Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 30.11.2018

Lösungshinweise: Präsenzübung 3 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Kombinatorik

Aufgabe 1.

i) Ein Spieltag mit 11 Spielen kann als geordnetes Tupel der Länge 11 interpretiert werden, wobei es für jeden Eintrag 3 Möglichkeiten gibt. Demnach gibt es 3^{11} verschiedene Möglichkeiten (*Permutation mit Wiederholung*).

ii) Es gibt

$$\binom{49}{6}$$

verschiedene 6-elementige Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$ (*Kombination ohne Wiederholung*).

Aufgabe 2.

i) Es handelt sich um eine 3-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 10\}$ (*Kombination ohne Wiederholung*) und es gibt

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$$

Möglichkeiten.

ii) Dieser Fall kann als 3-*Permutation ohne Wiederholung* aus $\{1, \ldots, 10\}$ interpretiert werden mit

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Möglichkeiten.

Bitte wenden.

Teil 2. Körper

Aufgabe 3. Nach den Tabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{array}$$

ist beispielsweise

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad \text{und} \quad 1 \cdot 1 = 1 \, .$$

Das additive Inverse der 1 ist wegen

$$1 + 1 = 0$$

die 1 selbst, das multiplikative Inverse der 1 ist ebenfalls die 1, die gleichzeitig das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist.

Auf diese Weise werden sukzessive alle Regeln verifiziert.

Aufgabe 4. Es ist

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a\,1 - b\,0, a\,0 + b\,1) = (a, b) = (1, 0) \cdot (a, b) \, .$$

Mit

$$(c, d) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

ist das gesuchte Paar gefunden – man beachte, dass aus $(a, b) \neq (0, 0)$ unmittelbar $a^2+b^2 \neq 0$ folgt.)

Teil 3. Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

Aufgabe 5. Man kann direkt mit den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & |x-2| + \big|2 - |x-2|\big| < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \big|2 - |x-2|\big| < 1 - |x-2| \\ \Leftrightarrow \quad & -1 + |x-2| < 2 - |x-2| < 1 - |x-2| \end{aligned}$$

argumentieren, die auf einen Widerspruch und damit auf die leere Menge als Lösungsmenge führen.

Alternativ bietet sich eine Fallunterscheidung an:

Fall 1: $x \geq 2$. Dann ist

$$|x-2| + \big|2 - |x-2|\big| = x - 2 + |2 - x + 2| = x - 2 + |4 - x| \, .$$

Fall 1a: $2 \leq x \leq 4$. Wegen

$$x - 2 + |4 - x| = 2 > 1$$

liefert dieser Fall keinen Beitrag zur Lösungsmenge.

Fall 1b: $4 < x$. Auch dieser Fall führt aufgrund von

$$x - 2 + |4 - x| = 2x - 6 > 2$$

zu einem Widerspruch.

Fall 2: $x < 2$. Nun ist

$$|x - 2| + \big|2 - |x - 2|\big| = 2 - x + |2 - (2 - x)| = 2 - x + |x| \ .$$

Fall 2a: $0 \leq x < 2$. Die Ungleichung

$$2 - x + |x| = 2 > 1$$

zeigt, dass dieser Fall nicht zur Lösungsmenge beiträgt.

Fall 2b: $x < 0$. Mit

$$2 - x + |x| = 2 - 2x > 2$$

wird der Beweis vollständig. $\square$

Teil 4. Quadratische Gleichungen, Polynomdivision

Aufgabe 6.

i) Es gilt (z.B. *Lösungsformel* verwenden)

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$$

und die Lösungsmenge (hier im Allgemeinen mit $\mathbb{L}$ bezeichnet) ist

$$\mathbb{L} = \{-4, 6\} \ .$$

ii) In diesem Beispiel erkennt man

$$3x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = (3x - 1)\big(x + \frac{1}{4}\big)$$

und folglich

$$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\} \ .$$

iii) Durch Ausprobieren findet man 3 als eine Lösung, eine Polynomdivision im nächsten Schritt ergibt

$$(x^3 + 4x^2 - 9x - 36) : (x - 3) = x^2 + 7x + 12 \ .$$

Das verbleibende Polynom zweiten Grades soll nun exemplarisch mithilfe einer *quadratischen Ergänzung* analysiert werden:

$$x^2 + 7x + 12 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ ,$$

Bitte wenden.

d.h. man hat die Nullstellen nach

$$x + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \; .$$

Insgesamt ist gefunden:

$$\mathbb{L} = \left\{ 3, -3, -4 \right\} \; .$$