Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+6=10P)

a) Beweisen Sie für reelle Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ die Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Wann gilt Gleichheit? (*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $a + \frac{1}{a} \geq 2$ für $a > 0$)

b) Es seien $b_1, b_2, ..., b_n > 0$ mit $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n = 1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach n die Ungleichung

$$\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \geq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 2 (2+4+4=10P)

a) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$$

eine natürliche Zahl.

b) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\binom{2n}{n} = \max\left\{\binom{2n}{k} \,:\, k \in \{0, 1, ..., 2n\}\right\}.$$

c) Es seien $n \geq m \geq k$ natürliche Zahlen. Beweisen Sie die Identität

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung als Anzahl gewisser Teilmengen von $\{1, 2, ..., n\}$ interpretieren.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (6+4=10P)

a) Es sei A eine Menge mit m Elementen und B eine Menge mit n Elementen. Wie viele *injektive* Abbildungen $A \to B$ gibt es? Wie viele *bijektive* Abbildungen $A \to B$ gibt es?

b) Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt.

(*Hinweis:* Nehmen Sie an, es gäbe eine solche Surjektion und führen Sie diese Annahme zum Widerspruch, indem Sie die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \notin \varphi(n)\}$ betrachten)

Aufgabe 4 (4+3+3=10P)

a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= \frac{1}{2}\big(x + y + |x - y|\big), \\ \min\{x, y\} &= \frac{1}{2}\big(x + y - |x - y|\big). \end{aligned}$$

b) Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\big|x + y + z + |x - y - z|\big|^5 + \big|x + y + z - |x - y - z|\big|^5 = 32\big(|x|^5 + |y + z|^5\big)$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Ungleichung

$$\Big|2 - \big||x + 3| + 1\big|\Big| \leq 1$$

erfüllen.

Abgabe: **Ausnahmsweise bis Donnerstag, den 17. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.