Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 11.01.2019

Präsenzübung 5 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Matrizenmultiplikation

Aufgabe 1. Zeigen Sie für $A \in M(n,m)$, $B \in M(m,l)$, n, m, $l \in \mathbb{N}$: $(AB)^T = B^T A^T$.

Teil 2. Determinante

Aufgabe 2. Zeigen Sie den Determinatenmultiplikationssatz im Spezialfall A, $B \in M(2,2)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion nach der Dimension n:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

Teil 3. Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 4. Es heißt $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ ein *Eigenvektor* der Matrix A zum *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, falls

$$A\underline{\mathbf{v}} = \lambda \underline{\mathbf{v}} \, .$$

Dabei berechnen sich alle möglichen Eigenwerte aus der Gleichung (überlegen Sie warum)

$$\det \, (A - \lambda I_n) = 0 \, .$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3) \, , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2,2) \, .$$

Teil 4. (Nicht-) Lineare Regression

Aufgabe 5. Eine *quadratische Gesetzmäßigkeit* der Form

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \, ,$$

d.h. die unbekannten Parameter a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, soll mithilfe von experimentellen Messungen „möglichst gut" (*Methode der kleinsten Quadrate*) bestimmt werden.

Bitte wenden.

Die Daten seien (vgl. Beispiel Vorlesung, $i = 1, \ldots, 4$)

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 1 & 4/3 \end{array}\ , \quad \text{d.h.} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}\ .$$

Nun betrachte man die Matrix (warum?)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

und löse die Normalgleichung

$$A^T A \underline{\mathbf{a}} = A^T \underline{\mathbf{y}}\ .$$

Teil 5. Funktionen: Eigenschaften, Verkettung

Aufgabe 6.

i) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle ($t \in \mathbb{R}$ fixiert):

„äußere” Funktion $f(x)$	„innere” Funktion $g(x)$	Verkettung $h(x) = f(g(x))$
$f(x) = x^3$	$g(x) = 5x^2 - 6$	$h(x) =$
$f(x) = e^x$	$g(x) = -31x$	$h(x) =$
$f(x) = x + e^x$	$g(x) = 5x + 3$	$h(x) =$
$f_t(x) = tx^3$	$g_t(x) = 5x^2$	$h_t(x) =$
$f_t(x) = te^x$	$g_t(x) = -3tx$	$h_t(x) =$

ii) Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung von $f \circ g$, wenn f und g die folgenden Abbildungen sind:

(a) g: Auto $\mapsto$ Größe des Tanks in Liter, f: Liter $\mapsto$ Benzinpreis für die Litermenge;

(b) g: Autobesitzer $\mapsto$ Auto, f: Auto $\mapsto$ Farbe;

(c) g: Fußballspieler $\mapsto$ Verein, f: Verein $\mapsto$ Liga.

iii) Es seien $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$ Abbildungen. Begründen oder widerlegen Sie

(a) g, f bijektiv $\Rightarrow$ $f \circ g$ bijektiv;

(b) $f \circ g$ surjektiv $\Rightarrow$ f surjektiv;

(c) g injektiv, $f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv.

Bearbeitung und Besprechung.

In den Übungsgruppen *Fr., 11.01.2019, bis Do., 17.01.2019.*