Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 02.11.2018

Lösungshinweise: Präsenzübung 1 zur Vorlesung

Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Aussagen

Aufgabe 1. Alle falsch.

Aufgabe 2.

i) Man betrachtet Tabelle 1 und folgert aus den letzten beiden Spalten, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ immer denselben Wahrheitswert hat wie $\neg B \Rightarrow \neg A$.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Tabelle 1: Zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

ii) Hierzu betrachte man Tabelle 2.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$A \wedge (\neg B)$	$A \Rightarrow B$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Tabelle 2: Zu $A \wedge (\neg B)$.

iii) Es sei A die Aussage "$x^2 = 2$" (A ist richtig als Definition von $\sqrt{2}$). Weiter sei B die Aussage "x ist keine Bruchzahl."

Damit ist zu zeigen: $A \Rightarrow B$ oder äquivalent dazu $A \wedge (\neg B)$ ist falsch.

Bitte wenden.

$\neg B$ bedeutet, x ist eine Bruchzahl oder wiederum äquivalent nach evtl. Kürzen:

$$\text{Es existieren teilerfremde } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ mit:} \quad x = \frac{p}{q}\ .$$

Aus A folgt

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{und damit} \quad p^2 = 2q^2\ ,$$

also ist p^2 eine gerade Zahl.

Als Übung zeigt man leicht, dass dann auch p gerade ist, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p = 2n$.

Dann ist $4n^2 = p^2 = 2q^2$ und folglich $q^2 = 2n^2$.

Wie oben sieht man, dass q^2 und damit auch q durch 2 teilbar ist.

Folglich sind p und q nicht teilerfremd, $A \wedge (\neg B)$ ist falsch, was zu beweisen war. $\square$

Teil 2. Mengen

Aufgabe 3. Offensichtlich sind die Aussagen (in der Reihenfolge) falsch, wahr, falsch, wahr, falsch.

Aufgabe 4. Es sei

$$D := \{\text{Gehen gerne in die Disco}\} \subset K\ , \quad M := \{\text{Mögen Mathematik}\} \subset K\ ,$$
$$K := \{\text{Alle Schüler/innen der Klasse}\}\ .$$

Ist n die abzuschätzende Zahl, d.h. die Zahl derer, die Discos und Mathe mögen, so ist n die Anzahl der Elemente von $M \cap D$.

Eine Regel von de Morgan besagt:

$$(K - M) \cup (K - D) = K - (M \cap D)$$

und die Anzahl der Elemente der Menge auf der rechten Seite ist $32 - n$.

Die Anzahl der Elemente aus $K - M$ ist 14.

Zur maximalen Anzahl der Elemente von $D \cap M$.

Gilt $K - D \subset K - M$, d.h. $M \subset D$, so ist die Anzahl der Elemente auf der linken Seite minimal und damit n maximal, $n_{max} = 32 - 14 = 18$.

Zur minimalen Anzahl der Elemente von $D \cap M$.

Sind $K - M$ und $K - D$ disjunkt, so hat die Menge auf der linken Seite die maximale Anzahl an Elementen, nämlich 19, woraus $n_{min} = 13$ folgt.

Die Situation kann man sich leicht anhand von Intervallen verdeutlichen. Es sei $K = [0, 32]$.

Im ersten Fall ist etwa $M = [0, 18]$ und $D = [0, 27]$, d.h. $M \cap D$ hat die Länge 18.

Im zweiten Fall kann man beispielsweise $D = [0, 27]$ und $M = [14, 32]$ wählen, was $M \cap D = [14, 27]$ ergibt.