Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
14. Übungsblatt; „Probeklausur“

Die nachfolgenden Aufgaben entsprechen in Umfang und Schwierigkeitsgrad in etwa denen der Klausur. Die Lösungen finden Sie ab dem 30. März auf der Homepage zur Vorlesung. In der Klausur wird jede der 7 Aufgaben mit 10 Punkten bewertet, die Gesamtpunktzahl beträgt jedoch 60 Punkte. Sie müssen also nicht alle Aufgaben bearbeiten, um 100% zu erreichen. Mit 30 Punkten haben Sie sicher bestanden.

Aufgabe 1

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $\big(\max\{a_n, b_n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

b) Es seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{C}$ und

$$|c_n - d_n| \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie: Dann konvergiert auch $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = c$.

c) Es sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} |e_n| \leq \Big|\limsup_{n\to\infty} e_n\Big| \leq \limsup_{n\to\infty} |e_n|.$$

Aufgabe 2

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie: Die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist kompakt.

b) Betrachten Sie die Menge

$$A := \left\{\frac{x-1}{|x|+1} \, : \, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass A beschränkt ist und bestimmen Sie $\sup A$ und $\inf A$. Handelt es sich dabei um ein Maximum bzw. Minimum?

Bitte wenden!

Aufgabe 3

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$ für ein $r \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{N}$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{mk}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Konvergenzradius $\sqrt[m]{r}$ hat.

b) Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n} + i^{2n+1}}{n}$,

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{4-3i}{4}\right)^n$,

iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Aufgabe 4

Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ konvergiert.

Aufgabe 5

a) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{wenn } x^2 \geq 2, \\ -1, & \text{wenn } x^2 < 2. \end{cases}$ Zeigen Sie: f ist stetig an jedem Punkt $x \in \mathbb{Q}$;

b) Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und $f : I \to J$ monoton und surjektiv. Zeigen Sie, dass f dann schon stetig sein muss.

Bitte wenden!

Aufgabe 6

a) Prüfen Sie die Funktion

$$f : (-2, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \big(x - \lfloor x \rfloor\big) \cdot (x^2 - 1)$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
(Zur Erinnerung: $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.)

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Zeigen Sie: Dann ist auch $f \cdot g$ auf I n-mal differenzierbar und es gilt die Formel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

(Beachten Sie: $f^{(0)} := f$.)

Aufgabe 7

a) Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) > 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes: Die Gleichung

$$\frac{f(x)}{x^n} = x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$$

hat eine Lösung $x_0 > 0$.

b) Es seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und die Gleichung

$$g(x) = h(x)$$

habe zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechung, dass dann auch die Gleichung

$$g'(x) = h'(x)$$

eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

Abgabe: **Falls sie auf den Blättern 1 bis 13 weniger als 45% der Punkte erreicht haben, bis Donnerstag, den 30. März** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.