Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+4+4=12P) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die angegebenen Funktionen stetig sind:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ \cos(x), & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 2 (2+4+4=10P) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt α-*Hölder-stetig*, wenn es einen Exponenten $\alpha \in (0, 1)$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in I$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie, dass jede α-Hölder-stetige Funktion stetig ist.

b) Es seien $\alpha, \beta \in (0, 1)$ mit $\alpha > \beta$. Zeigen Sie, dass jede α-Hölder-stetige Funktion auch β-Hölder-stetig ist und dass eine Lipschitz-stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall α-Hölder-stetig zu jedem Exponenten $\alpha \in (0, 1)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die $(*)$ für ein $\alpha > 1$ erfüllt, konstant sein muss.

(*Hinweis:* Betrachten sie beliebige $x, y \in I$ mit $x < y$ und teilen Sie das Intervall $[x, y]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_0 = x$ und $x_n = y$ auf. Dann gilt $|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)\right| \leq \ldots$)

Aufgabe 3 (8P)
Ein Bergsteiger beginnt am Samstagmorgen um 10:00 Uhr aus 1234m Starthöhe den Aufstieg auf den 3798m hohen Großglockner. Nach sechs Stunden erreicht er als höchsten Punkt seiner Tour eine Hütte, wo er die Nacht verbringt. Am nächsten Morgen beginnt er um 09:00 Uhr mit dem Abstieg und erreicht um 13:57 Uhr wieder seinen Startpunkt vom Vortag, der auch der tiefste Punkt seiner Route ist. Zeigen Sie, dass es einen Zeitpunkt zwischen 09:00 Uhr und 14:00 Uhr gibt, zu dem er sich an beiden Tagen auf exakt der gleichen Höhe (gemessen von seinem Ausgangspunkt aus) befand.

Aufgabe 4 (10P) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \iff f(x) = ax \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 25. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.