Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Saarbrücken, 21.12.2018

Übungsblatt 5 zur Vorlesung

Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Norm und Skalarprodukt

Aufgabe 1. *(1 Punkt)* Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ beträgt der Winkel zwischen den folgenden Vektoren genau $90°$?

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Teil 2. Matrizenmultiplikation

Aufgabe 2. *(4+2+2 Punkte)*

i) Berechnen Sie (falls existent) AB, BA, AC, CA, A^TC, C^TA, ABC und CBA für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

ii) Es seien $A \in M(n_1, n_2)$, $B \in M(n_3, n_4)$ und $C \in M(n_5, n_6)$. Unter welchen Bedingungen an die $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, 6$, ist das Matrizenprodukt B^TCA^T definiert? Welche Zeilen- und Spaltenzahl hat diese Matrix?

iii) Gibt es eine Matrix $A \in M(2,3)$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Teil 3. Inverse Matrix, Determinante

$$\begin{array}{ccccc|cccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Tabelle 1: Zur Regel von Sarrus.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 *(2 Punkte)* Zeigen Sie für **3x3**-Matrizen die *Regel von Sarrus*:

$$\det A := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \; .$$

Bemerkung. Es gibt kein Analogon im Fall $n = 4$. Aus wie vielen Summanden ist im Allgemeinen die Deteminate einer 4x4-Matrix zu berechnen?

Aufgabe 4 *(1+4 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert und*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix} \in M(3,3) \; .$$

Berechnen Sie die Determinante von A und (falls existent) die zu A inverse Matrix. Machen Sie eine Probe zur Richtigkeit der inversen Matrix. Lösen Sie Aufgabe 1, ii), der Präsenzübung 4 im Fall $a \neq 2$ mithilfe der Kenntnis von A^{-1}.

Teil 4. Lineare Regression

Aufgabe 5. *(2.5+1.5 Punkte) Betrachten Sie die Daten $(i = 1, \dots, 4)$*

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \; , \quad d.h. \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; , \; \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; , \; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; .$$

i) Berechnen Sie die Lösung $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ der sogenannten Normalgleichung

$$A^T A \underline{\mathbf{a}} = A^T \underline{\mathbf{y}} \; .$$

ii) Berechnen Sie mit ($\overline{x}$: Mittelwert der x_i, $\overline{y}$: Mittelwert der y_i)

$$s_x^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \overline{x})^2 \; , \qquad s_{xy} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

die Größen

$$\overline{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2}\,\overline{x} \; , \qquad \frac{s_{xy}}{s_x^2} \; .$$

Abgabe. *Bis Freitag, 11.01.2018, 12.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.*

Bonuspunkte für die Klausur.
1 Bonuspunkt: Mehr als 15 Aufgabenpunkte; 1/2 Bonuspunkt: 10-15 Aufgabenpunkte.

Besprechung. *In den Übungsgruppen vom Fr., 18.01.2019, bis zum Do., 24.01.2019.*

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/bio/bio.html

Wir wünschen Ihnen

*****Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr*****