3.1

Kap. 3 Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

3.1 Grundlegendes zur Anordnungsrelation

1.) Transitivität:

aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$;

2.) Verträglichkeit mit der Addition:

aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$;

3.) Verträglichkeit mit der Multiplikation:

aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $x \cdot z < y \cdot z$.

Bemerkungen i.) Die Regeln übertragen sich auf "$\leq$".

ii.) Vorsicht bei der Multiplikation mit negativen Zahlen:

Ist $x < y$, so folgt nach 1.)

$$-y = x + (-x-y) < y + (-x-y) = -x.$$

Allgemein: Ist $x < y$ und $a < 0$, so gilt $ax > ay$

Weitere Konsequenzen:

i.) $x \le y \Rightarrow x^{-1} = \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} = y^{-1}$;

ii.) $x^2 \ge 0$;

iii.) $(x \le y) \wedge (u \le v) \Rightarrow x + u \le y + v$;

iv.) $(0 \le x \le y) \wedge (0 \le u \le v) \Rightarrow x \cdot u \le y \cdot v$.

3.2 Beispiele

Beispiel 1. Ges: $\{x \in \mathbb{R} : 4 \cdot x + 3 \le 18\} = \mathbb{L}_1$.

$x \in \mathbb{L}_1 \Leftrightarrow 4x \le 15 \Leftrightarrow x \le \frac{15}{4}$,

$$\mathbb{L}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x \le \frac{15}{4}\right\}.$$

Beispiel 2. Ges.: $\{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + 3 \le 18\} = \mathbb{L}_2$.

$x \in \mathbb{L}_2 \Leftrightarrow 4x^2 \le 15 \Leftrightarrow x^2 \le \frac{15}{4}$.

Fallunterscheidung.

i.) $x \ge 0$: $x \ge 0 \wedge x^2 \le \frac{15}{4}$

$\Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{\sqrt{15}}{2}$

3.3

ii.) $x < 0$: $x<0 \wedge x^2 \leq \frac{15}{4}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{15}}{2} \leq x \leq 0 .$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{\sqrt{15}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{15}}{2} \right\}$$

Beispiel 3.

Ges: $\left\{ x \in \mathbb{R} : \left| |x^2-4| - \frac{1}{8} \right| < 3 \right\} = \mathbb{L}_3$.

Fallunterscheidung a.)

$x^2 - 4 \geq 0$, d.h. $\left| |x^2-4| - \frac{1}{8} \right| = \left| x^2 - 4 - \frac{1}{8} \right|$

$$= \left| x^2 - \frac{33}{8} \right| .$$

In diesem Fall muss gelten:

$$-3 < x^2 - \frac{33}{8} < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{8} < x^2 < \frac{57}{8}$$

Fall a1. Zusätzlich gelte $x \geq 0$, d.h.

$$\frac{3}{\sqrt{8}} < x < \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{8}}'$$

Fall a2. Hier gelte zusätzlich $x < 0$, d.h.

$$\frac{3}{\sqrt{8}} < -x < \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{8}} < x < -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

Die Lösungsmenge im Fall a. ist

$$\mathbb{L}_3^a = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_1 \cup I_2\}$$

mit

$$I_1 = \left(-\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{8}}, -\frac{3}{\sqrt{8}}\right),$$

$$I_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{8}}\right).$$

Fall b.)

$$x^2 - 4 < 0, \text{ d.h. } \left|\,|x^2-4| - \frac{1}{8}\right| = \left|4 - x^2 - \frac{1}{8}\right|$$

$$= \left|\frac{31}{8} - x^2\right|,$$

es gilt hier

$$-3 < \frac{31}{8} - x^2 < 3$$

$$\Longleftrightarrow \frac{7}{8} < x^2 < \frac{55}{8}.$$

Fall b1. Für $x \geq 0$ gilt also

$$\sqrt{\frac{7}{8}} < x < \sqrt{\frac{55}{8}}$$

Fall b2. Für $x < 0$ gilt

$$-\sqrt{\frac{55}{8}} < x < -\sqrt{\frac{7}{8}}.$$

3.5

Die Lösungsmenge im Fall b. ist

$$\mathbb{L}_2^b = \{x \in \mathbb{R} : x \in I_3 \cup I_4\}$$

mit

$$I_3 = \left(-\sqrt{\frac{55}{8}}, -\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$$

$$I_4 = \left(\sqrt{\frac{7}{8}}, \sqrt{\frac{55}{8}}\right).$$

Es ist $\sqrt{\frac{7}{8}} < \frac{3}{\sqrt{8}}$ und $\sqrt{\frac{55}{8}} < \sqrt{\frac{57}{8}}$, d.h.

$$\mathbb{L} = \left(-\sqrt{\frac{57}{8}}, -\sqrt{\frac{7}{8}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{8}}, \sqrt{\frac{57}{8}}\right).$$

3.3 Fehlerhafte Daten / Rechnungen.

In den Anwendungen kann fast nie mit exakten Daten 100% genau gerechnet werden.

Der Gesamtfehler setzt sich zusammen aus:

i.) Modellfehler, d.h.

a.) Idealisierungsfehler (Abläufe in der Natur werden zur Vereinfachung oft idealisiert modelliert) b.) <u>Datenfehler</u> (Materialeigenschaften etc. sind evtl. nicht genau bekannt, fehlerhafte Messwerte ...)

ii.) <u>Numerische Fehler</u>, d.h.

In jeder Simulation am Rechner

a.) <u>Diskretisierungsfehler</u> (z.B. werden im Rechenmaschinen kontinuierliche Prozesse durch diskrete ersetzt)

b) <u>Abbruchsfehler</u> (unendliche Algorithmen werden nach endlich vielen Schritten abgebrochen

c) <u>Rundungsfehler</u> (ein Computer kann nur endlich viele Zahlen darstellen)

<u>Entscheidende Frage:</u>

Wie wirken sich kleine Eingabefehler auf die Ausgabe aus?

<u>Beispiel</u> Betr. das Gleichungssystem

$$2.4692\, x_1 + 1.2345\, x_2 = b_1$$

$$1.2345\, x_1 + 0.6172\, x_2 = b_2 ,$$

d.h. gg. seien Daten b_1, b_2 als Eingabe in die Aufgabe, gesucht seien x_1, x_2 als Lösung, d.h. als Ausgabe.

Bsp. 1 Eingabe: $b_1 = 3.7041$ $b_2 = 1.8519$

Ausgabe: (exakte Rechnung) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

Bsp. 2 Eingabe: $\hat{b}_1 = 3.7040$, $\hat{b}_2 = 1.8518$

Ausgabe: (exakte Rechnung) $\hat{x}_1 = 12344$, $\hat{x}_2 = -6170$

D.h. kleine Störungen in der Eingabe (Größenordnung 10^{-4}) können in diesem Beispiel große Störungen in der Ausgabe (Größenordnung 10^{4}) bewirken.

Wie misst man den Fehler?

Es bezeichne x_F den Näherungswert einer Zahl, x den exakten Wert.

Der absolute Fehler von x_F ist

$$\text{AbsF}(x_F) := x_F - x.$$

Bsp. Rundung auf n-Nachkommastellen:

$$|\text{AbsF}(x_F)| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-n}.$$

Relativer Fehler: $\dfrac{\text{AbsF}(x_F)}{x}$ $x > 0$ in der Regel

Einige Rechenregeln: (z.T. nur mit approximativer Gültigkeit)

i.) Addition und Subtraktion.

Ergebe fehlerhafte Daten

$$\frac{\text{AbsF}(x_F \pm y_F)}{x \pm y} = \frac{x}{x \pm y} \frac{\text{AbsF}(x_F)}{x} \pm \frac{y}{x \pm y} \frac{\text{AbsF}(y_F)}{y}$$

ii.) Multiplikation.

$$\frac{\text{AbsF}(x_F \cdot y_F)}{x \cdot y} \overset{\nabla}{=} \frac{\text{AbsF}(x_F)}{x} + \frac{\text{AbsF}(y_F)}{y}$$

iii.) Division.

$$\frac{\text{AbsF}(x_F / y_F)}{x/y} \overset{\nabla}{=} \frac{\text{AbsF}(x_F)}{x} - \frac{\text{AbsF}(y_F)}{y}$$

3.4 Beschränktheit von Mengen in $\mathbb{R}$

Mit der Ordnungsrelation kann auch die Beschränktheit von Mengen überprüft werden:

Definition 1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (nach unten) beschränkt, falls eine Konstante $\overline{K} \in \mathbb{R}$ existiert ($\underline{K}$) mit

obere Schranke

$$x \le \overline{K} \quad \forall x \in M \quad (\text{nach oben beschr.})$$

$$\text{bzw. } x \ge \underline{K} \quad \forall x \in M \quad (\text{nach unten}).$$

untere Schranke

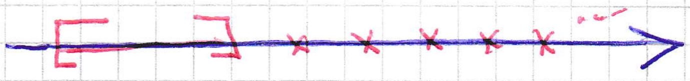
Kleinste obere Schranke: Supremum $\overline{s}$. (sup)

Größte untere Schranke: Infimum $\underline{s}$. (inf)

Gilt $\overline{s} \in M$, so heißt $\overline{s}$ Maximum, gilt $\underline{s} \in M$, so heißt $\underline{s}$ Minimum.

Bem. Mit diesen Begriffen kann die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ präzisiert werden (Vollständigkeitsaxiom)

Bsp.

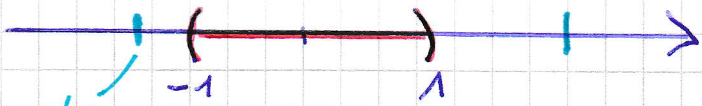


nach unten beschränkt,

$\inf = \min$

nicht nach oben beschränkt

eine mögliche Wahl von $\overline{K}$



eine mögliche Wahl von $\underline{K}$

nach oben und nach unten beschränkt

Max, Min existieren nicht

$\underline{s} = -1$, $\overline{s} = 1$