§2

Die Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Ausgangspunkt: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ **Menge der natürlichen Zahlen**
schrittweise Konstruktion $1 := \{\emptyset\},\ 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ 3 := \{\emptyset, \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots$

(also: $n + 1 := n \cup \{n\}$) J.v. Neumann 1923

$\mathbb{N}$ wird versehen mit zwei Operationen (das sind Abbildungen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{llcll} + : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m, n) & \mapsto & m + n \in \mathbb{N} & \text{Addition} \\ \cdot : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m, n) & \mapsto & m \cdot n \in \mathbb{N} & \text{Multiplikation} \end{array}$$

(den Malpunkt läßt man oft weg)

Außerdem gibt es eine **Ordnungsrelation** "$<$" mit den Eigenschaften

(1) $n < n + 1$. (lies: kleiner als)

(2) "Vergleichbarkeit" für je zwei natürliche Zahlen n, m gilt:
entweder $m < n$ oder $n < m$ oder $n = m$.

(wie üblich schreibt man: $m \leq n \;:\Longleftrightarrow\; m < n$ oder $m = n$,

$$m > n \;:\Longleftrightarrow\; n < m$$

$$m \geq n \;:\Longleftrightarrow\; n \leq m)$$

Die Operation "$+$" , "$\cdot$" lassen sich auch formal definieren, wenn man das tut, lassen sich die bekannten Rechenregeln beweisen:

$\forall\, n, m,\, k \in \mathbb{N}$

$(A1)$	$n+m=m+n$	Komm.
$(A2)$	$n+(m+k)=(n+m)+k$	Assoz.
$(M1)$	$n\cdot m=m\cdot n$	
$(M2)$	$n\cdot(m\cdot k)=(n\cdot m)\cdot k$	
$(M3)$	$n\cdot 1=n$	$\leftarrow$ 1 ist multiplikativ neutral
(D)	$n\cdot(m+k)=\underbrace{n\cdot m\ +\ n\cdot k}$ Vereinbarung: Punkt- vor Strichrechnung	Distributivgesetz
(01)	$m>n\Rightarrow m+k>n+k$	
(02)	$m>n\Rightarrow m\cdot k>n\cdot k.$	

Von zentraler Bedeutung ist im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen
Das Prinzip der vollständigen Induktion: "Wie beweist man unendlich viele Behauptungen?"

Zu beweisen ist exemplarisch der folgende

Satz: Ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so gilt $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
(Wir benutzen hier das Symbol $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ohne weiteren Kommentar.)

Für jede natürliche Zahl n wird also behauptet, dass die Aussage

$$A(n):\quad \sum_{k=1}^{n} k \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

eine wahre Aussage ist. (Das Summenzeichen dient zur Abkürzung von $1+2+3+\ldots+n$.)
Wie geht man vor?

(a) $A(1)$ ist eine wahre Aussage, da ja $\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$.

(b) Nehmen wir nun an, dass $A(n)$ für ein n wahr ist. Wie steht es dann mit $A(n+1)$?

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$

$$(1+2+\ldots+n)+(n+1) \overset{\text{Voraussetzung}}{=}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\cdot(\tfrac{n}{2}+1)=\tfrac{1}{2}\,(n+1)(n+2),$$

also ist $A(n+1)$ wahr.

$\longrightarrow$ Wie interpretiert man (a), (b)?

$A(1)$ wahr $\Longrightarrow$ (gemäß b) mit $n = 1$) $A(2)$ wahr $\Longrightarrow$ (b) mit $n = 2$)
$A(3)$ wahr , usw.

Sind also (a), (b) geprüft, so kommt man schrittweise voran und sieht, dass $\mathbf{A(n)}$ für alle natürlichen Zahlen richtig ist.
Man fordert deshalb für den Zahlbereich $\mathbb{N}$ die Gültigkeit von
Prinzip der vollständigen Induktion:

Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.
Alle Aussagen $A(n)$ sind richtig, wenn man zeigen kann:

(I) (Induktionsanfang) $A(1)$ ist richtig.

(II) (Induktionsschluß) Aus der Hypothese " $A(n)$ wahr" folgt die Gültigkeit von $A(n+1)$.

Alternative Formulierung:

Sei $M \subset \mathbb{N}$. Es gilt $M = \mathbb{N}$, falls:

(I) $1 \in M$

(II) Für jedes beliebige Element n von M ist auch $n + 1 \in M$.

M.a.W.: Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die die 1 enthält und mit jedem Element auch dessen Nachfolger, ist notwendig gleich $\mathbb{N}$.

Bemerkungen:

1) Man kann das Induktionsprinzip wie folgt modifizieren:

(I)* $A(n_\circ)$ ist richtig für ein $n_\circ \in \mathbb{N}$

(II)* $A(n)$ richtig $\Rightarrow A(n+1)$ richtig, $n \geq n_\circ$

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_\circ$.

Beispiel: " $A(n):\ n^2 \geq n + 4$ " gilt erst ab $n_\circ = 3$.

Beweis:

(I)* $3^2 = 9 \geq 7$

(II)* Sei $n^2 \geq n + 4$ für ein $n \geq 3$. Dann ist

$$(n+1)^2 = (n+1)(n+1) = n^2 + 2n + 1 \underset{\text{Voraussetzung}}{\geq}$$

$$n + 4 + 2n + 1 \geq n + 5 + 2n > n + 5,$$

und die Ungleichung $(n+1)^2 \geq n + 5$ wird behauptet.

2) <u>Konvention:</u> Seien $m \leq n$ natürliche Zahlen, für $k = m, \ldots, n$ seien Zahlen a_m, a_n gegeben

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \; := \; a_m + \ldots + a_n \quad (\textbf{Summe} \text{ von } a_m, \ldots, a_n)$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k \; := \; a_m \cdot \ldots \cdot a_n \quad (\textbf{Produkt von } a_m, \ldots, a_n)$$

3) <u>noch ein Beispiel:</u> für $n \in \mathbb{N}$ und jede Zahl $x \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

(Hierbei: $x^k = x \ldots x$ k-faches Produkt)

Beweis:
$n = 1$ (Induktionsanfang) Es ist
$\frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1 + x \Longrightarrow \frac{1-x^2}{1-x} - 1 = x = \sum\limits_{k=1}^{1} x^k.$

Induktionsschluß:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k + 1 = \sum_{k=1}^{n} x^k + 1 + x^{n+1} \underset{\text{Vor.}}{=}$$

$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1}{1-x}(1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}) = \frac{1}{1-x}(1 - x^{n+2}),$

also gilt die Formel auch für $n + 1$. □

Anwendungen:
Konstruktion durch vollständige Induktion: das Rekursionsprinzip

Ziel: man möchte jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element $f(n) \in X$ aus einer Menge X zuordnen (also eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ definieren)

Es reicht zu sagen, welchen Wert $f(1)$ haben soll und eine Formel (Rekursionsvorschrift) anzugeben, die

$$f(n+1) \text{ aus } f(1), \ldots, f(n), n$$

bestimmt.

Beispiel: x eine Zahl

$$f(1) := x, \quad f(n+1) := x \cdot f(n) \quad (f(2) = x \cdot f(1) = x^2 \ldots)$$

ist die Rekursionsformel für die Potenzen x^n.

Eine weitere Anwendung des Induktionsprinzips ist

Satz 2.1 *(Existenz eines kleinsten Elements)*

Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer. Dann gibt es eine Zahl $k \in A$ mit $n \geq k$ für alle $n \in A$.
k heißt Minimum von A.

Beweis: Man setzt $W := \{n \in \mathbb{N} : n \leq m \text{ für alle } m \in A\}$.
Offenbar: $1 \in W$ (anschaulich: W = nat. Zahlen unterhalb von A)

Es gibt ein $k \in W$ mit $k+1 \notin W$, denn sonst wäre nach dem Induktionsprinzip $W = \mathbb{N}$. Das geht aber nicht: $W = \mathbb{N}$ würde ja bedeuten $m+1 \leq m$ für alle $m \in A$ (wähle in der Beschreibung von W $n = m+1$), und $A \neq \emptyset$ nach Vor.

Für dieses k nun $*$ $k \leq m$ $\forall\, m \in A$, da $k \in W$. Gemäß $k+1 \notin W$ findet man ein $m_\circ \in A$ mit $k+1 > m_\circ$.
Andererseits:

$$k \overset{*}{\leq} m_\circ < k+1,$$

so daß $k = m_\circ$ sein muß. Dies zeigt $k \in A$, also ist k das gesuchte minimale Element. $\square$

Mit Satz 2.1 können wir folgende nützliche Variante des Induktionsprinzips beweisen.

Satz 2.2 *Es sei $W \subset \mathbb{N}$ und $n_\circ$ eine natürliche Zahl. Es gelte:*

(i) $n_\circ \in W$

(ii) Aus $n_\circ, n_\circ + 1, \ldots, n \in W$ *folgt* $n + 1 \in W$.

Dann ist $W \supset \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_\circ\} =: \mathbb{N}_{n_\circ}$. *(Alle Zahlen* $\geq n_\circ$ *liegen in* W.*)*

Bem.: (ii) sagt aus, dass man beim Induktionsschluß nicht nur $n \in W$ annehmen darf, sondern sogar $m \in W$ für alle $n_\circ \leq m \leq n$, um daraus $n + 1 \in W$ abzuleiten.

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis (durch Widerspruch), indem wir annehmen, dass unsere Behauptung falsch ist, also $W \not\supset \mathbb{N}_{n_\circ} \Longrightarrow \exists\, n > n_\circ$ mit $n \notin W$.

Setze $A := \{m : m > n_\circ,\ m \notin W\} \neq \emptyset$. A besitzt nach Satz 2.1 ein kleinstes Element k.

D.h. Die Zahlen m mit $n_\circ \leq m \leq k - 1$ gehören nicht zu A, liegen also in W.

Vor.(ii) $\Rightarrow$ $k \in W$, Widerspruch zu $k \in A$. $\square$

Beispiel: (für das verallgemeinerte Induktionsprinzip)

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$$

definiert rekursiv eine Zahlenfolge.

Es gilt: $$\boxed{a_n = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} k,\ n \geq 2.}$$

Beweis: $a_2 = \sum\limits_{k=1}^{1} 1 \cdot a_1 = 1$, $\frac{1}{2} \prod\limits_{k=1}^{2} k = 1 \Rightarrow$ Beh. für $n = 2$.

Induktionsschluß: die Formel $a_m = \frac{1}{2} \prod\limits_{k=1}^{m} k$ sei richtig für alle $2 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k \cdot a_k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k \cdot a_k \\ &\underset{\text{Vor}}{=} 1 + \sum_{k=2}^{n} k \Big(\frac{1}{2} \prod_{\ell=1}^{k} \ell \Big) \end{aligned}$$

$$\Big(\text{Es gilt} \quad * \quad \sum_{k=2}^{n} k\Big(\prod_{\ell=1}^{k} \ell\Big) = \Big(\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell\Big) - 2 \Big)$$

$$\ldots \underset{*}{=} 1 + \tfrac{1}{2}\Big\{\Big(\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell\Big) - 2\Big\} = \tfrac{1}{2}\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell.$$

Nachzutragen bleibt $*$ für $n \geq 2$: **(separater Induktionsbeweis!)**

$$n = 2: \qquad \sum_{k=2}^{2} k \prod_{\ell=1}^{k} \ell = 2 \cdot 2, \Big(\prod_{\ell=1}^{3} \ell\Big) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$n \to n+1: \quad \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot \Big(\prod_{\ell=1}^{k} \ell\Big) = (n+1)\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell + \sum_{k=2}^{n} k \cdot \Big(\prod_{\ell=1}^{k} \ell\Big) \overset{\text{I.V.}}{=}$$

$$(n+1)\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell + \Big(\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell\Big) - 2 = (n+2)\Big(\prod_{\ell=1}^{n+1} \ell\Big) - 2 = \Big(\prod_{\ell=1}^{n+2} \ell\Big) - 2$$

□

Noch einige Namensgebungen

Definition 2.1 **Fakultäten**

$$\boxed{n! \quad := \prod_{k=1}^{n} k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ heißt n-Fakultät.

Rekursionsformel: $1! = 1,\ (n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$n!$ wird sehr schnell sehr groß: $2! = 2,\ 3! = 6,\ 10! = 3\ \ 628\ 800,$
$100\,! > 10^{157}$

Die Fakultäten spielen eine große Rolle in der <u>Kombinatorik</u>, z.B. gibt es $n!$ Möglichkeiten, n Personen auf n numerierte Sitzplätze zu verteilen. Exakt:

Satz 2.3 *Sei A eine Menge mit n beliebigen Elementen $a_1, \ldots, a_n$. Diese Elemente kann man in $n!$ verschiedene Reiehenfolgen bringen.*

anders formuliert: die Anzahl der bijektiven Abbildungen $\{1, \ldots, n\} \longrightarrow A$ beträgt $n!$

Beweis: $n = 1 : \ A = \{a\}$

$n \to n+1 :$ Sei $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, also $n+1$ elementig.

Setze a_{n+1} auf Platz 1 $\overset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow}$ es bleiben $n!$ Möglichkeiten für $a_1, \dots, a_n$

Setze a_{n+1} auf Platz 2 $\overset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow}$ es bleiben $n!$ Möglichkeiten für $a_1, \dots, a_n$

$\vdots$

Setze a_{n+1} auf Platz $n+1$ $\overset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow}$ es bleiben $n!$ Möglichkeiten für $a_1, \dots, a_n$

Gesamtzahl errechnet sich zu $(n+1) \cdot n = (n+1)!$ $\square$

Weiter in der Diskussion der Zahlbereiche $\to$

Die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2 \dots\}$ der ganzen Zahlen umfaßt $\mathbb{N}$ als echte Teilmenge und leistet folgendes:

Man kann in $\mathbb{Z}$ beliebig subtrahieren, d.h. zu gegebenen $n, m \in \mathbb{Z}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $m + x = n$.

Insbesondere existiert in $\mathbb{Z}$ ein additiv neutrales Element 0, d.h. $z + 0 = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}, +)$ ist also **abelsche Gruppe**.

Multiplikation und Ordnung übertragen sich in entsprechender Weise auf $\mathbb{Z}$.

$\longrightarrow$ eine konkrete Konstruktion ausgehend von $\mathbb{N}$ und den Axiomen der Mengenlehre ist möglich. $*$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erweitert $\mathbb{Z}$ wie folgt:

Für $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gibt es in $\mathbb{Q}$ eine eindeutige Lösung q von $m \cdot q = n$.

Schreibweise: $q = \frac{n}{m}$, $q = n \cdot m^{-1}$ etc.
(z.B. $4 \cdot q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$ oder 4^{-1})

$\longrightarrow$ auch hier gilt $*$

In § 3 definieren wir direkt die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ umfassen. Dort werden auch alle Axiome und Rechenregeln formuliert, so dass wir uns hier die Einzelheiten sparen können.

Vereinbarung: $0! = 1$

Definition 2.2 Binomialkoeffizienten

Seien $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *mit* $n \geq k$. *Dann sei (lies:* n *über* k*)*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Eigenschaften:

1) $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{n} = 1$

2) $$\boxed{1 \leq k \leq n \Longrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

$\Big($ mit der Konvention $\binom{\ell}{m} = 0$ falls $\ell < m\Big)$

Beweis: die Formel gilt für $k = n$

für $k < n$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} =$$

$$\frac{1}{(n-k)!\,k!}\Big\{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)\Big\} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ 0 \leq k \leq n.$

4) **Pascall'sches Dreieck** (vgl. 2))

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \leftarrow & \binom{0}{k} \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \leftarrow & \binom{1}{k} \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \leftarrow & \binom{2}{k} \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \leftarrow & \binom{3}{k} \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \leftarrow & \binom{4}{k}
\end{array}$$

Satz 2.4 *Für alle Zahlen* $a, b (\in \mathbb{R})$ *und Exponenten* $n \in \mathbb{N}$ *gilt die* **binomische Formel**

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$$

Folgerungen:

1) $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$

Beweis von Satz 2.4: $n = 1$ $\sum\limits_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\, b^k = a + b$ mit der Vereinbarung $x^\circ = 1$.

$n \to n+1:$ $(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k =$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}}_{= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}\, b^k} + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\}}_{=\binom{n+1}{k}} a^{n+1-k}\, b^k + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k.$$

□

Die Binomialkoeffizienten spielen bei kombinatorischen Problemen eine Rolle:

Satz 2.5 *Sei* A *eine Menge mit* $n \in \mathbb{N}$ *Elementen,* $0 \le k \le n$. *Dann gibt es* $\binom{n}{k}$ *Teilmengen von* A *mit* k *Elementen.*

<u>Idee</u> (Einzelheiten $\longrightarrow$ Übung):

Um k Elemente auszuwählten, hat man n Möglichkeiten für das erste, $n-1$ für das $2^{te}, \ldots,$ $n-k+1$ für das k^{te}, also insgesamt $n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$. Da aber jetzt die Anordnung keine Rolle spielt, muß man durch $k!$ teilen.
Ergebnis:

$$\frac{1}{k!}\, n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1) = \binom{n}{k}.$$

<u>Folgerung:</u> Die Gesamtzahl der Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.