Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 18.01.2019

Lösungshinweise: Übungsblatt 6 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Lineare Regression

Aufgabe 1. Nach den gegebenen Daten betrachtet man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$A^T\underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

Schließlich führt

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

auf die Normalgleichung $A^TA\underline{\mathbf{a}} = A^T\underline{\mathbf{y}}$ im gesuchten $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} .$$

Der Gaußsche Algorithmus liefert nach der Umformung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 14 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

die Lösung $a_2 = -3/5$, $a_1 = 29/10$, d.h.

$$f(x) = \frac{29}{10} - \frac{3}{5}x .$$

Bitte wenden.

Teil 2. Interpolationaufgabe von Lagrange

Aufgabe 2 Man berechnet

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= \sum_{j=0}^{2} y_j \cdot L_j(x) \\
&= 3 \cdot \frac{x-(-1)}{(-2)-(-1)} \cdot \frac{x-1}{(-2)-1} + 1 \cdot \frac{x-(-2)}{(-1)-(-2)} \cdot \frac{x-1}{(-1)-1} \\
&\quad +3 \cdot \frac{x-(-2)}{1-(-2)} \cdot \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \\
&= (x+1)(x-1) - \frac{1}{2}(x+2)(x-1) + \frac{1}{2}(x+2)(x+1) \\
&= x^2 + x + 1 \; .
\end{aligned}
$$

Mit einer Probe verifiziert man, dass die Daten aus der Tabelle angenommen werden.

Wird das Datenpaar $(0,0)$ hinzugenommen, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{j=0}^{3} y_j \cdot L_j(x) \\
&= 3 \cdot \frac{x-(-1)}{(-2)-(-1)} \cdot \frac{x-1}{(-2)-1} \cdot \frac{x-0}{(-2)-0} \\
&\quad +1 \cdot \frac{x-(-2)}{(-1)-(-2)} \cdot \frac{x-1}{(-1)-1} \cdot \frac{x-0}{(-1)-0} \\
&\quad +3 \cdot \frac{x-(-2)}{1-(-2)} \cdot \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{x-0}{1-0} + 0 \cdot L_3(x) \\
&= -\frac{1}{2}(x+1)(x-1)x + \frac{1}{2}(x+2)(x-1)x + \frac{1}{2}(x+2)(x+1)x \\
&= \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x \; .
\end{aligned}
$$

Wieder bestätigt man das Ergebnis mithilfe einer Probe.

Bemerkung. Bei der Rechnung beobachtet man, dass nach der Hinzunahme eines Datenpaares alle Schritte neu berechnet werden müssen.

Die Rechnungen, die das Polynom p_2 geliefert haben, können nicht erneut genutzt werden.

Es gibt jedoch Algorithmus-Varianten, bei denen auf vorherige Rechnungen zurückgegriffen werden kann, was insbesondere in der numerischen Mathematik von Bedeutung ist.

Stichworte: Newtonsche Darstellung, Dividierte Differenzen, Algorithmus von Neville.

Teil 3. Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 3.

i) (a) f ist *nicht surjektiv*, da

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 5) > \frac{1}{2}x^2 \geq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, sodass $\operatorname{bild}(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \subsetneq \mathbb{R}$.

f ist *nicht injektiv*, da $f(1) = 3 = f(-1)$.

(b) f ist *injektiv*: Sind $a, b \in (0, \infty)$ mit $f(a) = f(b)$, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(a^2 + 5) = \frac{1}{2}(b^2 + 5) \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 5 = b^2 + 5 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a + b)(a - b) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a + b = 0 \quad \vee \quad a - b = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a = -b \quad \vee \quad a = b.
\end{aligned}$$

Da $a, b \in (0, \infty)$ gilt, ist $a = -b < 0$ nicht möglich, sodass $a = b$.

f ist *surjektiv*: Sei $y \in (\frac{5}{2}, \infty)$. Dann gilt

$$2y - 5 > 2 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 5 - 5 = 0\ ,$$

sodass $x = \sqrt{2y - 5}$ wohldefiniert ist mit

$$f(x) = f(\sqrt{2y - 5}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2y - 5}^2 + 5) = \frac{1}{2}(2y - 5 + 5) = y\ .$$

(c) f ist *surjektiv* nach Definition von $\mathbb{Q}$ und f selbst.

f ist *nicht injektiv*, da $f(1, 1) = 1 = f(2, 2)$.

(d) f ist *nicht surjektiv*, da $\sin(t) \in [-1, 1] \subsetneq \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

f ist *nicht injektiv*, da $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$.

Bitte wenden.

ii) Die Eigenschaft „surjektiv" bedeutet

$$\mathrm{bild}(f) = N = \{1, 2, \ldots, n\} \ .$$

Ist $n \leq 10$, so betrachte man beispielsweise eine Abbildung f mit $f(k) = k$ für $k = 1$, $\ldots$, n und mit beliebigem $f(k) \in N$ für $k = n + 1$, $\ldots$, 10. Diese ist surjektiv.

Im Fall $n > 10$ beobachtet man, dass das Bild von f (also das Bild von M unter f) maximal 10 Elemente haben kann. Das Bild einer surjektiven Abbildung hätte im Widerspruch dazu $n > 10$ Elemente, d.h. es gibt in diesem Fall keine surjektive Abbildung.

Aufgabe 4.

i) Wäre f periodisch mit der Periode $T > 0$, so wäre per definitionem

$$f(x) = f(x + T) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Nach Voraussetzung ist f aber streng monoton (o.E. wachsend), d.h.

$$f(x) < f(x + T) \ ,$$

was sofort den Widerspruch zeigt. $\square$

ii) Man nehme an, es gebe zwei Punkte $\underline{x}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mit $f(\underline{x}) \neq f(\overline{x})$.

Nach Voraussetzung ist f gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und o.E. kann $0 \leq \underline{x} < \overline{x}$ angenommen werden.

Man hat also wegen der Monotonie (o.E. ist f monoton wachsend)

$$-\overline{x} < \underline{x} < \overline{x} \quad \Rightarrow \quad f(-\overline{x}) \leq f(\underline{x}) \leq f(\overline{x})$$

und somit einen offensichtlichen Widerspruch zu $f(\overline{x}) = f(-\overline{x})$. $\square$