Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (5+5=10P) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Randpunkten $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion.

a) Zeigen Sie, dass die einseitigen Grenzwerte $f(x-) := \lim_{y\uparrow x} f(y)$ und $f(x+) := \lim_{y\downarrow x} f(y)$ an jeder Stelle $x \in (a,b)$ existieren und

$$f(x-) = \sup_{y\in(a,x)} f(y), \qquad f(x+) = \inf_{y\in(x,b)} f(y)$$

erfüllen. Folgern Sie ein entsprechendes Ergebnis für monoton fallende Funktionen.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass eine monotone Funktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben kann und diese ausnahmslos Sprungstellen sind.

Aufgabe 2 (4+3+5=12P) Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt von *beschränkter Variation* (in Zeichen: $f \in BV\big([a,b]\big)$), wenn

$$V_a^b(f) := \sup\left\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \,:\, n \in \mathbb{N},\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\} < \infty.$$

a) Beweisen Sie:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad f \text{ ist monoton} \implies f \in BV\big([a,b]\big),\\
&(2) \quad f \text{ ist Lipschitz-stetig} \implies f \in BV\big([a,b]\big),\\
&(3) \quad f, g \in BV\big([a,b]\big) \implies \alpha f + \beta g \in BV\big([a,b]\big) \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0, \\ x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \notin BV\big([0,1]\big)$.

c) Es sei $f \in BV\big([a,b]\big)$. Wir definieren $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ vermöge $g(x) := V_a^x(f)$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := g(x) - f(x)$. Beweisen Sie, dass g und h monoton wachsen. Folgern Sie daraus:

$$f \in BV\big([a,b]\big) \iff \begin{array}{l}\text{Es gibt monoton wachsende Funktionen} \\ g, h : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sodass } f = g - h.\end{array}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4+5+1=10P) Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) heißt *konvex*, wenn für alle $0 \leq t \leq 1$ und $x, y \in I$ gilt:

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

a) Zeigen Sie: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, so gilt für alle $x < y < z$ aus I

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

b) Es seien $a < b$ die Grenzen von I und $x \in (a, b)$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h_x : (a, b) - \{x\} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $J \subset I$, das x enthält, beschränkt ist und folgern Sie, dass f an jedem Punkt $x \in (a, b)$ stetig ist.

c) Finden Sie ein Beispiel für eine konvexe Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die in 0 und 1 nicht stetig ist.

Aufgabe 4 (8P) Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass f dann schon gleichmäßig stetig ist. (*Hinweis:* Argumentieren Sie indirekt!)

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 01. Februar** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.