§11

Differenzierbarkeit von Funktionen

ist ein fundamentales Konzept zur

a) Beschreibung von Naturvorgängen: "Änderungsrate", "Momentangeschwindigkeit", "Beschleunigung"

$\rightsquigarrow$ Differentialgleichungen als "Bewegungsgleichungen"

b) Untersuchung von globalen Eigenschaften: die Ableitung zeigt, ob eine Funktion monoton, konvex .... ist und wo Extremwerte liegen.

Nachfolgend: nur Funktionen mit reellem Definitionsbereich D

$D \subset \mathbb{C} \quad \rightsquigarrow$ Vorlesung "Funktionentheorie"

Definition 11.1 : *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_\circ \in I$ ein innerer Punkt und $f : I \to \mathbb{C}$*

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ differenzierbar in } x_\circ \in I : \iff \\ \lim\limits_{x \to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} \text{ existiert in } \mathbb{C} \end{array}}$$

Schreibweisen: $f'(x_\circ),\ \frac{df}{dx}(x_\circ),\ f^{(1)}(x_\circ),\ \frac{df}{dx}|_{x_\circ} \ldots$

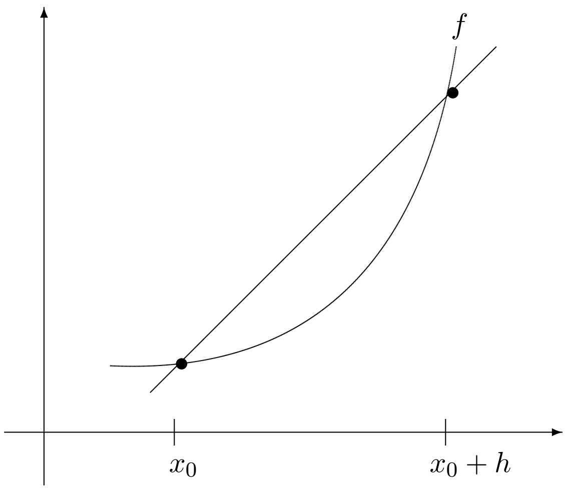
Bemerkungen:

1) $\Big(f(x) - f(x_\circ)\Big)\Big/(x - x_\circ)$ heißt <u>Differenzenquotient bei $x_\circ$</u>.

2) Ersetzt man x durch $x_\circ + h$, so sieht man:

$$f'(x_\circ) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x_\circ + h) - f(x_\circ)\Big) \quad \text{(falls existent)}$$

$\frac{1}{h}\Big(f(x_\circ{+}h){-}f(x_\circ)\Big) \;=\;$ Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_\circ, f(x_\circ))$, $(x_\circ{+}h,\ f(x_\circ{+}h))$ auf Graph (f).



Beispiele:

1) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{x-x_\circ}\,(x^n - x_\circ^n) \;=\; x^{n-1} + x^{n-2}x_\circ + \ldots + x \cdot x_\circ^{n-2} + x_\circ^{n-1}$$

$$\xrightarrow[x\to x_\circ]{} \; n \cdot x_\circ^{n-1}$$

Also: $\boxed{\frac{dx^n}{dx}\,(x_\circ) \;=\; n \cdot x_\circ^{n-1}}$

2) $f(x) \;=\; \ln x,\ x > 0$

nach Satz 8.4: $\quad 1 - \frac{1}{h} \;\le\; \ln h \;\le\; h - 1 \quad \forall\, h > 0$

also: $\frac{1}{x-x_\circ}\Big(\ln x - \ln x_\circ\Big) = \frac{1}{x-x_\circ}\ \ln\frac{x}{x_\circ} \underset{\text{falls } x>x_\circ}{\Longrightarrow}$

$$\frac{1}{x-x_\circ}\,(1-1/(x/x_\circ)) \le \frac{1}{x-x_\circ}\,(\ln x-\ln x_\circ) \le \frac{1}{x-x_\circ}\,(\tfrac{x}{x_\circ}-1) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{x-x_\circ}\,\frac{x-x_\circ}{x} \le \frac{1}{x-x_\circ}\,(\ln x-\ln x_\circ) \le \frac{1}{x_\circ}$$

es folgt: $\lim\limits_{x\downarrow x_\circ} \frac{1}{x-x_\circ}\,(\ln x-\ln x_\circ) = \frac{1}{x_\circ}$

und genauso: $\lim\limits_{x\uparrow x_\circ} \frac{1}{x-x_\circ}\,(\ln x-\ln x_\circ) = \frac{1}{x_\circ}$

zusammen: $\boxed{\frac{d}{dx}\ln(x_\circ) = \frac{1}{x_\circ}} \qquad \forall\, x_\circ > 0$

3) $f(x) = e^{c\cdot x},\ c\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R}$

in Satz 8.6 wurde gezeigt: $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\,(e^y-1) = 1$

sei $a\in\mathbb{R}$ beliebig $\Longrightarrow$ Diff.quot. von f bei a $=$

$$\Big(f(a+h)-f(a)\Big)\Big/h = \Big(e^{c\cdot a+c\cdot h}-e^{c\cdot a}\Big)\Big/h =$$

$$e^{c\cdot a}\cdot\Big(e^{c\cdot h}-1\Big)\Big/h = c\cdot e^{c\cdot a}\,\frac{e^{c\cdot h}-1}{c\cdot h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} c\cdot e^{c\cdot a}$$

Also: $\boxed{\frac{d}{dx}\,e^{c\cdot x} = c\cdot e^{cx}}$

<u>Spezialfälle:</u> i) $c=1 \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\,e^x = e^x}$

ii) $c = i \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\ \mathrm{cis}\ (x) = i\ \mathrm{cis}\ x.}$

Da mit $f = \mathrm{Re}\ f + i\ \ \mathrm{Im}\ f$ auch $\mathrm{Re}\ f$, $\mathrm{Im}\ f$ diff'bar sind, folgt:

$$\boxed{\begin{aligned}(\cos)' &= -\sin\\ (\sin)' &= \ \ \cos\end{aligned}}$$

4) $x\mapsto\sqrt{x}$ ist diff'bar an jeder Stelle $a>0$, denn

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

In 0 ist $x \mapsto \sqrt{x}$ nicht diff'bar, da für $x > 0$: $\frac{\sqrt{x}}{x} \; = \; \frac{1}{\sqrt{x}} \; \underset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} \; \infty$

(Bem.: 0 ist zwar kein innerer Punkt des Definitionsbereiches, aber dann definiert man $f'(x_\circ)$ eben als einseitigen Limes, falls existent $\rightsquigarrow$ vgl. Def. 11.2)

5) $f(x) := |x|,\ x \in \mathbb{R}$, ist diff'bar an jeder Stelle $x \neq 0$ mit

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

In 0 existiert keine Ableitung: $\frac{|x|}{x}$ divergiert bei $x \to 0$.

Satz 11.1 *:* $\boxed{f \ \text{ diff'bar in } \ x_\circ \implies f \ \text{ stetig in } \ x_\circ}$

Umkehrung falsch! $\longrightarrow$ Bsp. 5) in $x_\circ = 0$

Beweis: Sei $a := f'(x_\circ) \implies \exists\, \delta > 0$ mit

$$\left| \Big(f(x) - f(x_\circ) \Big) \frac{1}{x - x_\circ} - a \right| \le 1 \quad \forall\, x \in (x_\circ - \delta,\ x_\circ + \delta) \quad \implies$$

$$\Big| f(x) - f(x_\circ) \Big| \le \Big(1 + |a| \Big)\ |x - x_\circ| \quad -''-,$$

und da die rechte Seite verschwindet bei $x \to x_\circ$, folgt

$$\lim_{x \to x_\circ} f(x) \; = \; f(x_\circ),$$

also Stetigkeit von f bei $x_\circ$. $\square$

Differenzierbarkeit von f bei $x_\circ$ bedeutet, dass f lokal bei $x_\circ$ "gut" linear approximierbar ist. Wir wollen das präzisieren:

Satz 11.2 *:*

> *$f : I \to \mathbb{C}$ ist in $x_\circ$ differenzierbar* $\iff$
>
> *es gibt eine affin lineare Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass mit $R(x) := \; f(x) - F(x)$ gilt :*
>
> $$\lim_{x \to x_\circ} \tfrac{1}{x - x_\circ} \; R(x) \; = \; 0, \;\; R(x_\circ) \; = \; 0$$

In diesem Fall gilt:

$$F(x) \;=\; f'(x_\circ) \cdot (x - x_\circ) + f(x_\circ)$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" klar (definiere F wie oben und benutze die Def.)

"$\Longleftarrow$": Wir können schreiben $F(x) \;=\; a(x - x_\circ) + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.

Aus $R(x_\circ) = 0$ folgt $f(x_\circ) \;=\; F(x_\circ) \;=\; b$, also

$$0 \;=\; \lim_{x \to x_\circ} \tfrac{1}{x - x_\circ} \; R(x) = \lim_{x \to x_\circ} \left\{ \tfrac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - a \right\} \quad \Longrightarrow$$

$$a \;=\; \lim_{x \to x_\circ} \tfrac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ},$$

d.h. f ist in $x_\circ$ diff'bar mit $f'(x_\circ) \;=\; a$. $\square$

Bem.: die affin lineare Approximation F ist - wenn existent - eindeutig und sogar optimal in dem Sinn, dass der Rest R schneller gegen 0 geht als x.

Definition 11.2 *:* *einseitige Ableitungen*

Sei $[a, b] \subset$ *Def* (f). *Man setzt*

$$f'_+(a) \;:=\; \lim_{h \downarrow 0} \tfrac{1}{h} \Big(f(a + h) - f(a) \Big) \quad \textit{rechtsseitige Ableitung,}$$

$$f'_-(a) \;:=\; \lim_{h \uparrow 0} \tfrac{1}{h} \Big(f(b + h) - f(b) \Big) \quad \textit{linksseitige Ableitung,}$$

vorausgesetzt die Grenzwerte existieren. Entsprechend kann man für innere Punkte $x_\circ \in (a,b)$ *einseitige Ableitungen* $f'_\pm(x_\circ)$ *definieren.*

Bem.: $x_\circ$ sei ein innerer Punkt; f ist in $x_\circ$ diff'bar

$\iff$ $f'_\pm(x_\circ)$ existieren und sind gleich.

In diesem Fall ist $f'(x_\circ) = f'_\pm(x_\circ)$.

Beispiel: Sei $f(x) := |x|$ $\qquad f'_+(0) = \lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{h}{h} = 1$ und $f'_-(0) = \lim\limits_{h \uparrow 0} \frac{-h}{h} = -1.$

Satz 11.3 : *Ableitungsregeln*

Seien f, g *differenzierbar an der Stelle* a*. Dann sind* $f \pm g$, $f \cdot g$ *und* $1/f$ *(falls* $f(a) \neq 0$*) ebenfalls in* a *differenzierbar, und es gilt:*

$$(f \pm g)'\,(a) = f'(a) \pm g'\,(a), \quad (f \cdot g)'\,(a) = f'(a)\,g(a) + f(a) \cdot g'\,(a),$$

$$(1/f)'\,(a) = -f'\,(a)/f^2(a).$$

Beweis: $\frac{1}{h}\left\{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)\right\} =$

$$\frac{1}{h}\left\{f(a+h) - f(a)\right\} \cdot g(a+h) + \frac{1}{h}\left\{g(a-h) - g(a)\right\} f(a)$$

$$\underset{h \to 0}{\longrightarrow} \quad f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$$

und $\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right\} = \frac{1}{h} \cdot \left\{f(a) - f(a+h)\right\}\Big/ f(a) \cdot f(a+h)$

$$\underset{h \to 0}{\longrightarrow} \quad -f'(a)\Big/ f^2(a).$$

$\square$

Beispiele:

1) f, g diff'bar in a, $g(a) \neq 0 \implies$ (beachte: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{1}{g^2(a)} \Big(f'(a)\, g(a) - f(a) \cdot g'(a)\Big)$$

2) Polynome $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind überall diff'bar, $P'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, ebenso rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

3)
$$(\tan)'(x) = (\tfrac{\sin}{\cos})'(x) = \tfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$
$$(\cot)'(x) = (1/\tan)'(x) = -\tfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

4)
$$\cosh' = \sinh, \qquad \sinh' = \cosh,$$
$$\tanh' = 1 - \tanh^2, \quad \coth' = \coth^2.$$

Zum Beweis der sog. "Kettenregel" benötigen wir noch eine andere Beschreibung der Differenzierbarkeit.

Satz 11.4 : *f diff'bar in $x_\circ$ $\iff$ es gibt eine in $x_\circ$ stetige Funktion r mit*
$$f(x) = f(x_\circ) + r(x) \cdot (x - x_\circ).$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" setze

$$r(x) := \begin{cases} f'(x_\circ), & x = x_\circ \\ \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}, & x \neq x_\circ \end{cases}$$

"$\Longleftarrow$" es gilt $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = r(x)$ für $x \neq x_\circ$, und Stetigkeit von r in $x_\circ$ bedeutet Existenz von $\lim\limits_{x \to x_\circ} r(x) =: a$. Dann ist f natürlich diff'bar in $x_\circ$ mit $f'(x_\circ) = a$. $\square$

Satz 11.5 : *(Kettenregel)*

Seien $f : I \to \mathbb{R}$ *und* $g : J \to \mathbb{R}$. *Es gelte:*

1) $x_\circ \in I,\ f(x_\circ) \in J$

2) $g \circ f$ *sei auf einer Umgebung von* $x_\circ$ *erklärt*

3) $f'(x_\circ)$ *und* $g'(f(x_\circ))$ *existieren.*

Dann ist $g \circ f$ *in* $x_\circ$ *diff'bar mit* $(g \circ f)'\,(x_\circ) = g'\,(f(x_\circ))\, f'\,(x_\circ)$.

Beweis: Es gibt einen einfachen Beweis im Fall

$f'(x_\circ) \neq 0 \implies f(x_\circ + h) \neq f(x_\circ)$ für alle $h \neq 0,\ |h|$ genügend klein

Also: $$\frac{1}{h}\left\{g\Big(f(x_\circ{+}h)\Big) - g\Big(f(x_\circ)\Big)\right\} = \underbrace{\frac{g\Big(f(x_\circ + h)\Big) - g\Big(f(x_\circ)\Big)}{f\,(x_\circ + h) - f\,(x_\circ)}}_{\overrightarrow{h\to 0}\ g'\big(f\,(x_\circ)\big)} \cdot \underbrace{\frac{f\,(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}}_{\overrightarrow{h\to 0}\ f'\,(x_\circ)}$$

Für $f'\,(x_\circ) = 0$ kann man so nicht argumentieren, in diesem Fall ist $f(x_\circ + h) = f(x_\circ)$ in beliebiger Nähe von $x_\circ$ möglich.

Wir benutzen Satz 11.4: Schreibe

$$g(y) = g\Big(f(x_\circ)\Big) + R(y) \cdot \Big(y - f(x_\circ)\Big), \quad R \text{ stetig bei } f(x_\circ)$$

$$f(x) = f\,(x_\circ) + r(x)\,(x - x_\circ), \qquad r \text{ stetig bei } x_\circ$$

$$\implies g\Big(f(x)\Big) = g\Big(f(x_\circ)\Big) + R\Big(f(x)\Big) \cdot \Big(f(x) - f(x_\circ)\Big)$$

$$= g\Big(f(x_\circ)\Big) + \underbrace{R\Big(f(x)\Big)\, r(x)}_{=:\tilde{R}(x)}\,(x - x_\circ)$$

$\tilde{R}$ ist stetig bei $x_\circ$, Satz 11.4 liefert Differenzierbarkeit von $g \circ f$ bei $x_\circ$.

Offenbar ist $(g \circ f)'\,(x_\circ) = \tilde{R}\,(x_\circ) = R\Big(f(x_\circ)\Big)\, r\,(x_\circ) = g'\Big(f(x_\circ)\Big)\, f'(x_\circ)$,

denn trivialerweise ist $R\Big(f(x_\circ)\Big) = g'\Big(f(x_\circ)\Big),\ r\,(x_\circ) = f'\,(x_\circ)$. $\square$

Beispiele: (zur Kettenregel):

1) $a \in \mathbb{R}: \quad f : (0, \infty) \ni x \mapsto x^a$

$$f(x) = (e^{\ln x})^a = e^{a \cdot \ln x} = \Psi(\varphi(x)) \quad \text{mit}$$

$$\Psi(y) = e^{ay}, \varphi(x) = \ln x \quad \text{jeweils diff'bar} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dx} x^a = \Psi'(\varphi(x))\varphi'(x) = a \cdot e^{a \cdot \ln x} \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{1}{x} x^a \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^a = a \cdot x^{a-1}}$$

2) f diff'bar in $x_\circ \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} e^{f(x)}\Big|_{x_\circ} = f'(x_\circ) \cdot e^{f(x)}.$

□

Hat $f : I \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion f^{-1}, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$,

also (falls f^{-1} diff'bar in $y_\circ$) : $\quad 1 = (f \circ f^{-1})'(y_\circ) = f'(f^{-1}(y_\circ))\,(f^{-1})'(y_\circ)$,

so dass $\quad (f^{-1})'(y_\circ) = 1 \Big/ f'(x_\circ), x_\circ = f^{-1}(y_\circ)$. Dies motiviert

Satz 11.6 : *(Diff'barkeit der Umkehrfunktion)*

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv, diff'bar in a mit $f'(a) \neq 0$. Ist $g := f^{-1}$ stetig in $b := f(a)$, so auch diff'bar mit $g'(b) = 1 \Big/ f'(a)$.

Bemerkungen: 1) f stetig auf I und streng monoton $\underset{\text{Satz 9.4}}{\Longrightarrow}$ g stetig
(so dass man in diesem Fall die Stetigkeit von g in b schon hat).
2) $f'(a) \neq 0 \not\Longrightarrow f$ injektiv nahe bei a

Gegenbeispiel: $f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ x + x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x}, x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0) = 1$

Man muß schon etwas mehr über f' wissen, um lokale Injektivität zu schließen.

Beweis: Satz 11.4 $\Longrightarrow$ $f(x) = f(a) + r(x)\cdot(x-a)$ mit

r stetig in a, $r(a) = f'(a)$

ersetze $x = g(y)$ $\Longrightarrow$ $y = f(a) + r\Big(g(y)\Big)\Big(g(y) - a\Big)$, $y \in D(g) = f(I)$

$r \circ f$ ist stetig in b nach Vor. an g, $(r \circ g)(b) = f'(a) \neq 0$

$\Longrightarrow$ $1\Big/r \circ g$ ist stetig in b, also:

$$g(y) = a + \frac{1}{r(g(y))}\Big(y - f(a)\Big) = g(b) + \frac{1}{r(g(y))}\,(y-b)$$

Satz 11.4 $\Longrightarrow g$ diff'bar in b, $g'(b) = \frac{1}{r(g(b))} = \frac{1}{f'(a)}$. $\square$

Beispiel: $\frac{d}{dx}\arctan x \;=\; ?$

tan : $\Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to \mathbb{R}$ streng wachsend, an jeder Stelle x diff'bar mit
$\Big(\tan\Big)'x \;=\; 1 + \Big(\tan x\Big)^2 \;>\; 0$

Satz 9.4 $\Longrightarrow$ arctan stetig; also sind alle Voraussetzungen erfüllt

$\Big(\arctan\Big)'(x) \;=\; \frac{1}{\tan'(y)},\; y \;=\; \arctan x \quad \overset{\tan'=1+\tan^2}{\Longrightarrow}$

$$\boxed{\Big(\arctan\Big)'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2},\; x \in \mathbb{R}}$$

Übung: Berechnung der Ableitung von $\arcsin, \arccos, \operatorname{ar\,sinh}\ldots$

Definition 11.3 *:*

1) $f : I \to \mathbb{C}$ *heißt* *<u>differenzierbar auf I</u>* $:\Longleftrightarrow$
f ist an jeder Stelle $x \in I$ diff'bar.
Dann ist die *<u>Ableitungsfunktion</u>* $f' : I \to \mathbb{C}$ *definiert*

$$\boxed{f \text{ stetig differenzierbar auf } I \;:\Longleftrightarrow f' : I \to \mathbb{R} \text{ stetig}}$$

2) $f : I \to \mathbb{C}$ *sei diff'bar auf I. Ist f' dann in $x_\circ$ diff'bar, so heißt* $(f')'(x_\circ)$ *die* *<u>2^{te} Ableitung von f in $x_\circ$.</u>* *Schreibweise:* $f''(x_\circ), \frac{d^2 f}{dx^2}|_{x_\circ}, \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$

3) rekursiv: $f^{(0)} : I \to \mathbb{R},\ f^{(0)} := f$
$f^{(n)} :=$ *Ableitungsfunktion von* $f^{(n-1)},\ n \geq 1$

(wenn existent!), $f^{(n)} = n^{te}$ *Ableitung*

$$\boxed{f \text{ beliebig oft differenzierbar} \iff f^{(n)} \text{ existiert für alle } n}$$

4) $f : I \to \mathbb{R}$ *<u>n-mal stetig diff'bar auf I</u>:* $\iff$

$f', \ldots, f^{(n)}$ *existieren auf I und sind <u>stetig</u>.*

Bezeichnungen:

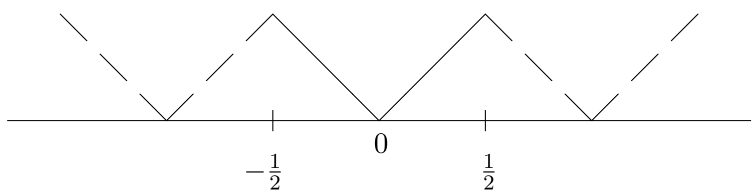
$$\begin{aligned} C^0(I) &= \mathbb{C}-\ \text{V.R. der stetigen } f : I \to \mathbb{C} \\ C^n(I) &= \mathbb{C}-\ \text{V.R. der } n-\text{mal stetig diff'baren } f : I \to \mathbb{C} \\ C^\infty(I) &= \mathbb{C}-\ \text{V.R. der beliebig oft diff'baren } f : I \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

offenbar: $C^\infty(I) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C^n(I).$

Beispiele:

1) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Es gibt Funktionen } f : I \to \mathbb{R}, \text{ die zwar} \\ \text{stetig sind, aber \underline{nirgendwo} differenziert werden können}\end{array}}$

<u>Konstruktion:</u> $g(x) =$ periodische Fortsetzung von $|x|$ für $|x| \leq 1/2$



g hat Periode 1: $g\,(x+1) = g\,(x)$

$g_n(x) := 4^{-n}\, g(4^n x),\ x \in \mathbb{R},$ hat Periode 4^{-n}

(die g_n bekommen immer mehr Zacken mit Höhe $\frac{1}{2}\ 4^{-n}$).

Setze: $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x),\ x \in \mathbb{R}$

konvergent für jedes x, da $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{2}\ 4^{-n}$.

Zeige (Übung): $\underline{f \text{ ist stetig, aber nirgends diff'bar.}}$

2) aus 1) folgt: $C^1(I) \subsetneqq C^0(I)$

einfaches Bspl.: $f_1(x) = |x| \in C^0(I),\ \notin C^1(I)$

allgemein: sei $\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases}$

d.h. $|t| = (\operatorname{sign} t) \cdot t,\ t \in \mathbb{R}$.

Setze $f_n(x) := \frac{1}{n!}(\operatorname{sign} x)\ x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow\ f_n^{(n-1)}(x) = |x|$, so dass $\underline{f_n \in C^{n-1}(I) - C^n(I).}$

3) a) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1},\ f''(x) = n \cdot (n-1)x^{n-2}, \ldots,$

$f^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)\ x^{n-k},\ k \leq n$

$f^{(\ell)}(x) \equiv 0$ für $\ell > n$

b) $g(x) = x^{-n},\ x > 0,\ n \in \mathbb{N}$

$g'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$ (gemäß $\frac{d}{dx}\ x^a = a \cdot x^{a-1},\ a \in \mathbb{R}$)

$g''(x) = n \cdot (n+1)\ x^{-n-2}, \ldots,\ g^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot n \cdot (n+1) \ldots (n+k-1)\ x^{-n-k}$

Speziell: $\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^k\ k!\ x^{-1-k}$

Also wegen $\frac{d}{dx} \log(x) = 1/x$: $\boxed{\frac{d^k \log}{dx^k}(x) = (-1)^{k-1}\ (k-1)!\ x^{-k}}$

Alle betrachteten Funktionen sind C^∞ auf ihrem Definitionsbereich.

4) $\left.\begin{array}{l}\exp,\ \mathrm{cis}, \sin, \cos, \tan, \cot, \sinh, \cosh, \tanh, \coth,\\ \text{Polynome, rationale Funktionen}\end{array}\right\} \in C^\infty$ auf ihrem Def.bereich

außerdem: $f \in C^\infty \implies f^{-1} \in C^\infty$

(unter entspr. Vor., denn: $(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \circ f^{-1}$)

Anwendungen: Extremwerte und Diff'barkeit

Definition 11.4 : *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f hat in $x_\circ \in D$*

a) ein globales Minimum: $f(x) \geq f(x_\circ) \quad \forall\, x \in D$

b) ein lokales Minimum: $\exists$ *Umgebung U von $x_\circ$ mit*

$$f(x) \geq f(x_\circ) \quad \forall\, x \in U \cap D$$

analog: globales/ lokales Maximum

Bem.: in der Def. muß D keine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein!

Wir wissen: D kompakt, f stetig $\implies$ $\exists$ globales Max. u. Minimum

Satz 11.7 : *Sei I ein Intervall,*

$f : I \to \mathbb{R}$ habe im inneren Punkt $x_\circ$ von I einen lokalen Extremwert (Max. oder Min.).
Ist f dann diff'bar in $x_\circ$, so gilt $f'(x_\circ) = 0$.

Beweis: $x_\circ$ lokales Max. $\implies$ $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $(x_\circ - \varepsilon,\ x_\circ + \varepsilon) \subset I$ und

$$f(x) \leq f(x_\circ) \quad \forall\, x \in (x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon).$$

$$0 < h < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{h}\Big(f(x_\circ + h) - f(x_\circ)\Big)}_{\xrightarrow[h\downarrow 0]{} f'(x_\circ)} \quad \leq \quad 0$$

$$-\varepsilon < h < 0 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{h}\Big(f(x_\circ + h) - f(x_\circ)\Big)}_{\xrightarrow[h\uparrow 0]{} f'(x_\circ)} \quad \geq \quad 0$$

Also: $\quad f'(x_\circ) \;=\; 0.$ □

Bem: $\quad x_\circ$ Randpunkt und (lokales) Extremum $\Longrightarrow$ es gelten Ungleichungen für $f'_\pm(x_\circ)$

Verfahren:

$$\begin{cases} f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig und diff'bar auf } (a,b) \\ \underline{\text{Globale Extremwerte}}? \end{cases}$$

Globales Max. und Min. existieren!

i) berechne $\quad f(a),\ f(b)$

ii) bestimme die $\quad x \in (a,b)\ $ mit $\ f'(x) \;=\; 0;$
das seien endlich viele $x_1, \ldots, x_s$

iii) Tabelle:

x	a	x_1	$\ldots$	x_s	t
y	$f(a)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_s)$	$f(t)$

Ablesen des <u>größten</u> und <u>kleinsten</u> Wertes in der y - Zeile.

□

<u>Verallgemeinerung</u>: $\quad f$ ist in $t_1, \ldots, t_k \in (a,b)$ nicht diff'bar

Dann: $\quad$ Vergleich von $f(x)$ für

1) die Randpunkte $\quad x = a, b$
2) die Nicht-Diff'barkeitsstellen $\ x = t_1, \ldots, t_k$

3) die kritischen Punkte x, d.h. $f'(x) = 0$.

Bem.: $f'(x) = 0 \quad \not\Longrightarrow x$ ist lokaler Extremwert !

(Beispiel: $x \mapsto x^3$ in $x = 0$)

Übungen: Beispiele $\square$

Wir kennen die Z.W.S. für stetige Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$.
Die "Ableitung" hat die Zwischenwerteigenschaft, ohne dass man Stetigkeit voraussetzt.

Satz 11.8 : *(ZWE der Ableitung)* *(Folgerung aus Satz 11.7)*

> *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diff'bar (einschließlich der Randpnkte) mit $f'(a) \neq f'(b)$, so nimmt f' auf (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.*

Beweis: klar, wenn $f \in C^1$! o.E. $f'(a) < f'(b)$; sei $c \in (f'(a), f'(b))$

setze $g(x) := f(x) - c \cdot x,\ x \in [a, b]$

$\Longrightarrow \quad g'(a) = f'(a) - c < f'(b) - c = g'(b),$

also: $g'(a) < 0 < g'(b)$. $\quad *$

g stetig $\Longrightarrow \exists\, x_\circ \in [a, b] : \quad g(x) \geq g(x_\circ)$ für alle x (Minimum).

Fall 1: $x_\circ = a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{h}\Big(g(x_\circ + h) - g(x_\circ)\Big) \geq 0$ für $h > 0$

$\Longrightarrow \quad g'(x_\circ) \geq 0$, also Wspr. zu $*$

Fall 2: $x_\circ = b \quad \Longrightarrow \quad g(x_\circ - h) - g(x_\circ) \geq 0$ für $h > 0$

$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{h}\Big(g(x_\circ - h) - g(x_\circ)\Big) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad g'(b) \leq 0$, Wspr. zu $*$

$h \downarrow 0$

Daher bleibt nur noch

Fall 3: $\quad a < x_\circ < b \quad \Longrightarrow \quad g'(x_\circ) \;=\; 0,\;$ d.h.

$$c \;=\; f'(x_\circ),$$

so dass c als Wert von f' angenommen wird. $\square$

Ein Ziel der Differentialrechnung ist es, mit Hilfe der Ableitung etwas über das Verhalten der Funktion selbst auszusagen. Dazu brauchen wir

Satz 11.9 *:* *(<u>Mittelwertsatz</u>)* *(Folgerung aus Satz 11.7)*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b).
Dann gibt es $x_\circ \in (a,b)$ mit

$$f'(x_\circ) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>Satz von Rolle</u> $\to$ *Im Spezialfall $f(a) \;=\; f(b)$ hat f' eine Nullstelle in (a,b).*

Beweis: $\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$ erfüllt $\tilde{f}(a) \;=\; f(a) \;=\; \tilde{f}(b)$ ist stetig auf $[a,b]$ und diff'bar auf (a,b).

Es gibt x_1 und $x_2 \in [a,b]$ mit $\tilde{f}(x_1) \;=\; \max \tilde{f},\; \tilde{f}(x_2) \;=\; \min \tilde{f}$.

Fall 1: $\quad x_1$ <u>und</u> x_2 Randpunkte $\quad \Longrightarrow \quad \tilde{f} \equiv$ const $\quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}' \equiv 0$

Fall 2: $\quad$ o.E. $x_1 \in (a,b) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}'(x_1) \;=\; 0,\;$ d.h.

$$f'(x_1) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Im Fall 1 ist $\quad f'(x) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad$ an jeder Stelle $x \in (a,b)$,

im Fall 2 haben wir mit x_1 eine Stelle gefunden, wo die Beh. gilt. $\square$

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

I. Monotonieverhalten: $f:\ (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar

i.)	$f' > 0$ auf $(a,b) \Longrightarrow f$ streng wachsend auf (a,b)
ii)	$f' \geq 0$ auf $(a,b) \Longleftrightarrow f$ wachsend auf (a,b)

$$\to \text{ analog : } \left.\begin{matrix} < \\ \\ \leq \end{matrix}\right\} \qquad \text{fallend}$$

Ist f auf $[a,b]$ stetig, so folgt aus dem Vorzeichen von f' sogar die entsprechende Monotonie auf $[a,b]$.

Beweis: i) $x < y \Rightarrow \exists\, z \in (x,y):\ (f(y) - f(x))\big/x - y = f'(z)$,

$f'(z) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$

ii) "$\Leftarrow$": $h > 0 \Rightarrow \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \geq 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$

"$\Longrightarrow$" vgl. i) mit $\leq$ statt $<$

analog: die anderen Beweise

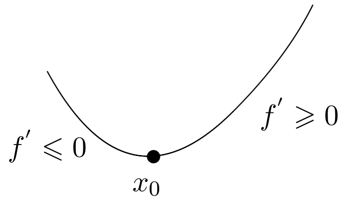
Achtung: $\boxed{f \text{ streng wachsend } \not\Longrightarrow f' > 0}$,

denn $f(x) = x^3$ wächst streng mit $f'(0) = 0$.

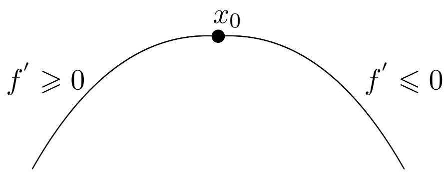
II. Kriterien für lokale Extrema: (hinreichend)

$f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ sei diff'bar, $x_\circ \in (a,b)$ kritischer Punkt $(f'(x_\circ) = 0)$.
Dann hat f in $x_\circ$ ein

i) lokales Minimum, falls: es gibt $\varepsilon > 0$ mit $f' \leq 0$ auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ]$ und $f' \geq 0$ auf $[x_\circ, x_\circ + \varepsilon)$



ii) lokales Maximum, falls : $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $f' \geq 0$ auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ]$ und $f' \leq 0$ auf $[x_\circ, x_\circ + \varepsilon)$



Beweis: i) f monoton fallend auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ] \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_\circ)$ dort

f monoton wachsend auf $[x_\circ, x_\circ + \varepsilon) \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_\circ)$ dort

$\Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x_\circ)$ auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon)$.

ii) analog

$\rightarrow$ <u>Zusatz</u>: $f \in C^2(a,b), f'(x_\circ) = 0$ in $x_\circ \in (a,b)$

$f''(x_\circ) < 0 \;\Longrightarrow\; x_\circ$ ist lokales <u>Max</u>

$f''(x_\circ) > 0 \;\Longrightarrow\; x_\circ$ ist lokales <u>Min</u>

(Man braucht für die Anwendung natürlich die strenge Ungleichung!)

Beweis: Sei $f''(x_\circ) > 0 \underset{f''\text{stetig}}{\Longrightarrow} f''(x) > 0$ auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon) \Longrightarrow$
f' streng wachsend auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon) \Longrightarrow f'(x) \leq f'(x_\circ) = 0$ auf $(x_\circ - \varepsilon, x_\circ]$
und $f'(x) \geq 0 = f'(x_\circ)$ auf $[x_\circ, x_\circ + \varepsilon)$. Benutze i) von oben. $\square$

Bemerkung: $f(x) = x^4$ hat abs. Min. in $x = 0$, aber $f''(0) = 0$!

Die Bedingungen aus dem Zusatz sind also nur hinreichend.

II. Schrankensatz $\begin{cases} \text{Anwendungen: 1. Verifikation einer Lipschitz Bedingung} \\ \text{2. Beweis der Aussage } \frac{d}{dx}f \equiv 0 \implies f \equiv \text{const} \end{cases}$

Satz 11.10 : *Sei* $f \in C^\circ\Big([a,b],\mathbb{C}\Big)$ *und diff'bar auf* (a,b).
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ *mit* $\Big|f(b) - f(a)\Big| \le \Big|f'(\xi)\Big|\,(b-a)$.

Bemerkungen: 1) f $\mathbb{R}$-wertig: 11.10 folgt aus M.W.S.!

2) es gilt kein komplexer M.W.S.: wendet man 11.9 an auf Re f, Im f, so ergeben sich verschiedene Zwischenstellen!

Korollar: Ist $f \in C^1\Big([a,b],\mathbb{C}\Big)$, so ist f auf $[a,b]$ Lipschitz mit
$\Big|f(x) - f(y)\Big| \le \underbrace{\sup_{[a,b]} |f'|}_{<\infty} \cdot |x-y|$ für alle $x, y \in [a,b]$.

Zusatz (zum Korollar): Dasselbe gilt für $f \in C^\circ\Big([a,b],\mathbb{C}\Big)$,
wenn f im Innern differenzierbar ist mit beschränkter Ableitung.

(D.h.: die Ableitung muß nicht stetig sein, Beschränktheit reicht!)

Korollar und Zusatz folgen aus 11.10 durch Anwenden auf $[x,y]$ bzw. $[y,x]$.

Beweis von 11.10: Sei $f(a) \ne f(b)$. Setze $c := \Big(\overline{f(b)} - \overline{f(a)}\Big) \Big/ \Big|f(a) - f(b)\Big|$

hat Länge 1 und $\Big|f(b) - f(a)\Big| = c \cdot \Big(f(b) - f(a)\Big) \quad *$

$\varphi :=$ Re $(c \cdot f)$ ist $C^\circ\Big([a,b],\mathbb{R}\Big)$ und diff'bar im Innern $\underset{\text{MWS}}{\Longrightarrow}$

$\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a) \implies$

$\Big|f(b) - f(a)\Big| \underset{*}{=}$ Re $\Big(c \cdot (f(b) - f(a))\Big) = \varphi(b) - \varphi(a) =$

$$\varphi'(\xi)(b-a) \;=\; \mathrm{Re}\,\Big(c \cdot f'(\xi)\Big)(b-a) \;\leq\; \Big|f'(\xi)\Big| \cdot (b-a), \;\text{ da }\; |c| \;=\; 1$$

(Bem.: in $*$ benutzt man $c \cdot \Big(f(b) - f(a)\Big) \in \mathbb{R}$, also darf man Re davorschreiben)

Aus Satz 11.10 bzw. den Folgerungen erhalten wir

Satz 11.11 *: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar.*
Dann gilt: $f' \equiv 0$ auf $I \iff f \equiv const$

Bem.: "$\Longleftarrow$" gilt auch, wenn I Vereinigung zweier disjunkter offener Intervalle ist, "$\Longrightarrow$" dagegen nicht!

Beweis: In den Übungen.

Beispiele für die Anwendung von 11.11:

1) $f(x) := \exp x \;=\; e^x$ erfüllt $* \begin{cases} f' = f \text{ auf } \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

f ist die einzige diff'bare Funktion mit $*$.

Beweis: g erfüllt $* \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-x} \cdot g(x)\right) \;=\; -e^{-x}\, g(x) + g'(x) \cdot e^{-x} \;=\; 0$

$\underset{11.11}{\Longrightarrow} \;\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad g(x) \;=\; c \cdot e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
Aus $g(0) \;=\; 1$ folgt $c \;=\; 1$. $\square$

2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$.

$F : I \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion zu f auf I $\iff$

F ist differenzierbar mit $F' \;=\; f$ auf I.

Beh.: F, G Stammfunktionen zu f auf $I \Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{C}$ mit $G \;=\; F + c$

denn: $\frac{d}{dx}(G - F) \;=\; 0$ auf I. $\square$

Der 2^te^ Mittelwertsatz, die Regeln von L'Hospital zur Berechnung von Limiten

Satz 11.12 : *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b). Dann gibt es $x_\circ \in (a,b)$ mit*

<u>*2^{te} MWS*</u> $\boxed{g'(x_\circ)\cdot(f(b)-f(a)) \;=\; f'(x_\circ)\,(g(b)-g(a))}$

Beweis: $h(x) \;:=\; \Big(f(b)-f(a)\Big)\cdot\Big(g(x)-g(a)\Big) - \Big(g(b)-g(a)\Big)\Big(f(x)-f(a)\Big)$

erfüllt $h(a) \;=\; 0 \;=\; h(b) \underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, x_\circ \in (a,b)$ mit $h'(x_\circ) \;=\; 0$ □

Bem.: 1) der M.W.S. folgt mit $g(x) \;=\; x$.

2) falls erlaubt, kann man schreiben: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \;=\; \frac{f'(x_\circ)}{g'(x_\circ)}$.

Der "alte M.W.S." ergibt

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f'(x_1)(b-a),\\ g(b)-g(a) &= g'(x_2)(b-a), \end{aligned}$$

so dass

$$\Big(f(b)-f(a)\Big)\Big/\Big(g(b)-g(a)\Big) \;=\; f'(x_1)\Big/g'(x_2),$$

rechts stehen verschiedene Zwischenstellen x_1, x_2. Der 2^{te} MWS sagt nun, dass man $x_1 \;=\; x_2$ wählen kann.

Satz 11.13 : *(<u>Regeln von L'Hospital</u>)*

Seien $a < b$ reell und $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$.

Es gelte: i) $f(x) \longrightarrow 0$ <u>und</u> $g(x) \longrightarrow$ bei $x \downarrow a$
oder ii) $f(x) \longrightarrow \infty$ <u>und</u> $g(x) \longrightarrow \infty$ bei $x \downarrow a$.

Existiert dann $\lim\limits_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \;=:\; \alpha$, so auch
$\lim\limits_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *und zwar mit Wert α.*

Entsprechende Versionen gelten für $x \uparrow b$, einen inneren Grenzübergang $x \to x_\circ \in (a,b)$ oder bei $x \to \pm\infty$.

Interpretation: Die Regeln von L'Hospital dienen zur Berechnung von $\lim f(x)/g(x)$ für den Fall, dass $\frac{\lim f}{\lim g}$ ein Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist, man also nicht mit der Quotientenregel für Grenzwerte arbeiten kann. Der Satz sagt $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ sofern der rechte Grenzwert existiert. Man achte bei der Anwendung von 11.13 darauf, dass die Voraussetzungen, i) bzw. ii) erfüllt sein müssen.

Beweis: i) Es gelte $\lim\limits_{x\downarrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\downarrow a} g(x)$. Da $g'(x) \neq 0$ ist, muß g' auf (a,b) ein Vorzeichen haben (Z.W.E. der Ableitung!), etwa $g'(x) > 0$ auf (a,b).
Setzt man $f(a) := 0, g(a) := 0$, so sind $f, g \in C^\circ([a,b^*])$ für jedes $a < b^* < b$. Nach dem Monotoniekriterium folgt: g streng wachsend auf $[a,b^*]$, speziell $g(x) > 0$ für $x > a$.
Wir wenden den 2^{ten} M.W.S. auf $[a,b^*]$ an $\Longrightarrow$ $f(b^*)\Big/g(b^*) = f'(x)\Big/g'(x)$ mit einem $x \in (a,b^*)$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ mit $\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - \alpha\right| < \varepsilon \quad \forall\, y \in (a, a+\delta)$.
Für $b^* \in (a, a+\delta)$ gehört der Zwischenpunkt x zu diesem Intervall $\Longrightarrow$

$\left|f(b^*)\Big/g(b^*) - \alpha\right| < \varepsilon \quad \forall\, b^* \in (a, a+\delta)$, was zu zeigen war.

Der "Trick" $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ führt zwar auf $\frac{0}{0}$, aber $\frac{(1/g)'}{(1/f)'} = \frac{g'}{f'} \cdot \frac{f^2}{g^2}$, und über den Ausdruck rechts kann man nichts sagen.

Die Reduktion auf i) funktioniert also nicht!

Auch können wir jetzt f und g in a nicht mehr stetig ergänzen.
Neues Argument: $\delta > 0$, wähle $x \in (a, a+\delta)$ und wende den 2^{ten} M.W.S. auf dem Intervall $[x, a+\delta]$ an $\Longrightarrow$

$$\exists\, c \in (x, a+\delta) : \quad g'(c)(f(a+\delta) - f(x)) = f'(c) \cdot (g(a+\delta) - g(x)).$$

g und g' sind auf einer einseitigen Umgebung von a ohne Nullstelle

$$(\delta \text{ klein genug}) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} \qquad *$$

$\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow$ $\delta > 0$ kann so klein gemacht werden, dass

$$\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, y \in (a, a+\delta).$$

insbesondere: $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

außerdem: $\exists\, \delta' < \delta$ mit $\left|\frac{f(a+\delta)}{f(y)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$,

$$\left|\frac{g(a+\delta)}{g(y)}\right| < \frac{\varepsilon}{4\cdot|\alpha| + 2\varepsilon} \quad \forall\, y \in (a, a+\delta').$$

Wählt man also $x \in (a, a+\delta')$ folgt aus $*$:

$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| = \left|\left(1 - \tfrac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) \tfrac{f'(c)}{g'(c)} + \tfrac{f(a+\delta)}{f(x)} - \alpha\right| >$$

$$\tfrac{\varepsilon}{4} + \left|\left(1 - \tfrac{g(a+\delta)}{g(x)}\right) \tfrac{f'(c)}{g'(c)} - \alpha\right| =$$

$$\tfrac{\varepsilon}{4} + \left|\tfrac{f'(c)}{g'(c)} - \alpha\right| + \left|\tfrac{g(a+\delta)}{g(x)}\right| \cdot \left|\tfrac{f'(c)}{g'(c)}\right| <$$

$$\tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{4|\alpha|+2\varepsilon} \cdot \left|\tfrac{f'(c)}{g'(c)}\right| \leq$$

$$\tfrac{3}{4} \cdot \varepsilon + \tfrac{\varepsilon}{4|\alpha|+2\varepsilon} \left(\tfrac{\varepsilon}{2} + |\alpha|\right) = \varepsilon.$$

Da zeigt: $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$ $\square$

Bemerkungen:

1) $\lim f(x) \cdot g(x) = ?$, wenn $f(x) \to 0,\ g(x) \to \infty$.
Schreibe dann $f(x) \cdot g(x) = g(x) \Big/ (1/f(x))$ " Typ $\frac{\infty}{\infty}$" und wende ii) an.
D.h.: Oft sind Umformungen vor L'Hospital nötig.

2) ist auch $\frac{f'}{g'}$ unbestimmt, so kann man (falls erlaubt!) $\frac{f''}{g''}$ studieren, usw., also L'Hospital induktiv anwenden.

3) L'Hospital gilt nicht, wenn kein unbestimmter Ausdruck vorliegt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x} = 1 \neq \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2.$$

Beispiele: (immer von rechts nach links lesen!)

1) $a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ $\lim\limits_{x \to o} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{a \cdot \cos(ax)}{b \cdot \cos(bx)} = \frac{a}{b}$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^r} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1/x}{r\, x^{r-1}} = 0$ für $r > 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cosh x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{- \sinh x} =$

$2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{- \cosh x} = -2$

4) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^x = ?$ (Verallgemeinerung von $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1$)

$x^x = \exp(x \cdot \ln x) \Longrightarrow$ bestimme $\lim\limits_{x \downarrow 0} (x \cdot \ln x)$

$$\lim_{x\downarrow 0} x\cdot \ln x \;=\; \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln x}{1/x} \;=\; \lim_{x\downarrow 0} \tfrac{1/x}{-1/x^2} \;=\; 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\downarrow 0} x^x \;=\; \exp\big(\lim_{x\downarrow 0} x\cdot \ln x\big) \;=\; e^{\circ} \;=\; 1. \qquad \square$$

Konvexität und Verhalten der Ableitung

Satz 11.14 *: Sei $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b). Dann gilt:*

$$\boxed{f \;\; \textit{konvex} \iff f' \;\; \textit{ist auf} \;\; (a,b) \;\; \textit{monoton wachsend}}$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" Satz 10.4, $u<v<w \Longrightarrow$

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \;\le\; \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \;\le\; \frac{f(w)-f(v)}{w-v} \qquad (1)$$

Seien $x<y$ aus (a,b). Man setzt $u \;=\; x, v \;=\; y$ und $w \;=\; y+h \; (h>0) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\le\; \tfrac{f(y+h)-f(x)}{y+h-x} \;\le\; \tfrac{1}{h}\Big(f(y+h)-f(y)\Big) \;\Longrightarrow \text{(bei } h\downarrow o)$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\le\; f'(y). \qquad (2)$$

Nun setzt man in (1) $u=x,\; v=x+h,\; w=y \quad (h>0) \quad \Longrightarrow$

$$\tfrac{1}{h}\Big(f(x+h)-f(x)\Big) \;\le\; \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\underset{h\downarrow 0}{\Longrightarrow}\; f'(x) \;\le\; \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

woraus sich mit (2) $f'(x) \;\le\; f'(y)$ ergibt.

"$\Longleftarrow$": Sei $0<t<1,\; x<y$. Z.z.:

$$f\Big((1-t)\cdot x+ty\Big) \;\le\; (1-t)f(x)+t\cdot f(y) \quad \iff$$

$$(1-t)\cdot\Big[f\Big((1-t)x+ty\Big)-f(x)\Big] \;\le\; t\cdot\Big[f(y)-f\Big((1-t)\,x+ty\Big)\Big] \qquad *$$

l.S. von $* \;=\; (1-t)\cdot t\cdot(y-x)\cdot f'(x_1)$ mit $x_1\in\Big(x,\,(1-t)\cdot x+ty\Big)$

r.S. von $* \;=\; t\cdot(1-t)\cdot(y-x)\; f'(x_2)$ mit $x_2\in\Big((1-t)x+ty,y\Big)$

Also: $* \iff f'(x_1) \;\le\; f'(x_2),$

und das gilt wegen der Monotonie von f'. $\square$

Bemerkungen: 1) f' streng wachsend $\Longrightarrow$ f streng konvex (s. Beweis von "$\Longleftarrow$")
2) analog: f konkav $\Longleftrightarrow$ f' monoton fallend

Korollar: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und 2 mal diff'bar auf (a,b).
Dann gilt:

1)	$f'' \geq 0$ auf (a,b)	$\Longrightarrow$	f	konvex
ii)	$f'' > 0$ auf (a,b)	$\Longrightarrow$	f	<u>streng konvex</u>

Anwendungen:

1) "<u>Kurvendiskussion</u>": $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei stetig, $x_\circ \in (a,b)$

$(x_\circ, f(x_\circ)$ heißt <u>Wendepunkt von f</u> (genauer: der Kurve Graph (f)) $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ mit

(i) f konvex auf $(x_\circ - \varepsilon,\, x_\circ]$ und konkav auf $[x_\circ,\, x_\circ + \varepsilon)$

oder

(ii) "<u>umgekehrt</u>"

Man kann Wendepunkte durch das Vorzeichen von f'' bestimmen.
anschaulich: <u>die Kurve Graph (f) ändert in $(x_\circ,\, f(x_\circ))$ ihr Krümmungsverhalten</u>

2) <u>Ungleichungen</u>:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\, e^x}{dx^2} &= e^x > 0 && \text{auf } \mathbb{R} && \Longrightarrow \; e^x \text{ streng konvex} \\ \frac{d^2}{dx^2} \ln x &= -1/x^2 < 0 && \text{auf } (0,\infty) && \Longrightarrow \; \ln \text{ streng konkav} \end{aligned}$$

Damit beweisen wir: <u>allg. Ungl. zwischen dem arith. und geom. Mittel</u>

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Seien } \ x_1,\ldots,x_n>0, \lambda_1,\ldots,\lambda_n>0 \\ \text{mit } \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \ = \ 1. \quad \text{Dann ist} \\ x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n} \le \lambda_1\, x_1+\lambda_2\, x_2+\ldots+\lambda_n\, x_n\end{array}}$$

(mit Gleichheit genau dann, wenn $x_1 \ = \ x_2 \ = \ \ldots \ = \ x_n$).

Spezialfall: $\lambda_1 \ = \ldots = \ \lambda_n \ = \ 1/n, \ n \in \mathbb{N}, \ x_1,\ldots,x_n > 0 \quad \Longrightarrow$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \ \le \ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Beweis der AMG-Ungl.:

zunächst beweist man direkt mit Hilfe der Definition, dass für <u>konvexe</u> Funktionen gilt:

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\, y_i\Big) \ \le \ \sum_{i=1}^{n} t_i\; f(y_i), \ \ 0 \le t_i \le 1, \ \sum_{i=1}^{n} t_i \ = \ 1$$

bzw. mit $<$ im Falle strenger Konvexität. analog: f konkav

ln ist streng konkav $\Longrightarrow$

$$\ln\ \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\Big) \ \ge \ \sum_{i=1}^{n} \Big(\ln\, x_i\Big)\cdot\lambda_i.$$

Nun wende "exp" auf beiden Seiten an $\Longrightarrow$ (exp wachsend)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \ \ge \ \exp\ \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \ln\, x_i\Big) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i\, \ln\, x_i) \ = \ \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

$\square$

Die Taylorsche Formel

verallgemeinert das Konzept der linearen Approximierbarkeit in folgendem Sinn:

f stetig in a	$\Longleftrightarrow$	f ist in der Nähe von a "gut" von 0^{ter} Ordnung approximierbar, nämlich durch die konstante Funktion $x \mapsto f(a)$
f diff'bar in a	$\Longleftrightarrow$	f lokal bei a "gut" von 1^{ter} Ordnung approx., d.h. $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.

Sei f n-mal diff'bar lokal bei a, $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen: Die Polynomfunktion $P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k$ approximiert f bei a "gut", falls $P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a), \dots, f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$.

$\Longrightarrow \quad b_k \ = \ \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k \ = \ 0, \dots, n.$

Definition 11.5 *:*

Sei f n-mal diff'bar auf einer Umgebung von a.

Dann heißt

$$\boxed{T_{n,a}f(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)\,(x-a)^i}$$

das Taylorpolynom n^{ter} Ordnung von f in a.

Bem.: 1) grad $T_{n,a}f \ \le \ n$ $\Big(f^{(n)}(a)$ kann ja 0 sein!)
2) f Polynom von Grad $\le n \implies T_{n,a}f \ = \ f$.

$f(x) - T_{n,a}f(x) \ =: \ R_{n,a}f(x)$ heißt das Restglied n^{ter} Ordnung von f bei a. Um den Fehler abzuschätzen, der bei Ersetzung von f durch $T_{n,a}\,f$ entsteht, braucht man Restgliedformeln.

Satz 11.15 *: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, a innerer Punkt von I und f sei $(n+1)$-mal difff'bar auf I. Zu $x \in I$ gibt es dann ein c zwischen a und x mit*

Restglieddarstellung nach Lagrange

$$f(x) \ = \ T_{n,a}\,f(x) \ + \ \tfrac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c) \ \cdot \ (x-a)^{n+1},$$

$$\textit{also} \quad R_{n,a}\,f(x) \ = \ \tfrac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c) \ \cdot \ (x-a)^{n+1}$$

Bem.: 1) c hängt von x ab! 2) f $\mathbb{R}$-wertig, da wir den MWS benutzen.

Satz 11.16 *: Sei $f \in C^\infty(I)$. Gibt es ein $K \ge 0$*

mit $\boxed{\sup_I \, |f^{(n)}(x)| \le K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_\circ}$, *so*

folgt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n,$$

d.h. *die Taylorreihe konvergiert für alle $x \in I$ und stellt f dar.*

Bem.: 1) bei der Anwendung von 11.16: I = kleines Intervall um a

2) Ist $f \in C^\infty(I)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n$ an jeder Stelle $x \in I$ konvergent, so muß der Reihenwert nicht unbedingt $f(x)$ sein. Dies folgt nur im Fall $R_{n,a}f(x) \longrightarrow 0$.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \exp\Big(-1/|x|\Big), & x \neq 0 \end{cases}$$

Übung: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n$

$\underset{a=0}{\Longrightarrow}$ $T_{n,0}\, f(x) \equiv 0 \quad \forall\, n,\ x \in \mathbb{R}$

Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$, aber f ist nicht die Nullfunktion!

Beweis von Satz 11.16: gelte $|f^{(n)}(x)| \le K$ auf I mit

$K \ge 0$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$.

$$x > a: \quad \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\,(x-a)^k \Big| = \Big| R_{n,a}\, f(x) \Big|$$

$$\underset{11.15}{=} \frac{1}{(n+1)!} \Big| f^{(n+1)}(c) \Big| \cdot (x-a)^{n+1} \quad \text{mit } c \in (a,x)$$

$$\le K \cdot \frac{1}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$x < a$: analog!

$\square$

Beweis von Satz 11.15:
Sei zunächst $x > a$. Auf dem Intervall $[a, x]$ sei

$$\begin{aligned} g(t) &:= f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \tfrac{1}{2}f''(t)(x-t)^2 - \dots \\ &\qquad - \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n - A \cdot \tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)(x-t)^k \tfrac{1}{k!} - A \tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Longrightarrow g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Wähle $A \in \mathbb{R}$ so, dass $g(a) = 0$ ist.

Rolle $\Longrightarrow$ $\exists\, c \in (a, x)$ mit $\frac{d}{dt} g\,(c) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \frac{dg}{dt}(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dt} f^{(k)}(t) \cdot \frac{1}{k!} (x-t)^k \\ &\qquad + f^{(k)}(t) \frac{1}{k!} \frac{d}{dt} (x-t)^k \\ &\qquad - A \frac{1}{(n+1)!} \frac{d}{dt} (x-t)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(t) \frac{1}{k!} (x-t)^k + f^{(k)}(t) \frac{1}{k!} (-1) \cdot \underbrace{k(x-t)^{k-1}}_{:=0 \text{ für } k=0} \\ &\qquad + A \frac{1}{n!} (x-t)^n \end{aligned}$$

$$= -f^{(n+1)}(t) \frac{1}{n!} (x-t)^n + A \frac{1}{n!} (x-t)^n$$

$t = c \quad \Longrightarrow \quad 0 = -f^{(n+1)}(c) + A,$ also $A = f^{(n+1)}(c)$.

Einsetzen in die Formel für g und ausnutzen von $g(a) = 0$

$$\Longrightarrow 0 = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\, (x-a)^k \frac{1}{k!} - f^{(n+1)}(c) \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^n.$$

Analog für $x < a$. $\square$

Andere Schreibweise:

$$f(a+h) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\, h^k \;+\; \tfrac{f^{(n+1)}\,(a+\vartheta h)}{(n+1)!}\, h^{n+1} \quad \text{für ein} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Definition 11.6 *:* *Seien f, g auf einer Umgebung von a definiert.*

f und g stimmen in a von n^{ter} Ordnung überein $:\Longleftrightarrow$

$f(x) - g(x) \;=\; r(x) \cdot (x-a)^n$ mit einer in a stetigen Funktion r, $r(a) \;=\; 0$.

Bem.: Übereinstimmung von n^{ter} Ordnung $\Longrightarrow$ Übereinstimmung von k^{ter} Ordnung, $k < 1$

Satz 11.17 *:* *$f^{(n+1)}$ sei auf Umg. von a beschränkt* $\Longrightarrow$

f und $T_{n,a}\, f$ stimmen auf Umg. von a von n^{ter} Ordnung überein.

Beweis: Satz 11.15 $\square$

Beispiele:

1) $T > 0:\quad \frac{d^n}{dx^n}\, e^x \;=\; e^x \quad \forall\, n \quad \Longrightarrow$

$$0 \;\leq\; \tfrac{d^n}{dx^n}\, e^x \;\leq\; e^T \quad \text{auf} \quad [\,-T, T\,] \quad \text{für alle} \quad n \;\underset{11.16}{\Longrightarrow}$$

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\, x^n \quad \text{auf} \quad (\,-T, T\,),$$

also auf $\mathbb{R}$ wegen der Beliebigkeit von T.

Analog: $\quad e^x \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, e^a\, (x-a)^n$ für jede Stelle a.

2) $h > -1: \qquad \ln(1+h) \;=\; ?$

$$f(x) := \ln x \quad \Longrightarrow \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\,(k-1)!\,x^{-k}, \; k \geq 1$$

$h > 0:$
$$\Big(R_{n,1} \ln\Big)(1+h) = \tfrac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)\, h^{n+1}$$

mit $\quad c \in (1, 1+h) \quad \Longrightarrow$

$$\left|\Big(R_{n,1} \ln\Big)(1+h)\right| \leq \tfrac{1}{(n+1)!}\, n!\, c^{-n-1} \cdot h^{n+1}$$

$$\underset{c>1}{\leq} \tfrac{1}{n+1} \cdot h^{n+1}$$

$$\underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{, falls} \quad h \leq 1$$

$-1 < h < 0: \qquad \exists\, c \in (1+h, 1)$ mit

$$\left|\Big(R_{n,1} \ln\Big)(1+h)\right| \leq \tfrac{1}{n+1} \left(\tfrac{1}{1+h}\right)^{n+1} \cdot |h|^{n+1}$$

$$= \tfrac{1}{n+1} \left(\tfrac{|h|}{1+h}\right)^{n+1} = \tfrac{1}{n+1} \left(\tfrac{|h|}{1-|h|}\right)^{n+1}$$

Hier ist nicht offensichtlich, dass $\Big(R_{n,1} \ln\Big)(1+h)$ gegen 0 geht. Man muss eine andere Restglieddarstellung benutzen ($\longrightarrow$ von Cauchy)
Immerhin bekommen wir: $\quad (h = 1)$

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\, \tfrac{1}{k} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \pm \ldots}$$