Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 14.12.2018

Präsenzübung 4 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Aufgabe 1. Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert.

$i)$ Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\,, \\ 2x_1 + x_3 &= 0\,, \\ -x_1 + a\,x_2 + 2x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

$ii)$ Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\,, \\ 2x_1 + x_3 &= 1\,, \\ -x_1 + a\,x_2 + 2x_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

$i)$ Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

$ii)$ Bestimmen Sie für fixiertes $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Bringen Sie das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bitte wenden.

durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right) ,$$

wobei die c_{ij}, $1 \le i, j \le 3$, reelle Konstanten bezeichnen.

Teil 2. Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis eines Vektorraums

Aufgabe 4.

i) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ii) Finden Sie zwei linear unabhängige Vektoren in $V := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Kann jedes $\underline{\mathbf{x}} \in V$ als Linearkombination dieser beiden Vektoren dargestellt werden?

Aufgabe 5.

i) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, linear abhängig und nimmt man einen weiteren Vektoren hinzu, so ist das erweiterte System linear abhängig.

ii) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $2 \le k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig und nimmt man einen Vektor aus dieser Familie heraus, so sind die verbleibenden Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 6. Es sei $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots \underline{\mathbf{v}}^{(n)})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

i) Zeigen Sie: Aus $\dim \mathbb{R}^n = n$ folgt, dass es zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ Koordinaten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} .$$

ii) Zeigen Sie, dass die Koordinaten aus *i)* eindeutig bestimmt sind.

Bearbeitung und Besprechung.

In den Übungsgruppen *Fr., 14.12.2018, bis Do., 20.12.2018.*