Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (7+3=10P)

a) Beweisen Sie, dass die Potenzreihe

$$h_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergiert mit Reihenwert

$$h_n(z) = (1+z)^{-n}.$$

(*Hinweis:* Vollständige Induktion nach n)

b) Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $m > 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m^k} = \frac{m}{(m-1)^2}.$$

Aufgabe 2 (6×2=12P)

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{17 + 100^{n-12} - 7n}{23^{2n+1} + 1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+2)}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{2n^4 + 34n^2 + \pi}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Aufgabe 3 (10P)

Es seien $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) und $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie: Für jedes $r \in (0, R)$ gibt es eine Konstante $L = L(r) > 0$ sodass

$$\big|f(z) - f(w)\big| \leq L|z - w|$$

für alle $z, w \in \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < r\}$.

(*Hinweis:* Verwenden Sie die Formel $z^n - w^n = (z-w) \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} w^k z^{n-1-k}$. Für einen Beweis dieser Formel gibt es 3 Bonuspunkte!)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4×2=8P) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{2n} (z-2)^n$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n!} z^n$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) (z-4)^n$.

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n^3 - 3n^4) z^n$.

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 11. Januar** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.