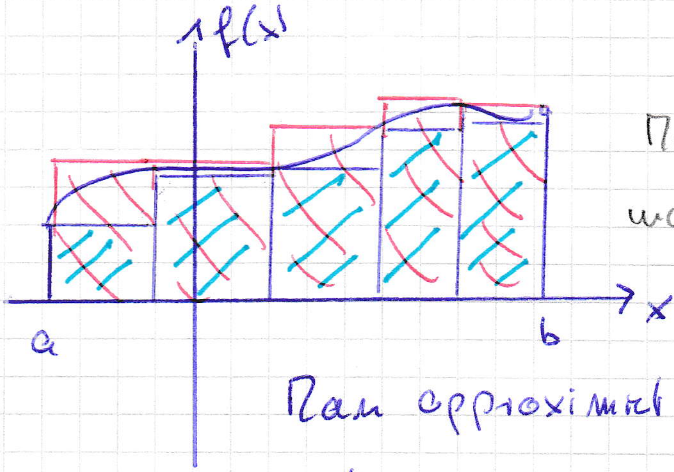
Kap. 10 Integralrechnung

10.1 Die Idee des bestimmten Integrals



Eigentlich nicht richtig: Man definiert so das Integral und das Integral definiert den Flächeninhalt.

Man approximiert den "Flächeninhalt" von "unten und oben" mit Rechtecken und hofft, dass im Grenzwert Konvergenz vorliegt.

Die Konvergenz der sogenannten **Ober- und Untersummen** gegen das damit definierte (Riemannsche) **bestimmte Integral**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ — Integrationsvariable

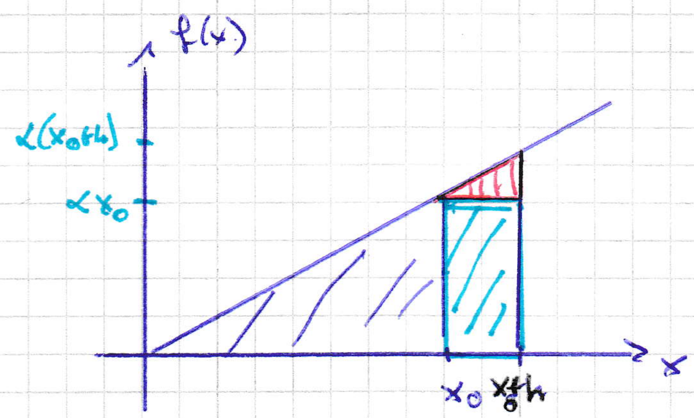
zu zeigen, ist in der Regel recht schwierig.

Das zentrale Werkzeug ist:

↳ und natürlich eines tiefen analytischen Zusammenhang

10.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Idee: Man betr. für $x > 0$, $\alpha > 0$ fix., die Funktion $f(x) = \alpha x$ und den Flächeninhalt $A(x_0)$:



$$A(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)\,dx .$$

Für $h > 0$ ist

$$A(x_0+h) = \int_0^{x_0+h} f(x)\,dx$$

und die Änderungsrate des Flächeninhalts ist:

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{1}{h}\Big[\underbrace{\int_0^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_0^{x_0} f(x)\,dx}_{\text{"} h\cdot\alpha\cdot x_0 \;+\; h\cdot\frac{\alpha h}{2} \text{"}}\Big] = \alpha x_0 + \frac{\alpha h}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta A}{\Delta x} \xrightarrow[h \to 0]{} \alpha x_0 = f(x_0).$$

Satz 1. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ (diff'bar) heißt

Stammfunktion von f, falls

Stammfunktion bis auf Konstante bestimmt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Ist f stetig, so ist

unabhängige Variable in der Stammfunktion

$$F(x) := \int_a^{x} f(t)\, dt$$

zu unterscheiden von der Integrationsvariablen

eine Stammfunktion von f.

Ist umgekehrt F Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b .$$

Notation: $\{F : F \text{ ist Stammfunktion von } f\}$

Integrationskonstante

$$=: \int f(x)\, dx =: F(x) + C$$

unbestimmtes Integral von f.

Das Auffinden einer Stammfunktion heißt **Integration.**

Beispiel: Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

Dann ist $F'(x) = x^n$, d.h. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$.

10.4

Die Integration einer gegebenen Funktion ist oft schwierig und nicht so schematisch wie eine Ableitung zu berechnen.

Es gibt einige Hilfsmittel (Partialbruchzerlegung, Partielle Integration, Substitution).

In der Anwendung nutzt man oft Tabellen aus Nachschlagewerken, eine Probe ist über den Hauptsatz möglich.

natürlich auch numerische Methoden, Stichwort Computeralgebra

Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Einige unbestimmte Integrale

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	gültig, falls
x^k	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}+C$	$k\in\mathbb{Z},\ k\neq -1,\ x\in\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)+C$	$x\neq 0$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$	$\alpha\neq -1,\ x>0$
e^x	e^x+C	$x\in\mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$	$x\in\mathbb{R},\ 0<a,\ a\neq 1$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$x\in\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$x\in\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)+C$	$x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)+C$	$x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+C$	$-1<x<1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$	$x\in\mathbb{R}$