felgner 2002] weist darauf hin, dass Dirichlet von einer Funktion nur noch verlangt, dass *„jedem x ein einziges, endliches y"* entsprechen soll. Zwar klingt bei Dirichlet noch der Aspekt von Funktion als Medium zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit an, aber die Hinwendung zu *„Funktionen als mathematischen Objekten"* dominiert!

8 Funktionen in der Musik

Notentexte können wir als zeitachsenorientierte Funktionen auffassen, wie wir bereits gesehen haben. Das ist heutzutage auditiv erfahrbar, ohne den Notentext mit einem Instrument händisch erklingen zu lassen. Denn nicht nur der Beruf des Schriftsetzers ist ausgestorben, sondern auch der des Notenstechers: Komponisten, Arrangeure und natürlich auch Musikverlage bedienen sich nunmehr höchst leistungsfähiger *Notensatzprogramme* wie etwa CAPELLA™, FINALE™ und SIBELIUS™.

Solche Programme sollten zur Standardausstattung für den Musikunterricht in den Schulen gehören. Zumindest gibt es hierzu kostenlose Demo-Versionen (mit natürlich eingeschränktem Leistungsspektrum).

Man kann dann bei über den Notentext laufender Zeitmarke dessen akustische Umsetzung mittels MIDI erleben, also diese „Funktion" (d. h.: den Notentext) instrumentiert hören (vgl. Abschnitt 6). Abb. 5 zeigt exemplarisch die automatisch erzeugte Umsetzung einer MIDI-Datei (hier: den Anfang eines Menuetts) durch das Notensatzprogramm SIBELIUS™ (http://sibelius.com, dort kostenlose Demo-Version).

Abb. 5: Anfang einer MIDI-Datei (hier: eines Menuetts) in einer durch das Notensatzprogramm SIBELIUS™ automatisch erzeugten Notentextdarstellung (die mitlaufende Zeitmarke wurde hier in Takt 3 dick und strichliert dargestellt).

MIDI-Dateien sind Steuerdateien zur Aktivierung gewisser Musikinstrumente. Solche Instrumente können im einfachsten Fall mit Hilfe der Soundkarte im Computer simuliert werden. Sie nur mit einem der üblichen, zur Grundausstattung heutiger Computer gehörenden Mediaplayer abzuspielen, ist allerdings uninteressant, weil die Struktur solcher Dateien dann verborgen bleibt.

Nimmt man aber beispielsweise ein Studiomusikprogramm wie etwa SAMPLITUDE™ (kostenlose Demo-Version unter http://samplitude.de), so lassen sich MIDI-Dateien damit nicht nur öffnen und abspielen (wie mit einem Mediaplayer oder wie in Abb. 5 dargestellt), sondern auch in ganz anderer Weise eindrucksvoll visualisieren (vgl. Abb. 6; entnommen aus [Hischer 2004], Abb. 9): Solche Visualisierungen nennt man „Piano-Rolle", weil sie im Prinzip von derselben Struktur sind wie die papiernen Steuerrollen der früheren elektrischen Klaviere – das Medium „Piano-Rolle" war damals eine Funktion (sic!), die dazu diente, ein Instrument (hier: ein Klavier) erklingen zu lassen. MIDI-Dateien erweisen sich dann als *Treppenfunktionen*.

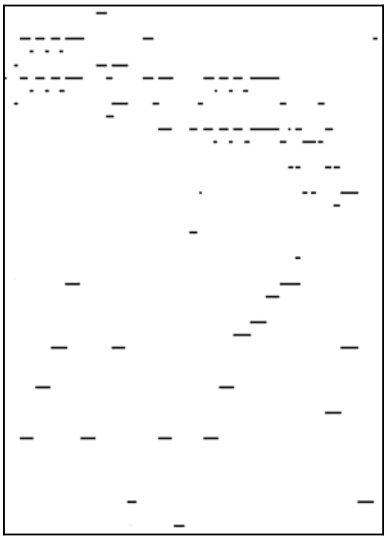


Abb. 6: Visualisierung einer MIDI-Datei mit dem Studioprogramm SAMPLITUDE™ als „Piano-Rolle“: Anfang eines Menuetts

Bereits bei Verfügbarkeit elementarer Notenkenntnisse dürfte es nicht schwer fallen, in Abb. 6 denselben Notentext wie in Abb. 5 zu erkennen: Die Zeitachse verläuft (wieder) von links nach rechts, und vertikal sind die Noten, aufsteigend nach Notenhöhe, durch horizontale Striche dargestellt, deren Länge für die Dauer der Notenwerte steht – ganz wie bei den Schlitzen der früheren Pianorollen.

Mit dem unter http://www.geocities.com/ap_sugunan/ kostenlos herunterladbaren MIDI-Editor SWIFTLET lässt sich dies auch anders visualisieren: Und zwar ist dieser Editor wie ein *Tabellenkalkulationsprogramm* aufgebaut. Abb. 7 zeigt, wie mittels SWIFTLET der Anfang derselben Datei wie in Abb. 6 dargestellt wird, wobei beide Darstellungen zueinander vertikal invers sind: Bei SWIFTLET sind die hohen Töne oben. Jedes Tabellenfeld bedeutet eine Zeiteinheit (ganze Note) und eine Tonhöhe, und jedes Feld lässt sich mittels Doppelklick öffnen, um darin 32stel ad libitum zu (de-)aktivieren. (Es sei angemerkt, dass in Abb. 7 gegenüber Abb. 5 und 6 der erste, punktierte Akkord aus dem Auftakt fehlt und dass ferner die Darstellung nach der strichlierten Zeitmarke in Abb. 5 endet.)

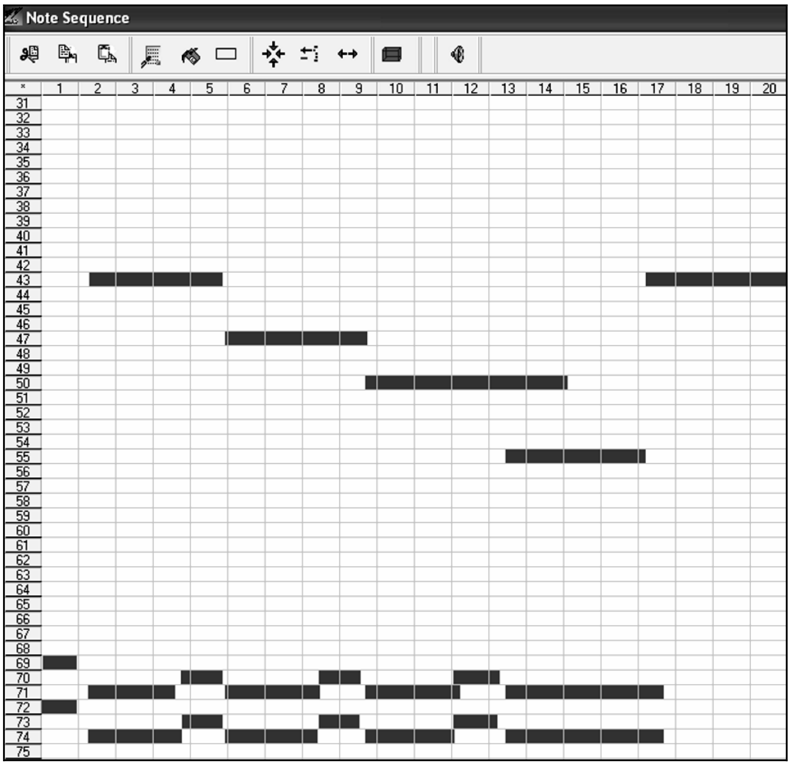


Abb. 7: Anfang der MIDI-Datei aus Abb. 5, 6 (Menuett), dargestellt mit dem MIDI-Editor SWIFTLET

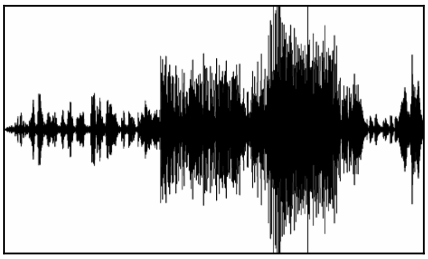
Aufnahmen über ein Mikrophon wurden früher zunächst analog auf Tonbändern aufgezeichnet, um danach ggf. weiterverarbeitet und dann entweder analog auf Schallplatten und seit den 1980er Jahren digital auf Audio-CDs konserviert zu werden. Solche primären Analogaufzeichnungen gehören heute allerdings der Vergangenheit an: Nach einer Zwischenphase der primären Digitalaufzeichnungen auf Videokassetten und dann in den 1990er Jahren auf speziellen Audiobändern (sog. DATs: Digital Audio Tape) werden Audioaufnahmen heute zunehmend direkt auf Festplatten (Hard-Disc-Recording) oder (bei kürzerer Aufnahmezeit) auf Speicherkarten aufgezeichnet: Es gibt auf dem Markt kaum mehr „richtige“ Tonbandgeräte (Kassettenrecorder sind nur als Spielzeug anzusehen), auch keine digitalen, und „analoge“ Tonbänder werden kaum mehr gehandelt.

Für solche „modernen“ digitalen Aufzeichnungen benötigt man Dateiformate, die das hörbare Frequenzspektrum in hinreichend hoher Auflösung zur Weiterbearbeitung und späteren Archivierung (auf CD bzw. DVD) erfassen – also Formate, die uns diese „kulturelle Wirklichkeit“ sowohl adäquat darstellen als auch bearbeiten lassen. Das sind vor allem „Wave-Dateien“ (Dateityp „WAV“; im professionellen Bereich das „Broadcast-WAV“, das aber nicht mit dem einfacheren Windows-WAV identisch ist).

Oft gehören einfache WAV-Editoren zur Soundkarte, und diese ermöglichen bereits elementare Entdeckungen. Besser und eindrucksvoller sind professionell orientierte Programme wie z. B. SAMPLITUDE™ (s. o.). Hier lässt sich die durch das sog. *Sampling* bedingte *Diskretisierung* sehr gut erkennen: Diese Wave-Dateien sind ebenfalls *Treppenfunktionen* (vgl. hierzu [Hischer 2004] und [Hischer 2006]).

> Eine WAV-Datei ist eine zeitachsenorientierte Funktion, die wir als Funktionsgraph sichtbar machen können (bzw. durch nachgeschaltete Verkettung mit „Audio-Funktionen“ auch hören können). Bei ihr werden über den Abtastzeitpunkten der Zeitachse als Funktionswerte die abgetasteten Samples dargestellt. Bei der konkreten Bildschirmdarstellung werden jedoch nicht Abtastzeitpunkte, sondern äquidistante, lückenlos aufeinander folgende Abtastintervalle benutzt und über diesen die Samples als Funktionswerte aufgetragen, so dass eine Treppenfunktion vorliegt. (Nach [Hischer 2002, 370].)

Abb. 8 zeigt links einen Ausschnitt eines Stereokanals einer WAV-Datei und rechts einen sowohl horizontal als auch vertikal gezoomten Ausschnitt daraus. Rechts erkennt man sehr gut die o. g. einzelnen Samples und damit die Treppenfunktion.



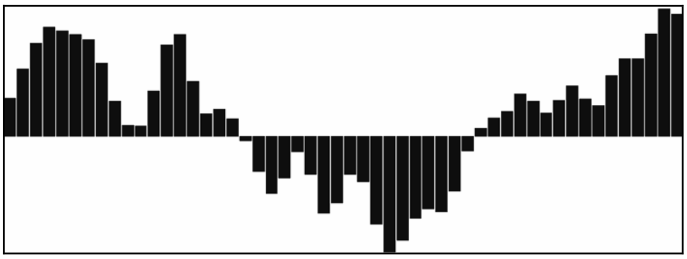


Abb. 8: Ausschnitt aus einem Stereokanal einer WAV-Datei (links) mit SAMPLITUDE™, rechts ein daraus horizontal und vertikal gezoomter Ausschnitt, der die Samples zeigt.

9 Funktionenplotter und Funktionsplots als Funktionen

Ein *Funktionsplot* ist die Visualisierung einer (termdefinierten) reellen Funktion durch einen *Funktionenplotter*. Dieser *Funktionsplot ist* zugleich *eine Funktion*, denn als eindeutige Darstellung (Funktion!) einer rechnerintern erzeugten Wertetabelle in Gestalt einer endlichen Bildpunktmatrix ist er ebenfalls eine Tabelle und damit eine Funktion.

Doch damit nicht genug: Bereits der *Funktionenplotter ist eine Funktion*, denn er liefert auf die Eingabe eines Funktionsterms etc. eine eindeutige Ausgabe.

Ferner: Jeder Funktionsplot einer Funktion f, aufgefasst als eine Darstellung von Punkten $(x, f(x))$ in einem Koordinatensystem, ist eine reelle Funktion mit endlicher Definitionsmenge D. Jedes Element von D ist hier also eine isolierte Stelle (hat eine leere gelochte Umgebung), und damit folgt der *erste Hauptsatz für Funktionenplotter*: „Jeder Funktionsplot ist stetig“. Daraus folgt, dass sich Unstetigkeitsstellen reeller Funktionen mit Funktionenplottern nicht darstellen lassen, insbesondere also: *Unstetigkeit ist nicht darstellbar, sondern nur denkbar!*

10 Funktionen in Bild und Film

Aufgrund der bisherigen Betrachtungen ist klar, dass jeder Fotoapparat als Funktion aufzufassen ist (ein „funktionierendes“ Gerät wie auch der in Abschnitt 6 erwähnte Watt-Indikator), denn er liefert in situativ eindeutiger Weise ein „Bild“ eines Ausschnitts der Wirklichkeit – entweder (in klassischer Weise) auf einem (noch zu entwickelnden) chemisch beschichteten „Film“ oder bei einer Digitalkamera direkt als Datei, wobei anschließend eine Verkettung mit weiteren Funktionen die Bildbearbeitung kennzeichnet, etwa beim „klassischen“ Prozess: Entwicklung des Films (zwar situativ eindeutig, jedoch nicht reproduzierbar eindeutig), Fixierung, vergrößernde Belichtung auf Fotopapier zwecks Herstellung von Abzügen, Entwicklung, Fixierung, … Und entsprechend sind auch Filmkameras und Videokameras als Funktionen zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit aufzufassen, wobei die von ihnen erzeugten Produkte (nämlich die Kinofilme oder Videofilme) ihrerseits Funktionen sind (vgl. Nachfolgendes aus [Hischer 2002, 369]):

> Ein **Kinofilm** ist die Darstellung einer zeitachsenorientierten Funktion: Bestimmten diskreten, äquidistanten Zeitpunkten eines abgeschlossenen Intervalls wird eindeutig jeweils genau ein Einzelbild des Filmstreifens zugeordnet. Durch Verkettung mit der Abbildungsmaschine des Projektors entsteht eine Bildfolge auf der Leinwand. Dieses wird wiederum verkettet mit der Abbildung auf unsere Netzhaut. … So findet hier eine Verkettung mehrerer Funktionen statt. Zusätzlich findet auf dieser Zeitachse eine weitere quasi-kontinuierliche Zuordnung von Audioinformationen statt, die unter diesem Funktionsaspekt untersuchenswert ist. Hier erscheint also ein *Medium als eine Funktion*!

Bei den heute dominierenden Videofilmen gibt es zwar keinen Filmstreifen mehr, dennoch wird der scheinbar kontinuierlich ablaufende Film aus einzelnen Bildern, sog. „Frames“, sequentiell zusammengesetzt, was hier nicht weiter dargestellt wird.

11 Aliasing in der Audiotechnik und in der Bildverarbeitung

In Kürze: Erzeugt man Funktionsplots z. B. von $\sin(ax)$, so erhält man für hinreichend große Frequenzfaktoren a geradezu verheerend „falsche“ Funktionsplots.

Dieser „Stroboskobeffekt“, auf den bereits [Winkelmann 1992] hinweist und den [Herget et. al. 2002] bezüglich Fehldarstellungen beim Taschencomputer TI 92 aufgreifen, entsteht als sog. „Aliasing“ infolge der systembedingt diskreten und insbesondere äquidistanten „Abtastung“ bei der Digitalisierung „kontinuierlicher“ Eingangssignale – und zwar sowohl bei der Bildverarbeitung als auch in der Audiotechnik (vgl. die verallgemeinerten Untersuchungen in [Hischer 2002], [Hischer 2004] und [Hischer 2006], ferner die zahlreichen Beispiele in [Selzer 2005] und [Selzer 2006]). Und so folgt der *zweite Hauptsatz für Funktionenplotter*: „Der Funktionsplot trigonometrischer Funktionen ist meist falsch.“

12 Integrative Medienpädagogik und die Trias

Mit diesen Betrachtungen sollte die – bisher nicht explizit formulierte – mathematikhistorische These untermauert werden, dass Funktionen und Medien seit den Anfängen der Mathematik in einem engen wechselseitigen Bezug untereinander stehen, der durch drei unterschiedliche, dennoch zusammengehörende Aspekte gekennzeichnet werden kann, nämlich die beschriebene *Trias*, also eine „Dreiheit“, aufgefasst als eine *„Zusammenstellung von drei irgendwie zusammengehörenden Dingen“*, die jedoch in Abgrenzung zur *Triade* (einer „Dreiheit“ anderen Typs) nicht etwa eine *„Zusammenfassung von drei gleichartigen Dingen“* ist (vgl. Meyers Konversationslexikon von 1897, Sechzehnter Band). Darauf gründet sich die weitere, didaktische – bisher ebenfalls nicht explizit formulierte – These, dass zu einem umfassenden Verständnis des Funktionsbegriffs dieser, durch die Trias beschriebene, wechselseitige Bezug zwischen Funktionen und Medien zu beachten ist.

Die vorliegende Zusammenschau verschiedener vornehmlich eigener Publikationen, angereichert um weitere Aspekte bezüglich Funktionen in der Musik, sollte plausibel machen, dass diese Trias schon für die „alten Medien“ gilt, obwohl sie erst im Zusammenhang mit den Neuen Medien – bei der didaktischen Analyse des Aliasing – bewusst geworden ist. Das solchermaßen entdeckte Verständnisproblem zum Funktionsbegriff wird aber wohl seine Brisanz erst durch die aktuelle und die noch vor uns liegende Entwicklung der Neuen Medien und Werkzeuge bekommen.

Die in dieser Abhandlung skizzierten – Funktionen und Medien betreffenden – Aspekte sollten daher *Unterrichtsgegenstand* im Rahmen einer *Integrativen Medienpädagogik* werden (vgl. insbesondere die Ausführungen in [Hischer 2002], ferner [Hischer 2005] und http://hischer.de/integrativemedienpaedagogik/). „Integrative Medienpädagogik“ ist dabei als didaktisches Konzept in zweierlei Weise „integrativ“, was in [Hischer 2005] wie folgt kurz beschrieben wird:

1. Alle drei Aspekte der Medien*pädagogik* – nämlich: Medien*didaktik*, Medien*erziehung* und Medien*kunde* – sind bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht *in ihrer Ganzheit* (also: *„integrativ“*!) und nicht losgelöst voneinander bzw. nur für sich isoliert zu berücksichtigen.

2. Eine so verstandene Medienpädagogik kann bei Bezug auf die Neuen Medien wegen der Komplexität des Gegenstandes nicht von einem Unterrichtsfach allein übernommen werden, auch nicht von der Mathematik oder der Informatik – vielmehr sind *im Prinzip alle Unterrichtsfächer* gemeinsam (also: „*integrativ*“!) mit je spezifischen Ansätzen (!) gefordert.

Während der zweite Punkt lediglich (wenn auch nicht minder wichtig!) fachübergreifend aussagt, dass das Konzept der Integrativen Medienpädagogik die Schule als Ganzes betrifft und damit auch dem Mathematikunterricht eine Aufgabe innerhalb eines Bildungsgesamtkonzepts zuweist, wird im ersten Punkt eine wichtige inhaltliche Einteilung beschrieben, die wir jetzt ganz neu deuten können:

Hier wird nämlich gefordert, dass die Integrative Medienpädagogik bereits für sich selber eine Trias darstellt, indem nämlich die Medienpädagogik als eine *„Zusammenstellung von drei irgendwie zusammengehörenden Dingen“* – nämlich der „Integration“ von Mediendidaktik, Medienerziehung und Medienkunde – verstanden werden soll. In [Hischer 2005] wird das wie folgt erläutert:

> Bei den medien*didaktischen* Aspekten Neuer Medien geht es vorrangig um ihren *fachdidaktisch begründeten Einsatz* im Unterricht und damit um den *Umgang* mit ihnen. Hingegen werden die Neuen Medien nun sowohl unter medien*kundlichen* als auch unter medien*erzieherischen* Aspekten zum *Unterrichtsinhalt*, und sie dienen dabei der *Aufklärung* und der Vermittlung von *Haltungen* und *Einstellungen*. Damit wird zugleich klar, dass auch der *Umgang* mit den Neuen Medien und ihre *Anwendung* nicht nur mediendidaktischen Zielen dienen, sondern dass entsprechende individuelle Erfahrungen eine geradezu unverzichtbare Voraussetzung dafür sind, dass sie zum Unterrichtsinhalt werden können, indem ihre *Grundlagen und Grundstrukturen* und ihre *Bedeutung für Individuum und Gesellschaft* erörtert werden. Da nun sowohl dieser Umgang mit den Neuen Medien als auch deren Thematisierung jeweils in Unterrichts*fächern* erfolgt, liegt eine zweifache *fachdidaktische Perspektive* vor: Neue Medien in ihrer doppelten Rolle als *Unterrichtsmittel* und als *Unterrichtsinhalt*.

Bezüglich der Bedeutung der Neuen Medien für den Unterricht tritt hier also neben die *Trias* der (die Neuen Medien betreffenden) Aspekte „Mediendidaktik“, „Medienerziehung“ und „Medienkunde“ die aus „Unterrichtsmittel“ und „Unterrichtsinhalt“ bestehende „Zweiheit“ (griech. „*Dyas*“) der Neuen Medien, die deren Rolle im Unterricht betrifft. Abb. 9 zeigt den Zusammenhang zwischen der Trias und dieser Dyas in einer „Perspektivenmatrix“ (nach [Hischer 2002, 240]; hier modifiziert nach einem Vorschlag von A. Lambert).

- *Innerhalb dieses Konzepts ist nun auch die in dieser Abhandlung beschriebene Trias zwischen Funktionen und Medien zu sehen!*

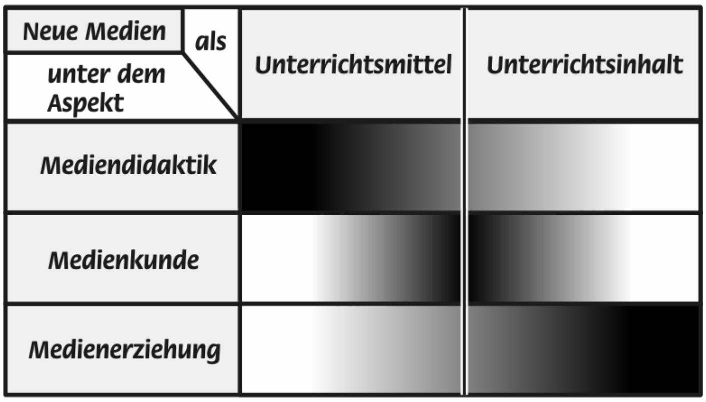


Abb. 9: Perspektivenmatrix Neuer Medien als Verknüpfung einer Trias mit einer „Dyas“.

13 Zum Beispiel: eine „etwas andere Aufgabe“

Zum Verständnis des in Abschnitt 11 erwähnten Aliasing ist es hilfreich, Gemeinsamkeiten mit Moiré-Effekten zu thematisieren und zu erkennen (vgl. [Hischer 2002, 304 ff.], [Hischer 2006] und [Selzer 2006]): So kann man Moiré-Effekten sehr häufig bei gewissen Brückengeländern wie in Abb. 10 (aus [Selzer 2006]) begegnen, wobei man hierfür einen „Blick“ entwickeln muss.

Abb. 10: Brückengeländer mit Moiré-Effekt (aus [Selzer 2006])

Im Unterricht werde nun ein solches Bild präsentiert, verknüpft mit der Frage: „Aus welcher Entfernung ist das Brückengeländer wohl fotografiert worden“? Diese Frage mag Unruhe stiften, klingt sie doch nach „Wie alt ist der Kapitän?“. Auch werden manche einwenden, dass es doch auf das Objektiv der Kamera ankäme (Weitwinkelobjektiv ...?). Jedoch zeigt sich, dass die Aufgabe lösbar ist, wenn man den Abstand der beiden Brückengeländer gut schätzt. Der Effekt lässt sich z. B. mit CORELDRAW™ interaktiv simulieren und führt zur Entdeckung, dass die Anzahl der „Bäuche“ in einem Ausschnitt gleich der Differenz der Gitterstäbe in diesem Ausschnitt ist (in Abb. 11 also 4, wobei dies eine „Negativ-Simulation“ von Abb. 10 ist). Mit Hilfe des Strahlensatzes erhält man für den gesuchten Abstand a leicht $a = mb/d$ (wobei m die Anzahl der Geländerstäbe im „vorderen“ Geländer des gewählten Ausschnitts, d die abgezählte Anzahl der Bäuche (also 4 in Abb. 11) und b die geschätzte Breite des Brückengeländers ist).

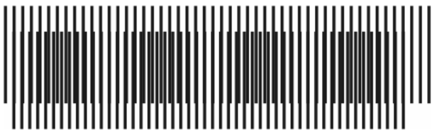


Abb. 11: Moiré-Simulation von Abb. 10 mit CORELDRAW™

Didaktische Reflexion: Was hat diese Aufgabe mit dieser Abhandlung zu tun?

1. Der für Abb. 10 verwendete Fotoapparat ist eine Funktion (s. o.): Er liefert eine mediale Darstellung von Kultur und Wirklichkeit (der Brücke). – 2. Computersimulation führt zum Verstehen des beobachteten Effekts und zur Problemlösung: Das Medium „Computer“ tritt als Funktion auf, weil es durch interaktive Variation eines Formparameters (hier: Breite des Geländerausschnitts) im Zugmodus ein (virtuelles) Objekt eindeutig variiert. – 3. Die beiden Strichgitter in Abb. 11 sind Darstellungen periodischer Funktionen und damit selbst Funktionen: Auch das resultierende Moiré ist dann eine Funktion (Moirés werden mathematisch präzise so beschrieben), und trivialerweise können Moirés (aufgefasst als Funktionen) durch Medien dargestellt werden. – 4. Das Neue Medium „Computer“ dient *mediendidaktisch* der Aufklärung des Phänomens „Moiré“; damit wird *medienkundlich* ein Beitrag zum Verständnis des Aliasing geleistet; Neue Medien werden schließlich über Brückenmoirés *medienerzieherisch* und aufklärend zum Unterrichtsinhalt.

14 Literatur

Felgner, Ulrich [2002]: Der Begriff der Funktion. In: Felix Hausdorff — Gesammelte Werke, Band II, Grundzüge der Mengenlehre. New York usw.: Springer.

Herget, Wilfried & Malitte, Elvira & Richter, Karin [2000]: Funktionen haben viele Gesichter — auch im Unterricht! In: Flade, Lothar & Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS — Anregungen für die Sekundarschulen. Berlin: Verlag Volk und Wissen, 2000, S. 115–124.

Herget, Wilfried & Keunecke, Karl-Heinz & Malitte, Elvira & Stachniss-Carp, Sibylle [2002]: Sinus-Graphen und Rechner-Grenzen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, **44**(2002)2, S. 64–68.

Hischer, Horst [2002]: Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim: Franzbecker.

— [2004]: Treppenfunktionen und Neue Medien — medienpädagogische Aspekte. In: *Der Mathematikunterricht*, **50**(2004)6, S. 36–45.

— [2005]: Aliasing und Neue Medien — Ein Beitrag zur Integrativen Medienpädagogik. In: Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge — Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Osnabrück: Schriftenreihe des FMD, Nr. 40.1, 2005, S. 115–129.

— [2006]: Abtast-Moiré-Phänomene als Aliasing. In: *Der Mathematikunterricht*, **52**(2006)1, S. 18–31.

Robson, Eleanor [2002]: Words and pictures: new light on Plimpton 322. In: *American Mathematical Monthly*, **109**(2002)2, S. 105–120.

Selzer, Pia [2005]: Überraschende Phänomene bei der Darstellung von Funktionen — in naiver und mathematischer Sicht. Universität des Saarlandes: Staatsexamensarbeit.

Selzer, Pia [2006]: Dem Aliasing auf der Spur — Wie wir Neue Medien als Funktionen entdecken können. In: Malitte, Elvira & Richter, Karin & Schöneburg, Silvia & Sommer, Rolf (Hrsg.): Die etwas andere Aufgabe. Festschrift für Wilfried Herget. Hildesheim: Franzbecker, S. 137–160.

Tufte, Edward R. [1983]: The Visual Display of Quantitative Information. Cheshire, Connecticut: Graphics Press (12. Auflage März 1992).

Vollrath, Hans-Joachim [1989]: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **10**(1989), S. 3–37.

Winkelmann, Bernard [1992]: Zur Rolle des Rechnens in anwendungsorientierter Mathematik: Algebraische, numerische und geometrische (qualitative) Methoden und ihre jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen. In: Hischer, H. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? (Tagungsband 1991). Hildesheim: Franzbecker. S. 32–42.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Horst Hischer
Universität des Saarlandes
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
E-Mail: contact.horst@hischer.de