Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 07.12.2018

Übungsblatt 4 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Aufgabe 1. (*3 Punkte*) Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem mittels des Gauschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (*3+4 Punkte*)

i) Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens alle Lösungen (falls existent) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= -8\,. \end{aligned}$$

ii) Es seien α, $\beta \in \mathbb{R}$ fixiert. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens alle Lösungen (falls existent) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + \alpha x_4 &= \beta\,. \end{aligned}$$

Teil 2. Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis eines Vektorraums

Aufgabe 3. *(3+2 Punkte)*

i) Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$a)\quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden.

Kann man den Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ schreiben?

ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Finden Sie dann zu einem beliebigen (fixierten) Vektor

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)}$.

Aufgabe 4. *(1+4 Punkte)* Im $\mathbb{R}^4$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es sei

$$U = \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}) \ .$$

i) Sind die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ linear unabhängig?

ii) Bestimmen Sie $\dim U$ und geben Sie zwei unterschiedliche Basen von U an.

Abgabe. Bis Freitag, 14.12.2018, 12.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 15 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 10-15 Aufgabenpunkte.

Besprechung. In den Übungsgruppen vom *Fr., 21.12.2018, bis zum Do., 10.01.2019.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/bio/bio.html