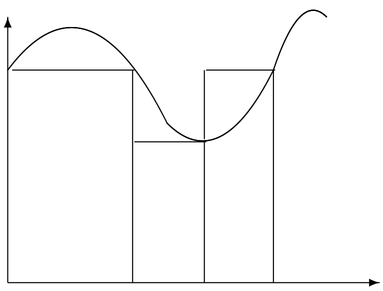
§12

Integralrechnung (für Regelfunktionen)

Motivation: 1) Flächenberechnung



2) systematische Bestimmung von Stammfunktionen
(finde zu f ein F mit $\frac{dF}{dx} = f$)

Idee zur Bildung eines Integralbegriffs:

- $f \equiv c$ auf $[a, b] \implies \int_a^b f(x)\, dx := c \cdot (b - a)$ "Rechteck"
- f stückweise konstant "Treppenfunktion"
- $f =$ Limes von Treppenfunktionen "Approximation"

Ergebnis: Integral für sog. Regelfunktionen

Nachfolgend: nur reeller Definitionsbereich, Werte in $\mathbb{C}$ möglich.

Definition 12.1 : *Sei* $a < b$. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *heißt* *Treppenfunktion*

$:\iff$ *es gibt eine Zerlegung*

$$Z = \{a = x_\circ < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

von $[a, b]$, *so dass* φ *auf* $(x_{i-1}, x_i), i = 1, \ldots, n$, *konstant ist.*

Gilt $\varphi = c_i$ *auf* (x_{i-1}, x_i), *so setzt man:* $\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^{n} c_i \, (x_i - x_{i-1})$

(Treppenfunktionen haben nur endlich viele Werte!)

Bemerkungen:

0) Treppenfunktionen sind offenbar i.a. unstetig. Die Werte $\varphi(x_i)$ an den Teilpunkten spielen für $\int_a^b \varphi \, dx$ keine Rolle.

1) Def. 12.1 des Integrals hängt nicht von Z ab! D.h.:

   Z, Z' Zerlegungen von $[a, b]$,

   $Z = \{x_\circ < x_1 < \ldots < x_n\}$, $Z' = \{x'_\circ < \ldots < x'_m\}$

   $\varphi = c_i$ auf (x_{i-1}, x_i), $\varphi = d_k$ auf (x'_{k-1}, x'_k)

   $$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i \, (x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^{m} d_k \, (x'_k - x'_{k-1}).$$

   Bspl.: $Z = \{a, b\}$, $Z' = \{a, x', b\}$

   offenbar: $c \cdot (b - a) = c \cdot (x' - a) + c \cdot (b - x')$

2) $\mathcal{T}([a, b]) :=$ Menge aller Treppenfunktionen $[a, b] \to \mathbb{C}$

   Übung: $\boxed{\mathcal{T}([a, b]) \text{ ist ein } \mathbb{C} \text{ - Vektorraum.}}$

Satz 12.1 : *Seien* $\varphi, \Psi \in \mathcal{T}([a, b,])$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

i) $\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\Psi)\,dx \;=\; \alpha \cdot \int_a^b \varphi\, dx + \beta \int_a^b \Psi\, dx.$

(Linearität)

ii) $\left|\int_a^b \varphi\, dx\right| \;\leq\; \int_a^b |\varphi| \cdot dx \;\leq\; \|\varphi\| \cdot (b-a)$

(Beschränktheit) $(\|f\| := \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\})$ *lies: "Norm von f"*

iii) $\varphi, \Psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mit* $\varphi(x) \leq \Psi(x)$ *auf* $[a,b] \Longrightarrow$

$\int_a^b \varphi\, dx \leq \int_a^b \Psi\, dx.$ *(Monotonie)*

Beweis: ii) Sei $Z = \{a = x_\circ < \ldots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a,b]$, so dass $\varphi = c_k$ auf $(x_{k-1}, x_k) \Longrightarrow$

$$\left| \int_a^b \varphi\, dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k\, (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \int_a^b |\varphi|\, dx.$$

Da $|c_k| \leq \|\varphi\|$ ist für $k = 1, \ldots, n$, gilt

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \|\varphi\| \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \|\varphi\| \cdot (b-a).$$

i), iii) Sei Z' eine Zerlegung zu Ψ. $Z^* := Z \cup Z' = \{z_\circ < \ldots < z_N\}$

ist dann Zerlegung sowohl zu φ als auch zu Ψ, also

$$\varphi = c_k \quad \text{auf} \quad (z_{k-1}, z_k),$$

$$\Psi = d_k \quad \text{auf} \quad (z_{k-1}, z_k) \quad \text{für gewisse } c_k, d_k \in \mathbb{C}$$

$\alpha \cdot \varphi + \beta\Psi$ ist dann $= \alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_k$ auf $(z_{k-1}, z_k) \Longrightarrow$

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\Psi)\, dx = \sum_{k=1}^N (\alpha \cdot c_k + \beta\, d_k)\, (z_k - z_{k-1}) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{k=1}^N c_k\, (z_k - z_{k-1}) + \beta \cdot \sum_{k=1}^N d_k\, (z_k - z_{k-1}) = \alpha \int_a^b \varphi\, dx + \beta \int_a^b \Psi$$

Im Fall $\varphi \leq \Psi$ gilt $c_k \leq d_k$ auf (z_{k-1}, z_k), daraus folgt die Ungleichung zwischen den Integralen. □

Für welche Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ kann $\int_a^b f dx$ sinnvoll definiert werden?

Definition 12.2 : *Regelfunktionen*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit reellem Anfangs- und Endpunkt a bzw. b.

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion auf I, wenn

(i) für $x \in (a,b)$ existieren $f(x+)$ und $f(x-)$

(ii) $a \in I \implies f(a+)$ existiert
$b \in I \implies f(b-)$ existiert

Bem.: 1) $R(I) =$ Menge der Regelfunktionen ist ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum
2) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall wie oben, so gilt:

$$\boxed{\text{stetige Funktionen, BV-Fkten, monotone Fkten} \quad I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{sind Regelfunktionen}}$$

Wir beschreiben jetzt den Zusammenhang zwischen Regel- und Treppenfunktionen auf kompakten Intervallen $[a,b]$. Dazu benötigen wir eine äquivalente Beschreibung kompakter Mengen.

Satz 12.2 : *Für $M \subset \mathbb{R}$ sind gleichwertig:*

(i) M sind kompakt (also beschränkt u. abgeschlossen, Satz 9.5)

(ii) Gilt $M \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ mit offenen Intervallen
$U_\lambda = (x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda)$ bei beliebiger Indexmenge Λ, so gibt es endlich viele $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}$ mit $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$.

$\Big($ (ii) heißt <u>Überdeckungskompaktheit</u>: aus einer beliebigen <u>offenen Überdeckung</u> kann man eine <u>endliche Teilüberdeckung</u> auswählen. $\Big)$

Beweis: "$\Longrightarrow$" $\exists\ R > 0$ mit $M \subset I_\circ := [-R, R]$.

Sei $M \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ mit U_λ wie in (ii).

<u>Annahme</u>: $\nexists$ endliche T.Ü.

$\Longrightarrow$ $M \cap [-R, 0]$ oder $M \cap [0, R]$ <u>nicht</u> durch endlich viele U_λ überdeckbar;

0.E. gelte dies für $M \cap [0, R]$; setze $I_1 := [0, R]$ analog: $M \cap \left[0, \frac{R}{2}\right]$ oder $M \cap \left[\frac{R}{2}, R\right]$ nicht endlich überdeckbar.

<u>rekursiv</u>: Folge $\{I_k\}$ abgeschlossener Intervalle, $I_k \supset I_{k+1}$, $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}\,|I_k|$ und

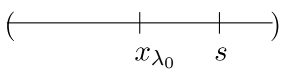
$*$ $\quad \Big|$ zur Überdeckung von $I_k \cap M$ braucht man ∞ viele U_λ $\Big|$

aus $*$ folgt: $\#\, I_k \cap M = \infty$

Sei $s \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k \Longrightarrow s$ ist H.P. von M

M abgeschlossen, also $s \in M$.

Nach Voraussetzung: $M \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \Longrightarrow \exists\ \lambda_\circ :\ s \in U_{\lambda_\circ}$.



für $k \gg 1$ folgt: $I_k \subset U_{\lambda_\circ} \Longrightarrow I_k \cap M \subset U_{\lambda_\circ}$.

Das widerspricht $*$.

"$\Longleftarrow$" zeige (vgl. Satz 9.5): a) M beschränkt
b) M abgeschlossen

zu a): $\left\{ \underbrace{\left(x - \frac{1}{n},\ x + \frac{1}{n} \right)}_{=:I_{1/n}(x)} \ :\ x \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist offene Überdeckung von M $\Longrightarrow$

bereits endlich viele überdecken M $\Longrightarrow$ M beschränkt

zu b): Sei M nicht abgeschlossen $\Longrightarrow$ $\exists$ H.P. a von $M, a \notin M$

sei $U(x) := \Big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\Big),\ 0 < \varepsilon(x) := \frac{1}{2}\ |x - a|,\ x \in M$

$$\Longrightarrow \quad M \subset \bigcup_{x \in M} U(x) \quad \Longrightarrow \quad M \subset \bigcup_{\ell=1}^{n} U(x_\ell)$$

mit $x_1, \ldots, x_\ell \in M$.

Setze $\varepsilon :=\ \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$, $\varepsilon_\ell\ =\ \frac{1}{2}\ |x_\ell - a|$ $\Longrightarrow$

$$\left(a - \tfrac{\varepsilon}{2},\ a + \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\ \cap\ U(x_\ell)\ =\ \emptyset \quad \Longrightarrow$$

$$\left(a - \tfrac{\varepsilon}{2},\ a + \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\ \cap\ \bigcup_{\ell=1}^{n} U(x_\ell)\ =\ \emptyset \quad \Longrightarrow \quad (M \text{ wird überdeckt})$$

$$\left(a - \tfrac{\varepsilon}{2},\ a + \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\ \cap\ M\ =\ \emptyset$$

Dann kann a kein Häufungspunkt von M sein. □
(allg. Beweis im $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow$ Steffen An. I, p.578 f.)

Satz 12.3 : *Approximationssatz* *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{l} f:\ [a,b] \to \mathbb{C}\ \ \textit{Regelfunktion} \quad \Longleftrightarrow \\[2ex] \textit{zu jedem}\ \ \varepsilon > 0\ \ \textit{gibt es}\ \ \varphi \in \mathcal{T}([a,b])\ \ \textit{mit}\ \ \|f - \varphi\|\ \le\ \varepsilon \end{array}}$$

D.h.: $\sup\limits_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - f(x)|\ <\ \varepsilon.$

Folgerung: $(\varepsilon = 1/n)$ $f\ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Regelfunktion $\Longleftrightarrow$

$\exists\ \varphi_n \in \mathcal{T}\Big(\ [a, b]\Big)$ mit $\|f - \varphi_n\|\ \longrightarrow\ 0$ bei $n \to \infty$.

Regelfunktionen sind genau die gleichmäßigen Limiten von Treppenfunktionen.

Beweis: "$\Longrightarrow$" $\varepsilon > 0$ gegeben - konstruiere eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ $\Longrightarrow$ (Cauchy für Grenzwerte)

zu jedem $c \in [a, b]$ gibt es $I_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ mit

$$(*) \qquad |\, f(x) - f(y)\, | < \varepsilon$$

für alle $x, y \in I_\delta(c)$ mit $x, y < c$ oder $x, y > c$.

(ist c Randpunkt, so hat man nur eine der beiden Möglichkeiten)

$[a, b]$ kompakt und $[a, b] \subset \bigcup\limits_c I_\delta\,(c) \Longrightarrow [a, b] \subset I_{\delta_1}\,(c_1) \cup \ldots \cup I_{\delta_n}\,(c_n)$

ordne nun $c_1, \ldots, c_n$ und die Endpunkte von $I_{\delta_\ell}\,(c_\ell)$ der Größe nach $\Longrightarrow$ Zerlegung $Z = \{a = x_\circ < \ldots < x_N = b\}$ von $[a, b]$.

Fixiere $z_j \in (x_j,\, x_{j+1})$ beliebig und setze

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(z_j), & x \in (x_j, x_{j+1}) \\ f(x_j), & x = x_j \end{cases} , x \in [a, b].$$

Beh.: $|\, \varphi(x) - f(x)\, | \leq \varepsilon$ auf $[a, b]$.

denn: $x = x_j$

x verschieden von allen $x_\circ, \ldots, x_N$: $\Longrightarrow x \in (x_j, x_{j+1})$ für genau ein j;
offenbar: $(x_j,\, x_{j+1}) \subset U_{\delta_\ell}\,(c_\ell)$ für ein passendes ℓ

es gilt: $\varphi(x) = f(z_j)$ mit $z_j \in (x_j, x_{j+1})$

$\Longrightarrow$ x und z_j beide links oder rechts von c_ℓ

$\underset{*}{\Longrightarrow}$ $|\, f(x) - f(z_j)\, | < \varepsilon$, also $|\, f(x) - \varphi(x)\, | < \varepsilon$

Es folgt: $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$.

"$\Longleftarrow$": Sei $c \in [a, b)$

z.Z.: $\lim\limits_{x \downarrow c} f(x)$ existiert

(alle anderen Fälle gehen analog!)

Cauchy Kriterium: Beh. $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit
$|\, f(x) - f(y)\, | < \varepsilon$ für alle
$x, y \in (c, c + \delta)$.

$\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow$ $\exists\, \varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|f-\varphi\| \leq \varepsilon/3$
φ hat als T.F. rechtsseitigen Limes α, d.h. $\exists\, \delta > 0$ mit

$$|\,\varphi(x)-\alpha\,| < \varepsilon/3 \quad \forall\, x \in (c, c+\delta)$$

bwz. $|\,\varphi(x)-\varphi(y)\,| < \varepsilon/3 \quad \forall\, x,y \in (c,c+\delta)$ nach Cauchy

$$\begin{array}{rcccccc} \Longrightarrow \quad |f(x)-f(y)| & \leq & |f(x)-\varphi(x)| & + & |\varphi(x)-\varphi(y)| & + & |\varphi(y)-f(y)\,| \\ & < & \varepsilon/3 & + & \varepsilon/3 & + & \varepsilon/3 \end{array}$$

für alle $x,y \in (c,c+\delta)$. $\square$

Bem.: Ist $f_n \in \mathcal{R}(\,[a,b]\,)$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|\, f_n - f\,\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

so folgt: $f \in \mathcal{R}\ (\,[a,b]\,)$.
(beachte: aus $\|f_n - f\| \to 0$ folgt $f_n(x) \to f(x)\ \forall\ x$)
(Die Menge der Regelfunktionen ist abgeschlossen bzgl. glm. Kvgnz.)

Beweis: wähle nach 12.3 $\varphi_n \in \mathcal{T}\ (\,[a,b]\,)$ mit $\|\varphi_n - f_n\| \leq 1/n$
Dann: $\|f-\varphi_n\| \leq \|f-f_n\| + \|f_n - \varphi_n\| \longrightarrow 0,$
Satz 12.3 gibt die Beh. (Übung: Einzelheiten ausführen!) $\square$

Definition 12.3 : *Sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion.*

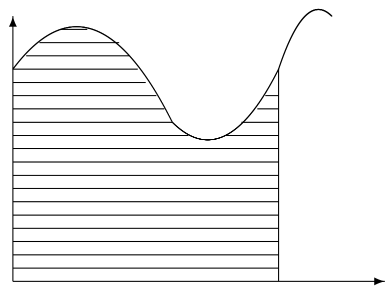
Das Integral von f über $[a,b]$ ist erklärt als

$$\boxed{\int_a^b f\ dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\ dx} \quad ,$$

wobei φ_n irgendeine Folge in $\mathcal{T}(\,[a,b]\,)$ ist miz $\|f-\varphi_n\| \longrightarrow 0$.

Bem.: (zur Schreibweise): $\int_y^b f,\ \int_a^b f(x)\ dx,\ \int_a^b f(t)\ dt\ldots$

Interpretation: "Flächeninhalt unter Graph (f)"



(Bem.: Das Riemann Integral ist allgemeiner !)

Wir müssen die Wohldefiniertheit von $\int_a^b f\ dx$ zeigen:

Gelte $\|\varphi_n - f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \| \int_a^b \varphi_n\ dx - \int_a^b \varphi_m\ dx \mid \underset{12.1}{=}$

$$| \int_a^b (\varphi_n - \varphi_m)\ dx | \underset{12.1}{\leq} \| \varphi_n - \varphi_m \| \cdot (b-a)$$

$\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{N} : \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \varepsilon \quad \forall\ n, m \leq N$

(denn $\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|\varphi_m - f\|$).

Also: $\left\{ \int_a^b \varphi_n\ dx \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, d.h. konvergent in $\mathbb{C}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\ dx$ hängt nicht von der Approximation ab: gilt $\|\Psi_n - f\| \to 0$,

so folgt $\|\varphi_n - \Psi_n\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|f - \Psi_n\| \longrightarrow 0$ und daher

$$\left| \int_a^b \varphi_n\ dx - \int_a^b \Psi_n\ dx \right| \leq \|\varphi_n - \Psi_n\| \cdot (b-a) \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Folgerung:

$$\boxed{\begin{array}{l} f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{stetig,} \\[1em] f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{monoton oder BV} \\[1em] \Longrightarrow \quad \int_a^b f\ dx \quad \text{existiert} \end{array}}$$

Anmerkung: $\int_a^b f\ dx$ ist nur für Regelfunktionen f erklärt,

also z.B. nicht für $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, \in \mathbb{Q} \\ 0,\ \text{sonst} \end{cases}$.

Rechenregeln für das Integral einer T.F. $\Longrightarrow$

Satz 12.4 : *(Eigenschaften des Integrals* $\int_a^b : \mathcal{R}\ ([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$)

Seien $f, g \in \mathcal{R}\ ([a,b]),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(i) *Linearität:* $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx \ = \ \alpha \cdot \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx.$

(ii) *Abschätzung:* $|\int_a^b f\ dx| \ \leq \ \int_a^b |f|\ dx \ \leq \ \|f\| \cdot (b-a).$

(iii) *Monotonie:* f, g *reell,* $f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f\ dx \ \leq \ \int_a^b g\, dx.$

Bem.: 1) $f \in \mathcal{R}\ ([a,b]) \Longrightarrow |f| \in \mathcal{R}\ ([a,b])$, so dass $\int_a^b |f|\ dx$ Sinn macht.

2) $\boxed{f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{Regelfunktion} \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{beschränkt,}}$

d.h. $\|f\| \ = \ \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty.$

(**Beweis v. 2)**: x_n Folge in $[a,b]$ mit $|f(x_n)| \longrightarrow \infty$

$[a,b]$ kompakt, also $\exists\ c \in [a,b]$ mit $x_n' \longrightarrow c$ für Teilfolge (Bolzano - W.)

zeige: $|f(x_n')| \longrightarrow \infty$ widerspricht der Existenz einseitiger Limiten in c)

Beweis von Satz 12.4:

Wähle

i) $\varphi_n, \Psi_n \in \mathcal{T}([a,b]),\ \|\varphi_n - f\| \longrightarrow 0,\ \|\Psi_n - g\| \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow \quad \|(\alpha\varphi_n + \beta\Psi_n) - (\alpha f + \beta g)\| \longrightarrow 0$ und $\alpha\varphi_n + \beta\Psi_n \in \mathcal{T}([a,b])$

Also: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx \ = \ \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\Psi_n)\, dx \overset{\text{Satz 12.1}}{=}$

$$\alpha \int_a^b \varphi_n\ dx + \beta \int_a^b \Psi_n\ dx \ = \ \alpha \int_a^b f\ dx + \beta \int_a^b g\ dx.$$

ii) $\|\varphi_n - f\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \| \, |\varphi_n| - |f| \, \| \to 0$ und $\|\varphi_n\| \to \|f\|$

und $\left| \int_a^b \varphi_n \, dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n| \, dx \leq \|\varphi_n\| \cdot (b-a)$

Grenzübergang $n \to \infty$ in dieser Ungleichung ergibt Beh.

$\Big($ (Anmerkung: $\Big| |\varphi_n(x)| - |f(x)| \Big| \leq |\varphi_n(x) - f(x)|$ bilde sup

$$\Longrightarrow \quad \| \, |\varphi_n| - |f| \, \| \leq \|\varphi_n - f\|;$$

außerdem: $|\varphi(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \|f\| + \|f - \varphi_n\|$

$$\left.\begin{array}{rl} \Longrightarrow & \|\varphi_n\| \leq \|f\| + \|f - \varphi_n\| \\ \text{und analog} & \|f\| \leq \|\varphi_n\| + \|f - \varphi_n\| \end{array}\right\} \Longrightarrow \|\varphi_n\| \longrightarrow \|f\| \Big)$$

(iii) $\exists \; \varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|\varphi_n - f\| \longrightarrow 0$

$$\underset{f \text{ reellwertig}}{\Longrightarrow} \quad \|\mathrm{Im}\, \varphi_n\| \longrightarrow 0, \; \| \mathrm{Re}\, \varphi_n - f\| \longrightarrow 0$$

also: Re φ_n <u>reelle</u> Treppenfkt mit $\| \mathrm{Re}\, \varphi_n - f\| \longrightarrow 0$

nehme also direkt an: φ_n, Ψ_n <u>reelle</u> T.F. mit $\|\varphi_n - f\| \longrightarrow 0$, $\|\Psi_n - g\| \longrightarrow 0$

$$\text{setze} \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}_n &:= \varphi_n - \|f - \varphi_n\| \leq f \\ \tilde{\Psi}_n &:= \Psi_n + \|g - \Psi_n\| \geq g \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \tilde{\varphi}_n, \tilde{\Psi}_n \in \mathcal{T}([a,b])$, $\|\tilde{\varphi}_n - f\| \longrightarrow 0$, $\|\tilde{\Psi}_n - g\| \longrightarrow 0$,

$\tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\Psi}_n$, so dass $\int_a^b \tilde{\varphi}_n \, dx \leq \int_a^b \tilde{\Psi}_n \, dx$

nun benutze Satz 12.1.

$\square$

Satz 12.5 *:* *(<u>Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen</u>)*

Sei $[a,c]$ *kompaktes Intervall,* $a < b < c$, *und* $f \in \mathcal{R}([a,c])$
Dann gilt:

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx,$$

wobei rechts die Integrale der Regelfunktionen $f|_{[a,b]}$ *und* $f|_{[b,c]}$ *stehen.*

Beweis: 1) $\varphi \in \mathcal{T}[[a,c]]$.
also $\varphi \equiv c_\ell$ auf $(x_\ell, x_{\ell+1})$ für eine Zerlegung $\{a = x_\circ < \ldots < x_n = c\}$ von $[a,c]$.

Sei etwa $b \in (x_\ell, x_{\ell+1}) \Longrightarrow$

$$Z' := \{a = x_\circ < \ldots < x_\ell < b < x_{\ell+1} < \ldots < x_N\}$$

ist Zerlegung von $[a,c]$ zusammengesetzt aus den Zerlegungen

$\{a = x_\circ < \ldots < x_\ell < b\}$ von $[a,b]$,

$\{b < x_{\ell+1} < \ldots < x_N\}$ von $[b,c]$

Daraus folgt $\int_a^b \varphi dx + \int_b^c \varphi dx = \int_a^c \varphi dx$ trivial.

Ist b Teilpunkt von Z, so argumentiert man analog.
2) $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b]) \Longrightarrow \exists\, \varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \longrightarrow 0$

analog: $\Psi_n \in \mathcal{T}([b,c])$ mit $\sup\limits_{x\in[b,c]} |f(x) - \Psi_n(x)| \longrightarrow 0$.

$$\text{Setze } \lambda_n(x) := \left\{\begin{array}{ll} \varphi_n(x) & \text{auf } [a,b] \\ \Psi_n(x) & \text{auf } (b,c] \end{array}\right\} \in \mathcal{T}\ ([a,c]).$$

Dann: $\sup\limits_{x\in[a,c]} |f - \lambda_n| \longrightarrow 0 \Longrightarrow$ <u>Beh.</u> mit 1) für λ_n

<u>Konvention</u>: 1) $\int_a^a f dx = 0$

2) $a < b,\ f \in \mathcal{R}((a,b]) \Longrightarrow \int_b^a f dx := -\int_a^b f dx$.

<u>Folgerung</u> : $\left|\begin{array}{l} \int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx \\ \text{gilt für alle } a,b,c \in \mathbb{R} \end{array}\right|$

Die Monotonie des Integrals kann folgendermaßen verschärft werden.

Satz 12.6 *:* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei stetig mit* $f \geq 0$.

Gilt an einer Stelle $x_\circ \in [a, b]$ $f(x_\circ) > 0$, *so folgt:* $\int_a^b f(x)dx > 0$.
M.a.W.: $f \geq 0$ *stetig mit* $\int_a^b f dx = 0 \Longrightarrow f = 0$.

Bem.: Für Regelfunktionen gilt das natürlich nicht, denn

$$f = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{array} \right\} \text{ hat über } [0,1] \text{ Integral } 0.$$

Beweis: o.E. $x_\circ \in (a, b) \Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_\circ)$ auf $(x_\circ - \delta, x_\circ + \delta) \subset [a, b]$

Dann ist

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_\circ), & x \in (x_\circ - \delta, x_\circ + \delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aus $\mathcal{T}([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$ mit $f \geq \varphi$ auf $[a, b]$

Monotonie $\Longrightarrow \int_a^b f dx \geq \int_a^b \varphi dx = 2\delta \cdot \frac{1}{2} f(x_\circ) = \delta \cdot f(x_\circ) > 0$. □

Berechnung von Integralen mit Riemannschen Summen:

bis jetzt: $\int_a^b f dx = \lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b \varphi_n \, dx$ für eine Folge $\{\varphi_n\}$ in $\mathcal{T}([a, b])$, die gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{R}([a, b])$ konvergiert.
Wie bestimmt man konkret eine solche Folge?
einfacher: finde $\Psi_n \in \mathcal{T}([a, b])$, so dass zwar $\int_a^b \Psi_n dx \longrightarrow \int_a^b f dx$ gilt, aber nicht unbedingt $\|\Psi_n - f\| \longrightarrow 0$.

Definition 12.4 *:* *Riemannsche Summen*

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $Z := \{a = x_\circ < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ *eine Zerlegung von* $[a,b]$*. Es seien* $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *beliebige "Zwischenstellen"- Dann heißt*

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta x_k := \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\ (x_k - x_{k-1})$$

Riemannsche Summe zur Zerlegung Z *und den Stützstellen* z_k*.*

$\delta_Z := \max\ \{\Delta x_k : k = 1, \ldots, n\}$ *Feinheit von* Z*.*

Satz 12.7 *:* *Approximation durch Riemannsche Summen*

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *Regelfunktion. Dann findet man zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *wie folgt:*

Für jede Zerlegung $Z = \{a = x_\circ < \ldots < x_n = b\}$ *mit Feinheit* $< \delta$ *und jede Wahl von Stützstellen* z_k *ist*

$$\left| \int_a^b f dx \ - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\ \Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Bem.:

Z_n Folge von Zerlegungen mit Feinheit $\longrightarrow 0$

$S_n =$ Riemannsche Summe zu Z_n bei beliebiger Wahl von Stützstellen

$\Longrightarrow \int_a^b f dx \ = \ \lim\limits_{n\to\infty} S_n.$

Beweis:

a) $f \in \mathcal{T}(\,[a,b]\,)$

Fall 1: $f \equiv c$ auf $[a,b]$

trivial, da $\int_a^b f dx = \sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$ für jede Zerlegung Z mit Feinheit $< \delta := b - a$.

Fall 2: f nicht konstant

$m := \#$ Sprungstellen von f

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{4m\|f\|}$

Sei $Z = \{a = x_\circ < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a,b]$ mit $\delta_z < \delta$

wähle Stützstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_a^b f dx \overset{12.5}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left[f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx \right]$$

Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixiert:

i) $[x_{k-1}, x_k]$ enthält keine Sprungstelle
$\Longrightarrow f \equiv f(z_k)$ auf $[a,b]$, so dass $f(z_k) \cdot \Delta x_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx$

ii) $[x_{k-1}, x_k]$ enthält mindestens eine Sprungstelle: man schätzt grob ab:

$$\left| f(z_k)\Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx \right| \leq 2 \cdot \|f\| \cdot \Delta x_k.$$

Da eine Sprungstelle höchstens zu zwei Intervallen $[x_{\ell-1}, x_\ell]$, $[x_{k-1}, x_k]$ gehört (nämlich dann, wenn sie gemeinsamer Randpunkt ist), gibt es höchstens $2m$ Intervalle, für die ii) eintritt.

$$\Longrightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k - \int_a^b f dx \right| \leq 2 \cdot m \cdot 2\|f\| \cdot \delta_z < \varepsilon$$

nach Def. von δ.

b) $f \in \mathcal{R}([a,b])$:

Wähle $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Nach a) gibt es $\delta > 0$ mit

$$* \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b \varphi dx \right| < \varepsilon/3$$

für alle Zerlegungen Z mit $\delta_z < \delta$ und beliebige Wahl von $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Sei Z eine solche Zerlegung mit beliebiger Wahl z_k von Stützstellen $\Longrightarrow$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\cdot\Delta x_k - \int_a^b f dx\right| \leq$$

$$\left|\int_a^b f dx - \int_a^b \varphi dx\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k - \int_a^b \varphi dx\right| \leq$$

$$\|f-\varphi\|\cdot(b-a) + \left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} \varphi(z_k)\Delta x_k\right|$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi(z_k)\Delta x_k - \int_a^b \varphi dx\right|$$

$$\underset{*}{<} 2\cdot\|f-\varphi\|(b-a) + \varepsilon/3 < \tfrac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

□

Bem.: 1) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ Regelfunktion.
$Z = \{a = x_\circ < \ldots < x_n = b\}$ Zerlegung, $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ definiert eine Treppenfunktion φ durch

$$\varphi(x) \equiv f(z_k) \text{ auf } [x_{k-1}, x_k),\ k = 1,\ldots,n.$$

Es gilt: $\int_a^b \varphi dx \longrightarrow \int_a^b f dx$ bei $\delta_z \longrightarrow 0$, aber nicht unbedingt $\|\varphi - f\| \longrightarrow 0$.

2) <u>Verallgemeinerung des Integralbegriffs</u>: <u>Riemann-Integral</u>

Z = Zerlegung von $[a,b]$, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ beschränkt

$$\text{Obersumme} := \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1},x_k]} f\cdot\Delta x_k = O(Z)$$

$$\text{Untersumme} := \sum_{k=1}^{n} \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\cdot\Delta x_k = U(Z)$$

$O(Z)\ \Big(U(Z)\Big)$ <u>monoton fallend (wachsend)</u>, wenn δ_z kleiner wird

$\Longrightarrow \lim\limits_{S_z\to 0} O(Z)$ und $\lim\limits_{\delta_z\to 0} U(Z)$ existieren.
<u>Sind die Grenzwerte gleich, so nennt man f auf $[a,b]$ Riemann integrierbar</u>

Es gilt: $\boxed{f \text{ Regelfunktion } \Longrightarrow f \text{ Riemann integrierbar}}$

Dagegen ist $f(x) := \begin{cases} 0, x = 0 \\ \sin 1/x, x \neq 0 \end{cases} \notin \mathcal{R}\ ([0,1])$, aber Riemann integrierbar auf $[0,1]$.

Mit Hilfe des Riemann Integrals läßt sich "das Integral" auch für Funktionen mit gewissem Oszillationsverhalten definieren. □

Beispiele: Integralbestimmung mit Riemannschen Summen

1) $\int_0^b x^2 dx = ?\ (b > 0)$

wähle äquidistante Zerlegung $x_k := \frac{k}{n}\, b,\ k = 0, \ldots, n$ und setze $z_k = x_k$

Dann
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (\tfrac{k}{n})^2\, b^2 \cdot \Big(\tfrac{k}{n}\, b - \tfrac{k-1}{n}\, b \Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot b^3 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= \frac{b^3}{n^3}\, \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b^3}{3}$$

allgemeiner: $m \in \mathbb{N},\ b > 0 \Rightarrow \boxed{\int_0^b x^m\, dx = \frac{b^{m+1}}{m+1}}$

2) $\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = ?\quad (0 < a < b)$

die Zerlegung von oben ist ungünstig, besser:

$x_k := (\frac{b}{a})^{k/n} \cdot a,\ k = 0, \ldots, n,\ z_k := x_{k-1} \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a}\, (\tfrac{a}{b})^{\frac{k-1}{n}}\, a \cdot \Big((\tfrac{b}{a})^{k/n} - (\tfrac{b}{a})^{\frac{k-1}{n}} \Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big((\tfrac{b}{a})^{1/n} - 1 \Big) = n \cdot \Big((\tfrac{b}{a})^{1/n} - 1 \Big)$$

Es gilt $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \Big((\frac{b}{a})^t - 1 \Big) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \Big(e^{t \cdot \ln \frac{b}{a}} - 1 \Big) = \ln b/a$ nach L'Hospital,

also $\Big($ "$t = 1/n$" $\Big)$: $\boxed{\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b/a}$.

□

Die Berechnung von Integralen via Riemannscher Summen ist nur in ganz einfachen Fällen praktisch ausführbar. Allerdings kann man mit R-Summen Ungleichungen zwischen Integralen beweisen:

Notation: $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktion, $p \geq 1$. Dann heißt

$$\|f\|_p := \Big(\int_a^b |f|^p \, dx \Big)^{1/p}$$

die p-Norm von f.

Bemerkung: $f \in \mathcal{R}\,([a, b]) \implies |f|^p \in \mathcal{R}([a, b])$.

Man hat

Höldersche Ungleichung: $f, g \in \mathcal{R}([a, b]),\ p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\implies \int_a^b |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ liest sich dies also:

$$\int_a^b |f \cdot g| \, dx \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2 \, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2 \, dx}$$

(Cauchy-Schwarz Ungleichung für Integrale)

Zum Beweis beachte die

Hölde'sche Ungl. für Summen:

$$* \quad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k| \cdot |b_k| \leq \Big(\sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|^p \Big)^{1/p} \Big(\sum\limits_{k=1}^{N} |b_k|^q \Big)^{1/q} \\ a_k, b_k \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

$*$ sieht man so:

für $a, b > 0$ ist $\ln(\frac{1}{p}\, a + \frac{1}{q}\, b) \geq \frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b$, da $\ln$ konkav -

also: $\ln(\frac{1}{p}\,a + \frac{1}{q}\,b) \;\geq\; \ln(a^{1/p} \cdot b^{1/q}) \quad \overset{\exp}{\Longrightarrow}$

$$** \quad a^{1/p}\, b^{1/q} \;\leq\; \tfrac{1}{p}\, a + \tfrac{1}{q}\, b,$$

was sich auch aus der allg. Ungl. zwischen arith. und geom. Mittel ergibt.

$**$ gilt auch für a oder $b = 0$.

$$** \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} |z_k|^{1/p}\, |w_k|^{1/q} \;\leq\; \tfrac{1}{p} \sum_{k=1}^{N} |z_k| + \tfrac{1}{q} \sum_{k=1}^{N} |w_k| \quad \text{für beliebig } z_k, w_k \in \mathbb{C}.$$

Ersetze z_k, w_k durch $z_k \Big/ \sum |z_\ell|,\ w_k \Big/ \sum |w_\ell| \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{N} |z_k|^{1/p}\, |w_k|^{1/q} \;\leq\; \Big(\sum_{k=1}^{N} |z_k|\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{N} |w_k|\Big)^{1/q}.$$

Diese Ungleichung wendet man schließlich an auf $z_k = |a_k|^p, w_k = |b_k|^q$.

Seien nun $f, g \in \mathcal{R}\,([a,b]\,)$. Betrachte äquidistante Zerlegung Z_n von $[a,b]$ mit Schrittweite $\frac{b-a}{n} =: \Delta_n$ und beliebigen Zwischenpunkten $\xi_k^n,\ n \in \mathbb{N},\ k = 1, \ldots, n$. Aus $*$ folgt:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k^n)| \cdot |g(\xi_k^n)| \cdot \Delta_n \;\leq\; (\Delta_n = \Delta_n^{1/q} \cdot \Delta_n^{1/p})$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k^n)|^p \Delta_n\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |g(\xi_k^n)|^q\, \Delta_n\Big)^{1/q}$$

Das sind drei Riemannsche Summen, mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Wir notieren noch

Satz 12.8 : *(Mittelwertsatz der Integralrechnung)*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $p \in \mathcal{R}\,([a,b]\,)$ *sei* ≥ 0.

Dann gibt es ein $y \in [a,b]$ *mit*

$$\boxed{\int_a^b f(x)p\,(x),\ dx \;=\; f(y)\ \int_a^b p\,(x)\, dx.}$$

Im Spezialfall $p \equiv 1$ *hat man*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; f(y)(b-a).$$

Beweis: Es gilt die Abschätzung (wegen $p \geq 0$)

$$\min_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p\ (x)\, dx \ \leq \ \int_a^b f\ (x)\, p\ (x)\, dx \ \leq \ \max_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p\ (x)\, dx.$$

Ist $\int_a^b p\ (x)\, dx = 0$, so folgt $\int_a^b f(x) p\ (x)\, dx = 0$, so dass y beliebig gewählt werden kann. Andernfalls folgt

$$\int_a^b p\ (x)\, f(x)\ dx \Big/ \int_a^b p\ (x)\, dx \quad \in [\min f, \max f],$$

und das Intervall rechts kommt nach dem ZWS als f-Bild vor. □

Wie wir gesehen haben, ist die Integralberechnung mit Riemannschen Summen mühsam. Zentrales Werkzeug ist

Satz 12.9 : <u>*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*</u>

Es sei $f \in \mathcal{R}\ ([a,b]\,)$. *Man definiert* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch*
$*$ $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$. *Dann gilt:*

(i) F *ist Lipschitz auf* $[a,b]$: $|F(x) - F(y)| \ \leq \ \|f\| \cdot |x-y|$.

(ii) F *ist in allen* $x \in (a,b)$ *links- und rechtsseitig differenzierbar, in den Randpunkten nur einseitig mit* $F'_{\pm}(x) = f(x\pm)$.

$$\boxed{\text{Ist } f \in C^{\circ}(\,[a,b]\,), \text{ so gilt } F \in C^1(a,b) \text{ mit } F' = f.}$$

Beweis: Die letzte Aussage folgt aus (ii)

(i) $f \in \mathcal{R}\ ([a,b]\,) \implies \int_a^x f(t)\, dt$ existiert für alle $x \in [a,b]$, d.h. F ist gemäß $*$ wohldefiniert mit

$$|F(x) - F(y)| \ = \ \left| \int_a^x f(t)\, dt \ - \ \int_a^y f(t)\, dt \right| \ = \ \left| \int_y^x f(t)\, dt \right| \ \leq \ \|f\| \ \cdot \ |x-y|.$$

(ii) Sei $x < b$. Zeige: $F'_+(x) = f(x+)$.

Sei $h > 0$ mit $x + h \ \leq \ b \implies$

$$F(x+h) - F(x) \underset{\text{s.o.}}{=} \int_x^{x+h} f(t)\, dt,$$

$$f(x+) \cdot h = \int_x^{x+h} f(x+)\, dt \quad \text{(Integral der konst. Fkt.)}$$

$$\Longrightarrow \left| \tfrac{1}{h} \, (F(x+h) - F(x)) - f(x+) \right| \;\leq\; \tfrac{1}{h} \int_x^{x+h} \; |f(t) - f(x+)| \, dt$$

$\varepsilon > 0$ gegeben $\Longrightarrow \; \exists \; \delta > 0 : \; |f(t) - f(x+)| < \varepsilon$ für alle $t \in [x, x+\delta)$

<u>Übung:</u> $\varphi \in \mathcal{R}([a,b]), \; I \subset \{\text{Sprungstelle von } \varphi\}$

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), \; x \notin I \\ \varphi(x+), \; x \in I \quad (\text{oder } \varphi(x-)) \end{cases} \quad , \; x \in [\alpha, \beta]$$

$$\Longrightarrow \tilde{\varphi} \in \mathcal{R}([a,b]) \text{ und } \int_\alpha^\beta \varphi \, dt \;=\; \int_\alpha^\beta \tilde{\varphi} \, dt$$

Also ist $\int_x^{x+h} \left| f(t) - f(x+) \right| dt \;=\; \int_x^{x+h} \; \Psi(t) \, dt,$

$$\Psi(t) = \begin{cases} o, \; t = x \\ |f(t) - f(x+)|, \; x < t \leq x+h, \end{cases}$$

und $0 \leq \Psi(t) \; < \; \varepsilon$ für $h \leq \delta \quad \Longrightarrow$

$$\left| \tfrac{1}{h} \left(\; F(x+h) - F(x) \; \right) - f(x+) \right| \;\leq\; \tfrac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon \, dt \;=\; \varepsilon. \qquad \square$$

Korollar: Sei I ein offenes Intervall $\subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{C}$ <u>stetig</u>.
<u>Dann hat f eine Stammfunktion</u> $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$, z.B.

$$x \mapsto \int_{x_\circ}^x f(t) \, dt$$

für irgendeine Stelle $x_\circ \in I$.

Notation: <u>unbestimmtes Integral zu</u> $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (stetig)
bekanntlich: F_1, F_2 Stammfkten zu $f \;\Longrightarrow\; F_2 \;=\; F_1 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$

also: erhalte alle Stammfunktionen zu f durch Wahl einer bestimmten und Addition einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$

symbolisch :
$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{"das unbestimmte Integral"}} := \{\underbrace{F}_{\text{fixierte Stammfkt}} + c :\ c \in \mathbb{C}\}$$

oftmals auch: $\int f(x)\,dx = F + c,\ c \in \mathbb{C}$

z.B.:

$$\int x^a \cdot dx = \tfrac{1}{a+1}\, x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad x > 0$$

$$\int e^x \; dx = e^x + c \quad ,$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c\,.$$

Da sich alle Stammfunktionen nur um Konstanten unterscheiden, folgt

Korollar (zum Hauptsatz; Integralberechnung):

> Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $F : I \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f. Dann gilt für alle $a, b \in I$
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(y) \ (=: F|_a^b\,).$$

Man berechnet also Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ durch "Bestimmen" einer Stammfunktion zu F.

[**Warnung !** Das heißt nicht, dass man Stammfunktionen immer durch geschlossene Formeln angeben kann.]

Bspl.: $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b/a \quad , 0 < a < b.$