Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (10P)

Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen $s > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{\frac{n}{s}} = e$$

und

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n>s}}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{\frac{n}{s}} = \frac{1}{e}.$$

Folgern Sie daraus, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^x.$$

Aufgabe 2 (4×2,5=10P)

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\alpha f + \beta g$ ist Lipschitz für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $f \circ g$ ist Lipschitz.

c) $f \cdot g$ ist Lipschitz.

d) $|f|^\gamma$ ist Lipschitz auf jedem beschränkten Intervall für alle $\gamma \geq 0$.

Aufgabe 3 (10P)

Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Zeigen Sie, dass die durch

$$x_{n+1} := h(x_n),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

rekursiv definierte Folge für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge ist, und dass ihr Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ die Gleichung

$$h(x) = x$$

erfüllt.

Aufgabe 4 (10P)

Beweisen Sie für alle $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln(x).$$

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 18. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.