# Kap. 4 Polynome & Polynomdivision

## 4.1 Polynome

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, es sei $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$ fixiert, $a_n \neq 0$.

**Polynom vom Grad $n$:** $\quad$ ( $n = \text{Grad}(p)$ )

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

**Besonders charakteristische Punkte:**

**Nullstellen:** $\hat{x}$ heißt NST, falls

$$a_n \hat{x}^n + a_{n-1} \hat{x}^{n-1} + \dots + a_1 \hat{x} + a_0 = 0$$

**Elementare Operationen.**

i.) Addition/Subtraktion

formale Definition bringt keine weitere Erkenntnis in diesem Zusammenhang

Bsp. $(6x^5 + x^3 - 4x^2 + 1) + (-4x^2 - x - 1)$
$= 6x^5 + x^3 - 8x^2 - x$

$(6x^5 + x^3 - 4x^2 + 1) - (-4x^2 - x - 1)$
$= 6x^5 + x^3 + x + 2$

ii.) Multiplikation

Bsp. $(-x^2+2)\cdot(x^3-x-1)$

$$= -x^5+3x^3+x^2-2x-2 .$$

## 4.2 Polynomdivision (vgl. [Beutelspacher])

**Ziel:** Teile ein Polynom $p$ vom Grad $n$ durch ein Polynom $q$ vom Grad $m$ (hier: $m < n$).

**Frage:** "Geht das auf oder bleibt ein Rest?"

**Satz 1.**

Existenzbeweis mit vollständiger Induktion nach Grad(p)

Es seien $p$ & $q$ Polynome, $q$ sei nicht das Nullpolynom.

Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $s$ & $r$ mit

$$p = s\cdot q + r \quad \text{und} \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(q)$$

**Restbeispiel.**

$$p = x^4-2x^3-3x^2+4x+7$$

$$q = x^2+2$$

4.3

## Schema.

$$\begin{array}{l}
(x^4-2x^3-3x^2+4x+7):(\overbrace{x^2+2}^{\text{Multiplizieren}}) = \underbrace{x^2-2x-5}_{s} \\
-(x^4 \qquad\quad +2x^2) \\
\quad \text{richtig untereinander} \\
\hline
\qquad -2x^3-5x^2+4x+7 \\
\quad -(-2x^3 \qquad\quad -4x) \\
\hline
\qquad\qquad -5x^2+8x+7 \\
\qquad\qquad -5x^2 \qquad\; -10 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad \underbrace{8x+17}_{r}
\end{array}$$

1.) Schritt: Höchste Potenz fällt bei Subtraktion weg: $\cdot x^2$
$\Rightarrow x^4+2x$

2.) Schritt: Das gleiche bzgl. des Restes aus 1.)
$\cdot(-2x)$
$\Rightarrow -2x^3-4x$
⋮

Also: $(x^4-2x^3-3x^2+4x+7) = (x^2-2x-5)(x^2+2)+(8x+17)$

Probe!

## Spezialfall: Nullstellen und Linearfaktoren.

Geg. sei ein Polynom $p$ vom Grad $n$ und für fixiertes $a \in \mathbb{R}$ sei $q = (x-a)$.

Satz 1 $\Rightarrow$ $p = s\cdot(x-a)+r$, $\overbrace{\text{Grad}(r)}^{0} < \overbrace{\text{Grad}(x-a)}^{1}$
$\Rightarrow r = \text{konst}.$

Ist $a$ NST von $p$, so folgt (insbesondere $x=a$ zulässig)

$$0 = p(a) = s(a-a)+r, \quad \text{d.h. } r=0, \text{ d.h.}$$

$$p = s\cdot(x-a).$$

**Satz 2.** Ist $p$ ein Polynom vom Grad $n$ und ist $a$ NST von $p$, so kann man den Linearfaktor $(x-a)$ abspalten:

$$p(x) = s(x) \cdot (x-a).$$

**Bsp.** $p = x^3 + 2x^2 + x$, $a = -1$ ist NST:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + x) : (x+1) = x^2 + x \\
\underline{-(x^3 + x^2)} \\
\qquad x^2 + x \\
\quad \underline{-(x^2 + x)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$p = (x+1)(x^2+x) = (x+1)^2 \cdot x$$

Zerlegung in Linearfaktoren

**Satz 3** Ein Polynom vom Grad $n$ hat höchstens $n$ verschiedene Nullstellen

Aber: **Bsp.** $x^2+1$ hat keine NST.

$x^2+1$ heißt irreduzibel.