Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Saarbrücken, 07.12.2018

Lösungshinweise: Übungsblatt 4 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Aufgabe 1. Die Umformungen

i) $[II \rightsquigarrow II + 2I]$, $[III \rightsquigarrow III - I]$,

ii) $[III \rightsquigarrow -\frac{1}{6}(III + II)]$,

iii) $[I \rightsquigarrow I - 2III]$, $[II \rightsquigarrow -(II + 2III)]$,

iv) $[I \rightsquigarrow I + II]$

ergeben:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

sodass $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.

i) Hier werden beispielsweise die Umformungen

(a) $[II \rightsquigarrow II - 2I]$, $[III \rightsquigarrow III + I]$,
(b) $[III \rightsquigarrow \frac{1}{6}(III - 4II)]$,
(c) $[I \rightsquigarrow \frac{1}{2}(I - III)]$, $[II \rightsquigarrow \frac{1}{2}(II + III)]$

durchgeführt:

Bitte wenden.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right),$$

sodass $x_1 = \frac{11}{12}$, $x_2 = -\frac{11}{12}$ und $x_3 = \frac{7}{6}$.

ii) Für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt mit den Umformungen

(a) $[II \rightsquigarrow II - \frac{1}{2}I]$,
(b) $[III \rightsquigarrow III - \frac{2}{3}II]$

zunächst:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right).$$

Fall 1. $\alpha \neq \frac{3}{4}$. Hier ergibt sich nach

(a) $[\frac{1}{\alpha-\frac{3}{4}}(IV \rightsquigarrow IV - \frac{3}{4}II)]$,
(b) $[III \rightsquigarrow \frac{3}{4}(III - IV]$,
(c) $[II \rightsquigarrow \frac{2}{3}(II - III)]$,
(d) $[I \rightsquigarrow \frac{1}{2}(I - II)]$

$$\cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha-\frac{3}{4}} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha-\frac{3}{4}} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha-\frac{3}{4}} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha-\frac{3}{4}} \end{array}\right),$$

sodass man eine eindeutige Lösung findet, mit anderen Worten ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{4\alpha-3} \\ \frac{2\beta}{4\alpha-3} \\ -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ \frac{\beta}{\alpha-\frac{3}{4}} \end{pmatrix} \right\} .$$

Fall 2. $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$. Dann besitzt das Gleichungssystem keine Lsung, wie man bereits nach der ersten Umformung erkennt.

Fall 3. $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta = 0$. Im letzten Fall folgt nach der ersten Umformung, dass $x_4 = t \in \mathbb{R}$ beliebig gewhlt werden kann. Rckwrtseinsetzen liefert $x_3 = -\frac{3}{4}t$, $x_2 = \frac{1}{2}t$, $x_1 = -\frac{1}{4}t$, sodass

$$\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Teil 2. Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis eines Vektorraums

Aufgabe 3.

i) (a) Das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{0}}$$

wird mithilfe des Gaußschen Algorithmus gelöst.

Aus den Umformungen

- $[II \rightsquigarrow I + II]$, $[III \rightsquigarrow III - I]$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) ,$$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, also sind die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig.

Gäbe es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} ,$$

Bitte wenden.

so wrden die Umformungen

i. $[II \rightsquigarrow I + II]$, $[III \rightsquigarrow III - I]$,
ii. $[II \rightsquigarrow \frac{1}{3}II]$, $[III \rightsquigarrow III - \frac{2}{3}II]$

auf

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

führen, d.h. man hätte einen Widerspruch.
Demnach kann man den Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ nicht als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ schreiben.

(b) Wegen

$$2\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}$$

sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear abhängig.

ii) Die Umformungen

(a) $[II \to I + II]$,
(b) $[I \to I + II]$

liefern

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

und folglich impliziert

$$\lambda_1\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{0}}$$

unmittelbar $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Demnach sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Ist $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$, so löst man das Gleichungssystem

$$\lambda_1\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Umformungen

(a) $[II \to I + II]$,
(b) $[I \to I + II]$:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x_1 \\ -1 & 2 & x_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \end{array}\right),$$

sodass

$$(2x_1 + x_2)\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + (x_2 + x_1)\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{x}}.$$

Aufgabe 4.

i) Die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ sind wegen

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)} - \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \underline{\mathbf{0}}$$

linear abhängig.

ii) Sind λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2\underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \lambda_3\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}\ ,$$

so implizieren die Umformungen

(a) $[III \to III - I]$,
(b) $[IV \to II - IV]$,
(c) $[III \to -III]$,
(d) $[II \to II - III]$, $[I \to I - III]$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) ,$$

d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Folglich sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear unabhängig.

Wegen (s.o.)

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{v}}^{(4)}$$

gilt zudem

$$\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}) = \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)})$$

und somit ist $(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$ eine Basis von U.

Ganz genauso zeigt man, dass $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ linear unabhängig sind und eine Basis von U bilden.