§3

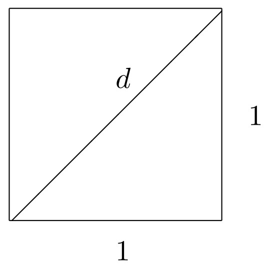
Die reellen Zahlen

Wir haben $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mit

$\mathbb{Z}$ = Menge der **ganzen** Zahlen (Gruppe bzgl. $+$)

$\mathbb{Q}$ = Menge der **rationalen** Zahlen (Körper bzgl. $+$ und $\cdot$)

eingeführt, um Gleichungen der Form $m + x = n$ bzw. $m \cdot y = n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ lösen zu können. ("algebraische Erweiterung")
Das reicht aber nicht, wenn man sich mit analytischen Problemen befassen will.



Wie groß ist die Länge d der Diagonalen im Einheitsquadrat?
Pythagoras $\Longrightarrow$ $d^2 = 1 + 1$

Aber: $\boxed{\text{Es gilt keine rationale Zahl } d \text{ mit } d^2 = 2.}$

Beweis: indirekt! Seien $m, n \in \mathbb{N}$ <u>teilerfremd</u> mit $(\frac{m}{n})^2 = 2$

$\Rightarrow$ $m^2 = 2 \cdot n^2$ ist gerade Zahl $\Rightarrow$ m ist gerade Zahl

Also: $m = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$; Einsetzen $\Rightarrow$ $4k^2 = 2n^2$,
d.h. $n^2 = 2k^2$ gerade $\Rightarrow$ auch n ist gerade.
Wenn aber m und n gerade sind, haben sie den gemeinsamen Teiler 2, Widerspruch! $\square$

Aus dem Rohmaterial der Mengenlehre läßt sich auf konstruktivem Weg eine Menge $\mathbb{R}$ gewinnen, die folgendes leistet:

- $\mathbb{R}$ umfaßt $\mathbb{N}$
- Addition und Multiplikation sind umkehrbar
- auf $\mathbb{R}$ existiert eine Ordnung
- $\mathbb{R}$ hat keine Lücken

Die drei ersten Punkte werden auch von $\mathbb{Q}$ erfüllt, aber nicht die sogenannte Vollständigkeitsbedingungen.

Aus Zeitgründen müssen wir leider darauf verzichten, $\mathbb{R}$ als Menge konkret zu definieren. Dann erstens bedarf dies einiger Vorbereitung, zum zweiten müßten wir anschließend alle Eigenschaften von oben beweisen.

Literatur: H. Meschkowski Zahlen. BI Taschenbuch

Wir stellen einfach fest:

I. Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ (die reellen Zahlen) versehen mit einer Körperstruktur, die die Menge $\mathbb{N}$ umfaßt.

Auf $\mathbb{R}$ hat man also eine Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt:

Axiome der Addition:

(1) Kommutativgesetz: $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(2) Assoziativgesetz: $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\, y, y, z \in \mathbb{R}$

(3) Existenz eines additiv neutralen Elements: $\exists$ eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(4) Existenz von additiv inversen Elementen: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element ($-x$ genannt) mit $x + (-x) = 0$

Bemerkung: (1) - (4) sind die allgemeinen Axiome für Abelsche Gruppen. Bekanntlich sind “0” und “$-x$” eindeutig.

Schreibweise: $x - y$ statt $x + (-y)$.

Axiome der Multiplikation:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x \cdot y = y \cdot x \\ (2) & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ (3) & 1 \text{ ist neutrales Element bzgl. } \text{“}\cdot\text{”}: 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \end{array}\right\} \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$$

(4) Zu $x \neq 0$ gibt es ein Element (x^{-1} genannt) mit $x \cdot x^{-1} = 1$.

Bemerkung: $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$ ist abelsche Gruppe.

Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Mit diesen Regeln kann man nun wie üblich “spielen” und folgende Aussagen beweisen:

Satz 3.1 *Für reelle Zahlen a, b gilt:*

1) $-(-a) = a, \quad -(a + b) = -a - b$

2) Aus $a + x = b$ *folgt* $x = b - a$.

3) $0 \cdot a = 0$

4) (Nullteilerfreiheit) $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ *oder* $b = 0$

5) Aus $a \cdot x = b$ *folgt für* $a \neq 0$: $x = a^{-1}\, b$

6) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \quad (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

7) $a \neq 0: \quad (a^{-1})^{-1} = a$

8) $a, b \neq 0: \quad (a \cdot b)^{-1} = a^{-1}\, b^{-1}$

[Beweis: exemplarisch 3)

$$0 = 0 + 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \cdot a = (0 + 0)a \overset{\text{Distributivgesetz}}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

andererseits: $0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$
Vergleich mit $0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a$ unter Berücksichtigung der Eindeutigkeit der Lösung x von $0 \cdot a + x = 0 \cdot a$ liefert $0 = 0 \cdot a$] $\square$

Bemerkung: Die bisherigen Axiome gelten per Definition in jedem Körper und sind rein algebraischer Natur. $\mathbb{R}$ wird dadurch noch nicht ausgezeichnet!

Schreibweisen, Bemerkungen:

1) $\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{R} : \ n \ \text{ oder } \ -n \ \text{ gehört zu } \ \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
ganze Zahlen (abelsche Gruppe bzgl. $+$)

2) $\mathbb{Q} := \{n \cdot m^{-1} : \ n \in \mathbb{Z}, \, m \in \mathbb{N}\}$
rationale Zahlen (Brüche) (Unterkörper von $\mathbb{Z}$)
$\frac{n}{m}$ statt $n \cdot m^{-1}$ $\longrightarrow$ Rechenregel für Brüche

3) Potenzen: Die Potenzen a^n, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_\circ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist rekursiv definiert durch

$$\boxed{a^\circ = 1, \, a^1 = a, \, a^{n+1} = a \cdot a^n} \, .$$

Ist $a \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$, so sei $a^{-m} := (a^{-1})^m$. Man beweist dann sehr leicht

$$\left| \begin{array}{lcl} a^n \cdot a^m & = & a^{n+m}, \, (a^m)^n \, = \, a^{m \cdot n}, \\ a^n \cdot b^n & = & (a \cdot b)^n \qquad\qquad \text{Potenzgesetze} \end{array} \right.$$

für $a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z}$ (sofern die Ausdrücke definiert sind).

Beispiel:
Beh.: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$
Bew.: $n = 1$ $\checkmark$
$n \to n+1 :$ $(ab)^{n+1} = (a \cdot b)(a \cdot b)^n = a \cdot b \cdot a^n b^n = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$ $\square$

Daraus bekommt man das Gesetz für $n \in \mathbb{Z}$ vermöge $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

4) Produkt und Summenzeichen (haben wir schon benutzt)

$$\left| \begin{array}{l} a_m, \ldots, \, a_n \in \mathbb{R}, \, m \leq n \text{ seien aus } \mathbb{N} \\ \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \, := \, a_m + \ldots + a_n \\ \prod\limits_{k=m}^{n} a_k \, := \, a_m \ldots a_n \end{array} \right.$$

(formal: $(a_1, \ldots, a_n)$ ein N-tupel von Zahlen;
definiere rekursiv $x_1 \, := a_1, \, x_{\ell+1} = x_\ell + a_{\ell+1}, \, 1 \leq \ell < N$ dann $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \, := x_N$)

Bemerkung: die Wahl des Index k in $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ ist willkürlich; es gilt die Verschiebungsregel: $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m+\ell}^{n+\ell} a_{k-\ell}$.

Wir kommen jetzt zu den analytischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$.

II. $\boxed{\text{Der Körper } \mathbb{R} \text{ ist angeordnet.}}$

Die Ordnung wird durch folgende Axiome festgelegt:

(1) für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Bedingungen $x > 0$, $x < 0$, oder $x = 0$.

(2) sind x und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$.

Bemerkungen:

1) Axiom (1) besagt: jede reelle Zahl ist entweder größer 0 (positiv) oder kleiner als 0 (negativ) oder gleich 0.

2) Man definiert für $x, y \in \mathbb{R}$: $x > y :\Longleftrightarrow x - y > 0$, $x \geq y :\Longleftrightarrow x > y$ oder $x = y$, $x < y :\Longleftrightarrow y > x$, $x < y \Longleftrightarrow y \geq x$.

3) $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ Menge der positiven reellen Zahlen.,

4) Beim axiomatisch-konstruktiven Zugang erklärt man auf $\mathbb{R}$ eine Ordnungsrelation, die den Eigenschaften (1), (2) genügt.

5) Auch die Ordnungsaxiome zeichnen $\mathbb{R}$ noch nicht vor $\mathbb{Q}$ aus.

Satz 3.2

"Rechnen mit Ungleichungen"

(i) für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Bedingungen $x > y$, $y > x$, $y = x$.

(ii) $x > y$ und $y > z \Longrightarrow x > z$ (Transitivität)

(iii) $$x > y \Longrightarrow \begin{cases} x^{-1} < y^{-1}, & \text{falls } y > 0 \\ x + z > y + z & \forall\, z \in \mathbb{R} \\ x \cdot z > y \cdot z & \forall\, z > 0 \end{cases}$$

(iv) $$x > y,\, x' > y' \Longrightarrow \begin{cases} x + x' > y + y' \\ x \cdot x' > y \cdot y', & \text{falls } y,\, y' > 0 \end{cases}$$

(v) $x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 > 0\ ;\ 1 > 0\ ;\ n + 1 > n \quad$ für $\quad n \in \mathbb{N}$

Bemerkung: (v) liefert, dass $\mathbb{N}$ mit seiner Ordnung in $\mathbb{R}$ erhalten bleibt!

Beweis:

(i) Axiom (1) mit $x - y$

(ii) $x - y > 0,\ y - z > 0 \underset{\text{Ax }(2)}{\Longrightarrow} x - y + y - z > 0,$ also $x - z > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > z$

(iii) a) indirekt: Sei $y > 0$ und $x > y$, aber $x^{-1} \geq y^{-1}$.

Ax(2) $\Rightarrow x \cdot y > 0.$ $x^{-1} = y^{-1}$ ist nicht möglich, sonst wäre $x = y$.

Also: $x^{-1} - y^{-1} > 0.$

Ax(2) (mit $x \cdot y$ statt x und $x^{-1} - y^{-1}$ statt y) $\Rightarrow$

$$x \cdot y(x^{-1} - y^{-1}) \ > \ 0 \iff y - x > 0 \iff y > x!$$

b) $x + z > y + z \iff (x + z) - (y + z) > 0 \iff x - y > 0 \iff x > y$
lese das von rechts nach links!

c) Sei $x > y$ und $z > 0$, also $\left.\begin{array}{r} x - y > 0 \\ z > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Ax}(2)}{\Longrightarrow} (x - y)z > 0 \iff x \cdot z > y \cdot z$

Anmerkung:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha) & x > y,\, z \geq 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z \geq y \cdot z \\ \beta) & x > y,\, z < 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z < y \cdot z \\ \gamma) & x > y,\, z \leq 0 \ \Rightarrow \ x \cdot z \leq y \cdot z \end{array}}$$

(iv) $x > y,\, x' > y' \iff x - y > 0,\, x' - y' > 0 \underset{\text{Ax}(2)}{\Longrightarrow} x + x' - y - y' > 0 \iff x + x' > y + y'.$

Seien $y, y' > 0:$ $\quad x \cdot x' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(iii)} \\ \text{(Mult. von} \\ x > y \\ \text{mit} \\ x' > 0)}}{>} y \cdot x' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(iii)} \\ \text{(Mult. von} \\ x' > y' \\ \text{mit} \\ y > 0)}}{>} y \cdot y'$

(v) $x > 0 \underset{\text{Ax(2)}}{\Longrightarrow} x^2 > 0$;

$x < 0 \Longrightarrow -x > 0 \underset{\text{Ax(2)}}{\Longrightarrow} x^2 = (-x)(-x) > 0;$

da $1 \neq 0$ und $1^2 = 1$ folgt $1 > 0$. Mit (iii) (Addition von z) sieht man $z + 1 > z \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$.

□

Bemerkungen:

1) Satz 3.7 sollte man sich einprägen! Gerade beim Rechnen mit Umgleichungen werden viele Fehler gemacht, z.B. $x > y \Rightarrow x^{-1} < y^{-1}$ gilt nur für $y > 0$. (Beispiel: $x = 1 > -1 = y$, aber $x^{-1} = 1 > (-1)^{-1} = -1 = y^{-1}$).
2) Ersetzt man in Satz 3.7 in den Voraussetzungen $>$ durch $\geq$ (solange man nicht durch 0 dividiert!), so gelten die Folgerungen mit $\geq$.

Eine Anwendung ist

Satz 3.3 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt die*

Bernoullische Ungleichung: $\boxed{(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.}$

Beweis: $n = 1$ $\surd$;
$n \to n+1:$ $(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n$.
Es ist $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$; Multiplikation mit $1+x \geq 0$ ergibt $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + n \cdot x^2 \geq 1 + nx + x$, da $n \cdot x^2 \geq 0$. □

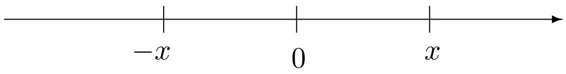
Bemerkung: Gleichheit tritt nur ein für $x = 0$ oder $n = 1$.

Definition 3.1 *Absolutbetrag*

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ sei} \quad |x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Bemerkung: Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$, misst auf dem Zahlenstrahl den Abstand von x zum Nullpunkt

$\leftarrow |-x| \rightarrow \leftarrow |x| \rightarrow$



<u>Eigenschaften:</u>

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, -|x| \leq x \leq |x|$

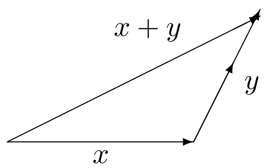
(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

(iii) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ (umgekehrte Dreckecksungl.)

Beweis:

(i) $\checkmark$

(ii) heißt Dreiecksungleichung, weil man diese Beziehung für die Länge von Vektoren hat



offenbar: $x \leq |x|, y \leq |y| \implies x + y \leq |x| + |y|$

analog: $x \geq -|x|, y \geq -|y| \implies x + y \geq -(|x| + |y|) \quad *$

Fall 1: $x + y \geq 0 \implies |x + y| = x + y \underset{\text{s.o.}}{\leq} |x| + |y|$

Fall 2: $x + y \leq 0 \implies |x + y| = -(x + y) \underset{*}{\leq} |x| + |y|$ (Multiplikation von $*$ mit -1)

Zusammen folgt (ii)

(iii)
$$|x| = |x-y+y| \underset{\text{(ii)}}{\leq} |x-y|+|y| \implies |x|-|y| \leq |x-y|, \text{ und}$$
$$|y| = |y-x+x| \underset{\text{(ii.)}}{\leq} |x-y|+|x| \implies |y|-|x| \leq |x-y|.$$

Daraus folgt die Behandlung wie in (ii)

$\square$

III. Das Axiom von Archimedes: $\boxed{\text{Zu jedem } x \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > x.}$

klingt zwar trivial, kann aber nicht aus den bisherigen Axiomen abgeleitet werden. Es besagt, dass $\mathbb{N}$ eine unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Satz 3.4 *(Folgerungen aus dem Axiom)*

(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.

(ii) Ist $q > 1$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ mit $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n > K$.

(iii) Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \varepsilon$.

Bemerkungen:
(ii) besagt anschaulich: $q^n \to \infty$ bei $n \to \infty$, $q > 1$,
(iii) besagt anschaulich: $q^n \to 0$ bei $n \to \infty$, $0 < q < 1$.

Beweis:
(i) Axiom $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > y/x$

(ii) $x := q - 1 > 0$; zu K wähle man nach (i) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > K$.

Dann ist $q^n = (x+1)^n \underset{}{\overset{\text{Bernoulli}}{\geq}} nx + 1 > nx > K$

(iii) benutze (ii) mit $\frac{1}{q}$ statt q und $K = \frac{1}{\varepsilon}$. $\square$

IV. Die Axiome I, II, III werden auch von den rationalen Zahlen erfüllt, es fehlt noch ein Axiom, das die Lückenlosigkeit von $\mathbb{R}$ und damit beispielsweise die Lösbarkeit von $x^2 = 2$ sicherstellt.

Wie bekommt man die Existenz von irrationalen Zahlen?
$\rightsquigarrow$ "Methode der Intervallschachtelung"

Definition 3.2 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}, a < b.$

$$\begin{array}{lll} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x \le b\} \quad \textit{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\} \quad \textit{offenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : \; a \le x < b\} \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{halboffene Intervalle} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : \; a < x \le b\} \end{array}$$

a = Anfangspunkt, b = Endpunkt, $b - a$ = Länge des Intervalls

Beispiel: $[1,7] - (2,3] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 7\} - \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \le 3\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x \le 7 \quad \text{und} \quad (x \le 2 \quad \text{oder} \quad x > 3)\}$

$= [1,2] \cup (3,7].$

Sprechweise: abgeschlossene Intervalle heißen kompakt.

Definition 3.3 *Intervallschachtelung*

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := b_n - a_n > \varepsilon$.

Beispiel: $I_n := [0, \frac{1}{n}]$ für $n \in \mathbb{N}$

i) ist klar, ii) folgt aus dem Axiom von Archimedes; die Folge der Intervalle zieht sich auf $0 \in \mathbb{R}$ zusammen.

Anmerkung: aus i), ii) zusammen folgt

ii)* $\quad |I_m| < \varepsilon \quad \forall\, m \ge n,$

wenn n der Index aus ii) ist.

Anschauliche Vorstellung: $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Intervallschachtelung $\Longrightarrow$
$\exists\,! \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

aber: wie wir gleich sehen werden, läßt sich unschwer eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit rationalen Endpunkten konstruieren, die sich auf $\sqrt{2}$ zusammenzieht. $\sqrt{2}$ ist aber irrational! Also müssen wir als Axiom fordern, dass sich Intervallschachtelungen stets auf eine Zahl zusammenziehen, also eine reele Zahl definieren!

Beispiel: $a_1 = 1,\ b_1 = 2$

Seien $I_1, \ldots, I_n$ konstruiert mit rationalen Endpunkten a_ℓ, b_ℓ

$$a_\ell^2 \le 2 \le b_\ell^2, \quad |I_\ell| \le \frac{1}{2}\,|I_{\ell-1}|, \quad \ell = 1, \ldots, n.$$

Man definiert

$$I_{n+1} := \left\{ \begin{array}{ll} [a_n, c], & \text{falls } c^2 \ge 2 \\ [c, b_n], & \text{falls } c^2 < 2 \end{array} \right\} \text{ nach den Ordnungsaxiomen tritt genau eine Möglichkeit ein!}$$

$c := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ Mittelpunkt von I_n

Zeige: $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Intervallschachtelung, plausibel: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}$
($\rightsquigarrow$ vgl. hierzu Satz 3.10)

Wir verlangen das $\rightsquigarrow$

<u>Vollständigkeitsaxiom:</u>

Zu jeder Intervallschachtelung $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es eine reelle Zahl x mit $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, d.h. x ist in allen Intervallen enthalten.

Bemerkungen:

1) Die Beschränkung auf kompakte Intervalle ist nötig, denn die Folge.
   $\{\,(0, 1/n]\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt zwar i), ii) aus Def. 3.10, aber $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$ (Axiom des Archimedes!)

2) Es kann nicht gelten $\alpha, \beta \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ mit $\alpha \ne \beta$: sei o.E. $\alpha < \beta$. Aus $\alpha, \beta \in I_n$ folgt $[\alpha, \beta] \subset I_n \Longrightarrow |I_n| \ge \beta - \alpha$. Zu $\varepsilon := \frac{1}{2}\,(\beta - \alpha)$ gibt es dann kein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$.

   $\boxed{\text{Intervallschachtelungen definieren also genau eine Zahl.}}$

Satz 3.5 *Existenz von Wurzeln*

> *Sei* $x > 0$ *eine reelle Zahl und* $k \in \mathbb{N}$ *eine natürliche Zahl.*
>
> *Dann gibt es genau ein reelles* $y > 0$ *mit* $x = y^k$.
>
> *Man schreibt:* $y = \sqrt[k]{x}$ *oder* $= x^{1/k}$.

Beweis mit dem Intervallschachtelungsprinzip:

Sei $k \geq 2$. Außerdem gelte $x \geq 1$. (Ist $x \in (0,1)$, so betrachtet man $1/x =: x' > 1$ und findet y' mit $x' = (y')^k$. Die Zahl $1/y' =: y$ leistet dann das Gewünschte.)
Wir definieren eine Intervallschachtelung $I_n := [a_n, b_n]$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(1)_n \qquad a_n^k \leq x \leq b_n^k \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$(2)_n \qquad |I_n| \leq (\tfrac{1}{2})^{n-1}\, |I_1| \quad \forall\, n \geq 2.$$

Sei $I_1 := [1, 1+x]$. Es ist $b_1^k = (1+x)^k \geq 1 + k \cdot x \geq x$ und natürlich $a_1^k = 1 \leq x$, d.h. $(1)_1$ gilt.
Sind $I_1, \ldots, I_n$ mit $(1), (2)$ konstruiert, so setzt man

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, c_n], & \text{falls} \quad x \leq c_n^k \\ [c_n, b_n], & \text{falls} \quad x > c_n^k \end{cases}$$

mit $c_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Damit sind $(1)_{n+1}$, $(2)_{n+1}$ klar, denn I_{n+1} entsteht dadurch, dass man entweder die rechte oder die linke Hälfte vom vorhergehenden Intervall wählt.

Sei $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Zu zeigen: $y^k = x$.

(Bem.: $(2)_n \Rightarrow |I_n| < \varepsilon$ bei gegebenem ε wenn n groß genug, Satz 3.9 iii)

Dazu sei $J_n := [a_n^k, b_n^k]$. Es gilt

$$J_{n+1} \subset J_n$$

(da $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+1}^k \geq a_n^k$, $b_{n+1} \leq b_n, \Rightarrow b_{n+1}^k \leq b_n^k$)
und

$$|J_n| = b_n^k - a_n^k = (b_n - a_n) \cdot \left\{ b_n^{k-1} + b_n^{k-2}\, a_n + \ldots + b_n \cdot a_n^{k-2} + a_n^{k-1} \right\} \leq (b_n - a_n) \cdot k \cdot b_n^{k-1}$$

denn $\{\ldots\}$ enthält k Summanden, von denen jeder $\leq b_n^{k-1}$ ist.

Gemäß $b_n \leq b_1 = 1 + x$ folgt

$$|J_n| \leq (b_n - a_n)\, k \cdot (1+x)^{k-1}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|I_n| = b_n - a_n \; < \; \frac{\varepsilon}{k(1+x)^{k-1}},$$

also $\quad |J_n| < \varepsilon, \quad$ also ist $\{J_n\}$ eine Intervallschachtelung.

Es gilt $\quad y \in [a_n, b_n] \Longrightarrow a_n^k \leq y^k \leq b_n^k \Longrightarrow y^k \in J_n.$

Nach $(1)_n$ ist $x \in J_n$ für alle n, also

$$y^k, x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

und deshalb $\quad x = y^k.$ □

Betrachten wir die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der linken Endpunkte, so ist diese zwar nach oben beschränkt (z.B. durch $1 + x$), sie enthält aber kein größtes Element. Als optimale obere Schranke (also als kleinstmögliche) wird man $y = \sqrt[k]{x}$ ansehen. Wir wollen diese Begriffe jetzt präzisieren.

Definition 3.4 *$M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (unten) beschränkt :$\Longleftrightarrow$*

$$\exists\, s \in \mathbb{R} \text{ mit } x \leq s\, (x \geq s) \text{ für alle } x \in M.$$

Bemerkungen:

1) Es wird nicht verlangt, dass s zu M gehört.
2) Jede Zahl $s' > s$ ($s' < s$) ist auch obere (untere) Schranke.
3) $M := (0,1]$ 0 ist eine untere Schranke von M; es gibt keine Zahl $a > 0$, die ebenfalls untere Schranke von M ist. Man sagt hier: 0 ist größte untere Schranke von M, entsprechend: 1 ist kleinste obere Schranke von M.

Definition 3.5 *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M, falls s kleinste obere Schranke von M ist, d.h.*

i) s ist obere Schranke von M
ii) s' obere Schranke von $M \Longrightarrow s' \geq s$
Schreibweise: $s = \sup M$.

Bemerkungen:

1) $\inf M :=$ größte untere Schranke von M
2) bei der Def. von $\sup M$ ($\inf M$) setzen wir natürlich voraus, dass es überhaupt eine obere (untere) Schranke von M gibt
3) $\sup M$, $\inf M$ können zu M gehören, müssen aber nicht
4) Beispiel: I Intervall mit Randpunkt $a < b$

   $\Longrightarrow a = \inf I,\ b = \sup I$ unabhängig davon, ab I offen abgeschlossen oder halboffen ist.
5) M hat ein Maximum, d.h. $\exists\, a \in M$ mit $x \leq a\ \forall\, x \in M$

   $\Longrightarrow \quad a = \sup M$
   (analog für Minimum und inf)
6) $\inf \mathbb{N} = 1$, $\mathbb{N}$ hat aber kein Supremum (Ax. v. Archimedes)

Existenz von inf / sup für einen Spezialfall:

Satz 3.6 *Sei $M \subset \mathbb{Z}$ nicht leer. Ist M noch oben (bzw. unten) beschränkt, so hat M Maximum (bzw. Minimum), speziell existiert $\sup M$ (bzw. $\inf M$).*

(überlege: haben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{Q}$ Max. und Min.?)

Beweis: Nach Satz 2.1 hat jede Teilmenge $A \neq \emptyset$ von $\mathbb{N}_0$ ein Minimum. (in Satz 2.1 ist zwar $A \subset \mathbb{N}$, die Hinzunahme der 0 bringt keine Änderung.) Sei $M \subset \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt, d.h. $\exists\, m_\circ \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq m_\circ$ für alle $m \in M$, anders gesagt:

$M^* := \{m_\circ - m : m \in M\} \subset \mathbb{N}_\circ \Longrightarrow$ (**Satz 2.1**)

$\exists\, k \in M*^*$ **mit** $m_\circ - m \geq k \quad \forall\, m \in M$

$m_\circ - k$ **gehört zu** M **mit** $m \leq m_\circ - k$, **d.h.** $m_\circ - k = \max M$.

Analog behandelt man den Fall, dass M nach unten beschränkt ist. □

Satz 3.7 *("Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$")*

Jede nichtleere, nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (Infimum).

Bemerkungen:

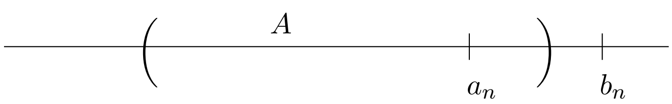
1) **(Übungsaufgabe) Akzeptiert man Satz 3.12, so kann man das Vollständigkeitsaxiom beweisen, d.h. die Aussagen sind zueinander äquivalent. Manche Autoren (etwa Banner-Flohr) bevorzugen es, Satz 3.12 als Axiom zu fordern. Die Entscheidung ist reine Geschmackssache, bei einer "richtigen" (axiomatischen) Konstruktion bekommt man beide Eigenschaften.**

2) **Man sieht, dass es wenig Sinn hätte, sowohl IV als auch Satz 3.12 als Axiome zu fordern: Die jeweils andere Aussage kann als "Satz" abgeleitet werden.**

3) **<u>Die Axiome I - IV legen $\mathbb{R}$ eindeutig fest:</u> Startet man mit einer mengentheoretischen Konstruktion $\mathbb{R}$, indem man $\mathbb{N}$ schrittweise erweitert unter Erfüllung aller Axiome, so kann man zu formal verschiedenen Mengen $\mathbb{R}$, $\tilde{\mathbb{R}}$ gelangen, wo etwa in $\mathbb{R}$ die 1 durch $\{\emptyset\}$ repräsentiert wird, in $\tilde{\mathbb{R}}$ dagegen durch $\emptyset$. Es läßt sich aber beweisen, dass alle konkreten Konstruktionen zueinander isomorph sind.**

Beweis von Satz 3.12: Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.

<u>Idee:</u> definiere rekursiv eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, so dass



(1) a_n **keine obere Schranke**

(2) b_n **obere Schranke von** A **ist.**
$b_1 :=$ **eine obere Schranke von** A **($\exists$ nach Voraussetzung)**
$a_1 := a - 1$ **für ein beliebiges Element** a **von** A.

Seien $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ **mit (1), (2) gegeben, außerdem gelte**

(3) $[a_\ell, b_\ell] \subset [a_{\ell-1}, b_{\ell-1}] \quad \ell = 2, \ldots, n$

(4) $b_\ell - a_\ell = \frac{1}{2}(b_{\ell-1} - a_{\ell-1})$.

Sei $x := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

Fall 1: x **ist obere Schranke von** A $\rightsquigarrow$ $I_{n+1} := [a_n, x]$

Fall 2: x **keine obere Schranke von** A $\rightsquigarrow$ $I_{n+1} := [x, b_n]$
mit $\ell = n + 1$

$\Longrightarrow \quad I_{n+1}$ **erfüllt (1), (2),** $\overbrace{\textbf{(3),(4)}}$

Vollständigkeitsaxiom $\Longrightarrow \quad \exists\, s \in \mathbb{R}$ **mit** $s \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

a) <u>s **ist obere Schranke für** A**:**</u>

andernfalls: $\exists\, y \in A$ **mit** $y > s$. **Für** n **genügend groß folgt:**

$|I_n| = b_n - a_n < y - s$, **denn** $y - s > 0$.

Andererseits: $s \in I_n \Longrightarrow b_n - s \leq b_n - a_n < y - s \Longrightarrow b_n < y$, b_n **ist aber obere Schranke von** A**, Wspr!**

b) <u>s **kleinste obere Schranke für** A**:**</u>

andernfalls findet man $s' < s$ **mit** $x < s'$ **für alle** $x \in A$**; wähle** $n \in \mathbb{N}$ **mit**

$$|I_n| = b_n - a_n < s - s';$$

dann ist: $s - a_n \underset{\substack{\nearrow \\ s \in I_n}}{\leq} b_n - a_n < s - s' \Longrightarrow a_n > s'$,

d.h. $a_n > x$ **für alle** $x \in A \Longrightarrow a_n$ **ist obere Schranke von** A.

Aus a), b) folgt: $s = \sup A$.

□

Wir schließen mit einer Aussage, die ohne das Vollständigkeitsaxiom auskommt und nur das Axiom von Archimedes benutzt.

Satz 3.8 ***Seien*** $x < y$ ***aus*** $\mathbb{R}$. ***Dazu gibt es*** $q \in \mathbb{Q}$ ***mit*** $x < q < y$.

Man sagt: <u>**Die rationalen Zahlen liegen dicht in** $\mathbb{R}$**.**</u>

("Umgekehrt": $r < q$ **rational** $\Longrightarrow \exists$ **"viele"** $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ **mit** $r < x < p$**; Lückenhaftigkeit von** $\mathbb{Q}$**)**

Beweis: **Archimedes** $\Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ **mit** $n > \frac{1}{y-x}$**; mit diesem** n **sei**

$$A := \{m \in \mathbb{Z} : \, m - nx > 0\}$$

A **nach unten beschränkt** $\underset{\textbf{Satz 3.11}}{\Longrightarrow} \exists\, m_\circ = \min A$

$m_\circ \in A \Longrightarrow x < \frac{m_\circ}{n} = \frac{m_\circ - 1}{n} + \frac{1}{n}$**;**

$m_\circ - 1 \notin A \Longrightarrow (m_\circ - 1) - nx \le 0 \Longrightarrow \frac{m_\circ - 1}{n} \le x$**,** **d.h.**

$x < \frac{m_\circ}{n} \le x + \frac{1}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{Wahl von } n}}{<} x + y = y$**.**

Also erfüllt $q := \frac{m_\circ}{n}$ **die Ungleichung** $x < q < y$**.** □

<u>Ergänzung:</u> **<u>Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$-Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$</u>**

(Konzept der Mächtigkeit von Mengen; vgl. [Halmos, Naive Mengenlehre])

intuitiv: **es gibt genau soviele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen, aber vielmehr reelle als rationale Zahlen!**

Definition 3.6

1) ***Die Menge*** A ***heißt <u>abzählbar</u>:*** $\Longleftrightarrow$ $\exists$ ***Bijektion*** $f : \mathbb{N} \to A$

2) ***Die Menge*** A ***heißt <u>höchstens abzählbar</u>:*** $\Longleftrightarrow$ $A = \emptyset, A$ ***endlich oder abzählbar***

3) A ***und*** B ***heißen <u>gleichmächtig</u>:*** $\Longleftrightarrow$ $\exists$ ***Bijektion*** $\phi : A \to B$

(Steffen Skript p.117 f.)

Satz 3.9 ***i)*** A ***abzählbar,*** $B \subset A \Longrightarrow B$ ***höchstens abzählbar***

ii) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ***sind gleichmächtig (***$\mathbb{Q}$ ***ist also abzählbar!)***

iii) ***Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.***

iv) $\boxed{\mathbb{R} \textit{ ist } \textbf{nicht} \textit{ abzählbar}}$

Bemerkungen:

1) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ **sind von derselben (niedrigsten) Unendlichkeitsstufe.**

2) **Gemäß iv) nennt man** $\mathbb{R}$ **<u>überabzählbar</u>.**

3) $A \lesssim B$ (**A höchstens so mächtig wie B) :** $\iff$

$\exists$ **injektiv Abb.** $\Phi : A \to B \underset{\textbf{trivial}}{\iff} \exists$ **surj. Abb.** $\Psi : B \longrightarrow A$;

$A > B$ (B **mächtiger als** A) $: \iff$

$A \lesssim B$, **aber** A **und** B **<u>nicht</u> gleichmächtig**

Damit lautet iv): $\boxed{\mathbb{Q} < \mathbb{R}.}$

4) Es gilt: $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \textbf{ gleichmächtig zu } \mathbb{R}}$

5) <u>Kontinuumshypothese:</u> $*$ **"Es gibt keine Menge A mit $\mathbb{N} < A < \mathcal{P}(\mathbb{N})$.**

<u>1938 Gödel, 1963 Cohen:</u> **<u>weder beweisbar noch widerlegbar !</u>** **(Steffen p.131)**

(D.h.: Man kann zeigen, dass $*$ unabhängig von den anderen Axiomen der Mengenlehre ist. Folglich lassen sich $*$ oder auch das Gegenteil von $*$ zu den bisherigen Axiomen hinzufügen, ohne dass sich an den übrigen Aussagen etwas ändert.)

Beweis:

i) Es sei $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$, wobei $a_n := f(n)$, wenn $f : \mathbb{N} \to A$ bijektiv. Wir rechnen an: $B \neq \emptyset$, B nicht endlich.
Gesucht: Bijektion $g : \mathbb{N} \to B$ (d.h. B ist abzählbar)
wird rekursiv definiert: $B_1 := \{k \in \mathbb{N} : \ a_k \in B\} = f^{-1}(B)$ **(Indexmenge von B)**

$$g(1) := a_{\min B_1};$$

$$B_{n+1} := B_n - \{\min B_n\}, \ g(n+1) := a_{\min B_{n+1}}$$

(beachte: $B_1 \supsetneqq B_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq B_n \supsetneqq B_{n+1} \supsetneqq \ldots, B_\ell \neq \emptyset$**)**

ii) wir geben Abzählungen von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \textbf{ gerade} \\ \frac{1-n}{2}, & n \textbf{ ungerade} \end{cases},$

ist Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

b) Wir zeigen: **<u>$\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmächtig</u>.**

Die Konstruktion einer Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ geht mit dem Cantorschen Diagonalverfahren:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & & \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & \dots & & & & &
\end{array}$$

Man zählt die unendliche Matrix diagonalenweise ab:

$$f(1) = (1,1), \quad f(2) = (1,2), \quad f(3) = (2,1), \quad f(4) = (1,3)\dots$$

Umkehrabbildung: $f^{-1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(i,j) = \tfrac{1}{2}\,(i+j-1)\,(i+j-2) + i$$

c) **Offenbar sind $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig, denn mit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ aus a) ist $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (n,m) \to (f(n), m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ bijektiv.**

Nun betrachte $\Psi :\ \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, (k,\ell) \mapsto k/\ell$.

Die Abbildung $\Psi \circ \Phi :\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist surjektiv, so dass wir mit b) eine Surjektion $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bekommen.

Also: $\mathbb{Q} \lesssim \mathbb{N}$.

Da offenbar $\mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q}$ gilt (die Einbettung ist injektiv!), möchte man gerne schließen:

$\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig.

Das geht allgemein mit einem sehr schweren Geschütz

Satz (von Cantor-Schröder-Bernstein):

$\boxed{A \lesssim B \text{ und } B \lesssim A \Longrightarrow A, B \text{ sind gleichmächtig.}}$ **(Steffen p.119)**

Mit etwas mehr Sorgfalt kann man aber diesen Satz vermeiden und direkt eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ angeben.

iii) **Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbaren Mengen. Zu jedem Index n wählen wir eine Abzählung $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ und setzen**

$$g :\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ g(n,m) = f_n(m).$$

g ist surjektiv $\Longrightarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \lesssim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, also $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \lesssim \mathbb{N}$.

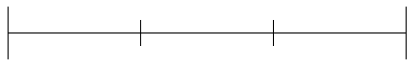
Andererseits: $A_1 \lesssim \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ **und** A_1 **gleichmächtig zu** $\mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ **gleichmächtig zu** $\mathbb{N}$ **(nach Cantor-Schröder-Bernstein)**

iv) Wäre $\mathbb{R}$ **abzählbar, so könnte man schreiben** $\mathbb{R} = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ **mit paarweise verschiedenen Elementen** x_k**. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung** $\{I_n\}$ **mit**

$(1)_n \quad x_n \notin I_N, \quad (2)_n \quad |I_n| = 3^{-n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sei $\quad I_1 = [x_1 + 1, x_1 + \frac{4}{3}]$ $\qquad$ **(erfüllt** $(1)_1, (2)_1$**)**

$n \to n+1:$ $\quad I_n$ **wird in drei gleich Teile zerlegt**



I_{n+1} **sei eines der Teilintervalle, das** x_{n+1} **<u>nicht</u> enthält.**

$\{I_n\}$ **ist Intervallschachtelung mit** $(1)_n, (2)_n \Longrightarrow$

$\exists x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \ *$ **nach dem Vollständigkeitsaxiom.**

Gemäß $\quad \mathbb{R} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ **gibt es** $\quad k \in \mathbb{N}$ **mit** $x = x_k \Longrightarrow x \notin I_k$ **nach** $(1)_k$**, Wspr. zu** $*$**.**

$\square$