Analysis I
WS 2016/17

M. Fuchs

Inhalt

§0

Vorwort, Einführung in die mathematische Sprache

Grundaufgabe der Analysis: Untersuchung von Funktionen einer oder mehrerer reeler (komplexer) Veränderlicher

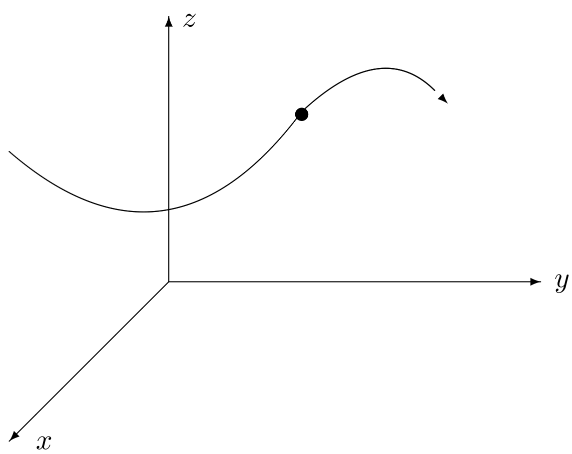
Solche Funktionen treten überall da auf, wo man

> "gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen **kontinuierlich** varierenden Zustandsgrößen"

durch ein mathematisches Modell beschreibt.

Beispiele:

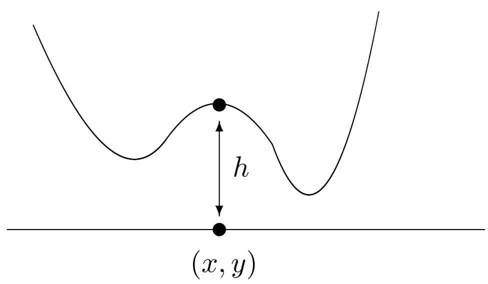
1) Bewegung eines Teilchens im Kraftfeld
   Funktion:
   Zeit $t \mapsto$ Ortskoordinaten (x, y, z)



Probleme:

i) Wie lautet die Gleichung der Bahnkurve bei Kenntnis der Felder?
ii) Wie löst man die Gleichung?

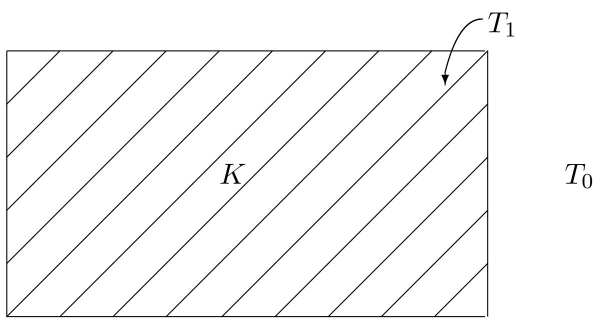
2) Höhenfunktion eines Gebirges:
Hier ordnet man jedem Punkt (x, y) aus der Koordinatenebene die Höhe h über (x, y) zu.



3) elektrische und magnetische Felder
hängen i.a. von **4** Variablen ab, der Zeit t und 3 Ortskoorinaten (x, y, z).
Die Zusammenhänge zwischen den Feldgrößen werden in der Physik durch die **Maxwell'schen Gleichungen** beschrieben.

Problem: Wie löst man diese Gleichungen?

4) Abkühlen eines Körpers
Ein homogener Körper K hat zur Zeit $t = 0$ die Temperatur $T_1 \geq$ ("größer") als die Außentemperatur T_0.



Problem: Wie entwickelt sich T als Funktion der Zeit t?

Lösung: untersuche die Änderungsrate $\frac{1}{\Delta t}(T(t+\Delta t)) - T(t)) = \frac{\Delta T}{\Delta t}$ für kleine Zeitabstände Δt ($\rightarrow$ phys. Meßvorgang)

$\Longrightarrow$ Gleichung für die infinitesimale Änderungsrate ($\Delta t \to 0$)

$$\frac{dT}{dt} = -c \cdot T, \quad c > 0 \text{ Materialkonstante}$$

"Die momentane Änderungsrate $\frac{dT}{dt}$ von T ist zu T proportional." Dies ist eine Bestimmungsgleichung für T, man erhält daraus als Temperaturgesetz

$$T_1(t) = (T_1 - T_\circ)\, e^{-ct} + T_\circ$$

Methoden der Analysis:

> Im Gegensatz zur Algebra, die sich alleine aus der Abstraktion der Rechenregeln für Zahlen aufbaut, benutzt die Analysis lokale und infinitesimale Konzepte.

lokale / infinitesimale Konzepte: Was fällt darunter?

1) **Bildung von Grenzwerten**, d.h. Übergang von

$$\Delta T/\Delta t \qquad \text{zur momentanen Änderung } \frac{dT}{dt}$$

2) Wann sind Punkte dicht zusammen?
Was bedeutet es, dass Funktionen wenig voneinander abweichen?

Oberbegriff: Infinitesimalrechnung

$\swarrow \qquad \searrow$

a) **Differntial-** und b.) **Integralrechnung**

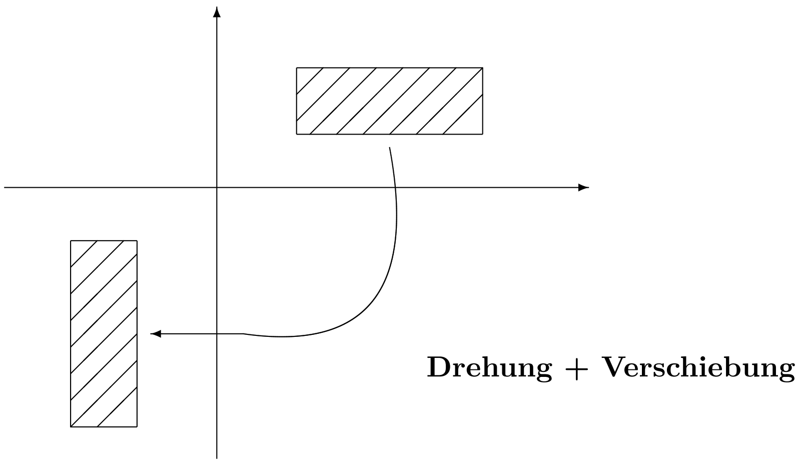
ad a) Änderungsgeschwindigkeit oder Steigung von Funktionen
ad b) Berechnung von Flächeninhalten, Volumina, etc.

Es geht bei uns nicht nur um Rechenverfahren, vielmehr müssen wir die Gegenstände, mit denen wir arbeiten, erst definieren:

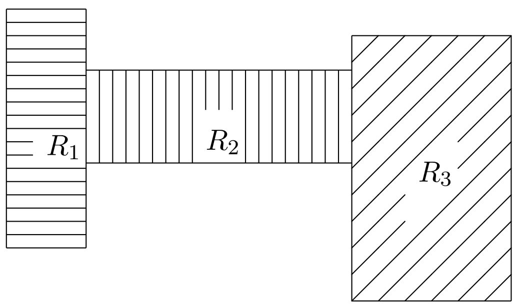
> Vor der Berechnung des Flächeninhalts einer geometrischen Figur müssen wir sagen, was Flächeninhalt überhaupt ist.

Dabei lassen wir uns von der Anschauung leiten:

1^{te} Forderung: Ein Rechteck in der Ebene mit Kantenlänge a und b hat den Flächeninhalt $a \cdot b$ unabhängig davon, wie es relativ zu einem Koordinatensystem liegt.

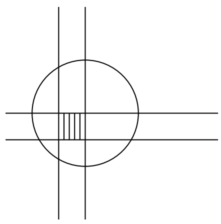


2^{te} Forderung: Eine Figur, die sich aus Rechtecken aufbauen läßt, hat als Flächeninhalt die Summe der Inhalte der einzelnen Rechtecke.



Damit ist nun noch nicht gesagt, wie der Flächeninhalt eines Kreises definiert ist.

Idee:



Man überzieht die Ebene mit einem Netz aus Quadraten der Kantenlänge ε und wählt nun die Quadrate, die ganz im Kreis enthalten sind.

$\Longrightarrow$ Der Flächeninhalt A dieser Quadrate hängt von ε ab, also $A = A(\varepsilon)$, und ist eine Näherung für die Kreisfläche.

Man beweist:

SATZ: $\boxed{A(\varepsilon) \quad \text{hat einen Grenzwert} \quad \alpha \quad \text{bei} \quad \varepsilon \searrow 0.}$

Dadurch wird folgende Definition sinnvoll.

Definition: $\boxed{\text{Flächeninhalt des Kreises} = \alpha.}$

Vor dem Studium solch relativ komplizierter Fragestellungen, müssen wir uns ausführlich mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beschäftigen, denn diese bilden das Grundkonzept für alle weiteren Untersuchungen.
Auf Fragen wie "gibt es reelle Zahlen?"

"was sind reelle Zahlen?"

können wir nicht eingehen.

Unser Standpunkt: $\boxed{\text{Vorgabe von Axiomen} \quad + \quad \text{Schlußregeln der naiven Logik}}$

D.h.: wir nehmen an, dass es eine Menge $\mathbb{R}$ gibt, auf der die Axiome für Addition, Multiplikation und Ordnung gelten und die in einem zu präzisierenden Sinn **lückenlos** ist.

Aus diesen Grundannahmen leiten wir dann alle weiteren Aussagen ab.

Axiome: unbewiesene Grundsätze (intuitiv richtige Grundaussagen)

Prinzip: Man versucht, die Anzahl der Axiome möglichst gering zu halten;
die math. Grundlagenforschung untersucht, wie man die Objekte der Mathematik aus einem minimalen Satz von Axiomen der Mengenlehre ableiten kann.

Merke:

1)	Axiome kann man nicht beweisen, d.h. in der Mathematik ist nicht alles beweisbar.
2)	Die Exaktheit der Mathematik besteht nicht darin, ohne unbewiesene Hypothesen auszukommen, sondern darin, dass sie genau sagt, wie diese Hypothesen lauten, und sich an gewisse logische Schlußregeln hält.

Neben Axiomen braucht man also

Schlußregeln (math. Logik)

und eine

Sprache,

mit deren Hilfe man Aussagen formuliert und beweist.

Schlußregeln: Gesetze der math. Logik, nach denen sich logisches Schließen vollzieht, "Spielregeln", wie man kombiniert.
Wir benutzen hier den naiven Standpunkt. Gerade am Anfang erscheint es reizvoll, möglichst formal vorzugehen, d.h. nur Symbolketten, Implikationszeichen $\Longrightarrow$ und Quantoren $\forall, \exists$ unter Vermeidung jedes geschriebenen Worts zu benutzen, d.h. Mathematik wie eine Art Programmiersprache zu gestalten.

Sprache: Objekte der Mathematik wie Mengen, Funktionen ...... werden nicht durch Wörter bezeichnet, sondern durch Symbole oder Terme. Das sind

$$\begin{cases} \text{Buchstabenzeichen } a, b, \ldots, \alpha, \beta \ldots, \\ \text{Zahlzeichen,} \\ \text{Sonderzeichen wie } =,\ >,\ \int_a^b \end{cases}$$

und Kombinationen daraus.

Dies ist oft aber eher verschleiernd als nützlich:

$x \in \mathbb{P} \ :\Longleftrightarrow\ x \in \mathbb{N} \ \wedge\ x \ \geq\ 2 \ \wedge\ \forall z \in \mathbb{N} \ :\ (x/z \in \mathbb{N} \ \Longrightarrow\ z = 1 \vee z = x)$
ist die formale Definition der Primzahlmenge $\mathbb{P}$ als Teilmenge von $\mathbb{N}$ unter Verwendung von

$:\Longleftrightarrow$ definitionsgemäß äquivalent,
$\wedge$ logisches und, $\forall$ "für alle", $\vee$ logisches oder,
$\in$ Element von . . . .

Es dauert eine Weile, bis man die Zeichenkette hinter $:\Longleftrightarrow$ entschlüsselt hat und erkennt, dass eine natürliche Zahl genau dann Primzahl heißen soll, wenn sie ≥ 2 ist und nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist.

Eine gesunde Mischung aus Formalismus und (Umgangs-) sprache ist zweckmäßiger.

Aus den Axiomen gewinnt man in der Mathematik **Aussagen** mit Hilfe der Schlußregeln. Solche Aussagen bezeichnet man als **Sätze**. Sätze bedürfen eines **Beweises**. Damit meint man, dass sich die Behauptung durch logisches Schließen aus den Grundannahmen ableiten läßt ("als wahr herausstellt").

Man muß trennen zwischen **Sätzen** und **Definitionen**: Letztere dienen dazu, neue Symbole oder Wörter zur Bezeichnung von Objekten einzuführen.

Beispiele:

1) x heißt Primzahl $\quad :\Longleftrightarrow x$ ganz, ≥ 2, nur durch 1 und x teilbar

2) A eine Menge; $\quad \mathcal{P}(A) := \{B : \; B \text{ ist Teilmenge von } A\}$
(:= bedeutet definitionsgemäß gleich; hier kürzt man die Menge rechts mit dem Symbol $\mathcal{P}(A)$ ab)

3) kommt ein komplizierter Term wie etwa $\cos(e^{x^2+y^2})$ häufig vor, so kürzt man ab, d.h. man definiert

$$t := \cos(e^{x^2+y^2}),$$

und schreibt nachfolgend t.

Merke: rechts von $:\Longleftrightarrow$ oder $:=$ dürfen nur bekannte Größen stehen!

Die folgende Aussage ist dagegen ein

SATZ: $\boxed{\text{Es gibt unendlich viele Primzahlen.}}$

Es handelt sich um eine wahre Aussage, was allerdings nicht sofort evident ist und daher aus den Axiomen der natürlichen Zahlen mit der Definition von Primzahl und allgemeinen Schlußregeln abgeleitet werden muß.

> Das bisher Gesagte mag den Eindruck erwecken, dass Mathematik aus einer stumpfsinnigen Aneinanderreihung von Aussagen besteht, wobei jede durch die vorstehende impliziert wird. Einfach irgendwelche Folgerungen aus den Axiomen zu ziehen, ist tatsächlich stumpfsinnig, z.B. kann man einen Computer programmieren, schrittweise den Primzahltest zu vollziehen. Dabei wird jedoch nie eine bemerkenswerte Aussage vom Typ "Es gibt unendlich viele Primzahlen" herauskommen.

Natürlich kann man sich darüber streiten, welche Sätze "gut", "wichtig" oder "schön" sind. Diese Fragen stellen sich aber erst dann, wenn man sein Handwerkszeug gelernt hat und sich mit analytischen Problemen innermathematischer Forschung oder den Anwendungen beschäftigt: Als Praktiker wird man Sätze als sinnvoll betrachten, mit deren Hilfe sich Gleichungen aus Physik und Technik lösen lassen, und sich weniger dafür interessieren, ob es Funktionen gibt, die zwar überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind. Im Grundstudium der Analysis geht es nun vordringlich darum, das Grundwissen zu erlernen und eine gewisse logische Reihenfolge einzuhalten, denn für tiefe Sätze braucht man nunmal eine ganze Menge Hilfsmittel und auch mathematisches Geschick. Es ist zum Beispiel nicht möglich, die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik zu lösen bzw. zu verstehen, wenn man nicht weiß, was die Ableitung einer Funktion ist. Es bedarf also Ihrerseits einer gewissen Geduld und auch der Bereitschaft, Definitionen zu lernen, Beweise zu üben, also überhaupt aktiv Mathematik zu machen, bis wir zu interessanten Sätzen kommen und Anwendungen diskutieren.