Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (5P)

Beweisen Sie, dass das Konvergenzkriterium von Cauchy das Intervallschachetlungsprinzip impliziert.

Aufgabe 2 (10P)

Es seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}(b_n c_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} c_n\right).$$

Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so gilt Gleichheit.

Aufgabe 3 (2+6+2+5=15P)

a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

b) Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $m > n$ gilt:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}\left(\prod_{l=1}^{k-1}\left(1-\frac{l}{m}\right)\right)\right] \qquad (*)$$

(beachten Sie: $\prod_{l=a}^{b} \ldots := 1$ falls $a > b$). Folgern Sie daraus

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(*Hinweis:* Gehen Sie in $(*)$ zum Grenzwert $m \to \infty$ über)

c) Folgern Sie aus a) und b) die Identität

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Bitte wenden!

d) Zeigen Sie die Fehlerabschätzung

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!} \text{ für } n \geq 1.$$

Wie viele Summanden braucht man höchstens um die Eulersche Zahl mit einem Fehler, der kleiner als 10^{-5} ist zu berechnen?

Aufgabe 4 (6+4=10P)

a) Zeigen Sie das *Kondensationskriterium*: Es sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n g_{2^n}$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

für alle $s \in (1, \infty)$ konvergiert.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben ist *freiwillig.* Sie können sie jedoch verwenden, um Ihr Punktkonto aufzubessern

Aufgabe 5* (5+5=10P)

a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n := \left(\sqrt{n + \sqrt{\pi n}} - \sqrt{n}\right) \mathrm{Im}\big(i(n+1) + n i^n\big)$$

b) Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Zahlenebene:

$$M = \big\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq 1 \big\}.$$

Aufgabe 6* (5+5=10P) Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}\big(\{1, 2, ..., n\}\big)$.

b) $[0, 1] = \bigcap_{r\in(1,\infty)} \big(-1/r, r\big)$.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und alles Gute im neuen Jahr!!!

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 04. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.