§4

Komplexe Zahlen

bilden den Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, in welchem man alle algebraischen Gleichungen lösen kann.

Problem: finde Lösung von $x^2 + 1 = 0$

geht nicht in $\mathbb{R}$! (da $x \cdot x = x^2 \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$)

Annahme: $\exists \mathbb{K} =$ Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, wo $z^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat.

Sei $i \in \mathbb{K}$ mit $i^2 = -1$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$, Körperaxiome für $\mathbb{K} \Longrightarrow u + iv \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$
Seien $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{K}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} z + w &= (x+u) + i(y+v) \qquad \text{(Kommutativ-, Distributivgesetz)} \\ z \cdot w &= (x+iy) \cdot (u+iv) = x \cdot u + ixv + iyu + i^2 yv \\ &= (x \cdot u - yv) + i(xv + yu), \end{aligned}$$

wobei nur die Körperaxiome (in $\mathbb{K}$) und $i^2 = -1$ benutzt wurden.

Ergebnis: $\mathbb{K}^* := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation.

Außerdem: $x + iy = u + iv \Longrightarrow x - u = i(v - y) \Longrightarrow (x-u)^2 = -(v-y)^2$
$\underset{\text{reelle Quadrate} \geq 0}{\Longrightarrow} x = u,\ y = v$

d.h.: Ein Element z von $\mathbb{K}$ läßt sich - wenn überhaupt - eindeutig in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben.

Man sieht: $\mathbb{K}^*$ ist schon die richtige Erweiterung von $\mathbb{R}$. $\rightsquigarrow$

Definition 4.1 *a) Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen* $:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *also*

$$z \in \mathbb{C} \iff z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

b)
$$\begin{aligned} (x,y) + (u,v) &:= (x+u,\ y+v) \quad \textit{(komponentenweise Add.)} \\ (x,y) \cdot (u,v) &:= (x \cdot u - yv,\ uy + xv) \quad \textit{(komplexe Multiplikation)} \end{aligned}$$

Satz 4.1 *$\mathbb{C}$ bildet mit diesen Operationen einen Körper.*

Beweis: langweilig!
beachte:

1)

$$\boxed{\begin{aligned} (0,0) &= \text{neutrales Element bzgl. } + \\ (1,0) &= \text{neutrales Element bzgl. } \cdot \end{aligned}}$$

2) $a = (a_1, a_2) \neq (0,0) \implies \frac{1}{a} = a^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a^2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$

multiplikativ invers zu a

Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$:

$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ injektiv mit $f(x+y) = f(x) + f(y), f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \implies$ $f(\mathbb{R})$ ist zu $\mathbb{R}$ isomorpher Unerkörper von $\mathbb{C}$.

Identifikation: schreibe x für $(x, 0)$!
speziell: $0 = (0,0),\ 1 = (1,0)$

Setze außerdem $\boxed{i := (0,1) \quad \text{imaginäre Einheit}}$

Dann gilt

$$\boxed{z = (x,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = x + iy}$$

und

$$i^2 = (0,1)\,(0,1) = -1,$$

d.h. i ist eine Lösung von $z^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$.

Definition 4.2 *Sei* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$.

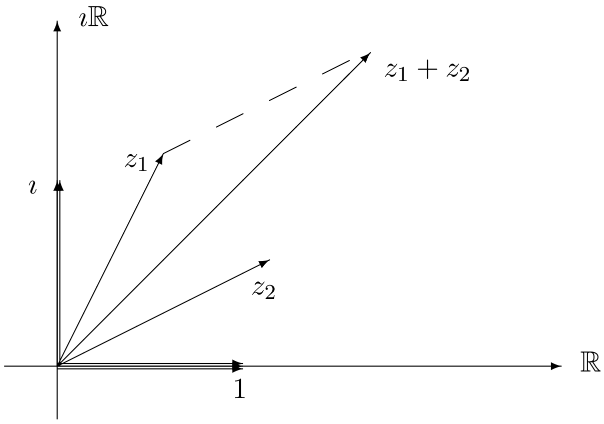
a) $x :=$ *Realteil von* z, $y :=$ *Imaginärteil von* z
(Re z*)* *(Im* z*)*

b) z *rein reell* $:\Longleftrightarrow$ *Im* $z = 0$

c) z *rein imaginär* $:\Longleftrightarrow$ *Re* $z = 0$, *Im* $z \neq 0$

Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene:

Addition in $\mathbb{C}$ = Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$



Konjugation: $z = x + iy$; $\overline{z} := x - iy$
Spiegelung an der reellen Achse.

Eigenschaften:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \; \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w},$$

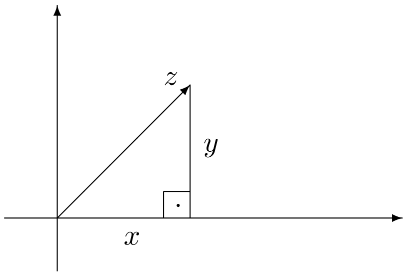
$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \; z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z,$$

$$z = \overline{z} \iff z \text{ reell},$$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \, (\geq o)$$

Absolutbetrag (= Abstandsmessung in $\mathbb{C}$)

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$



Länge oder Absolutbetrag von $z = x + iy$

(Euklidische Norm; motiviert durch Pythagoras)

Eigenschaften:

i) $|z| = 0 \iff z = 0; \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}$

ii) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$

iii) $|w + z| \leq |w| + |z|$ (“Dreiecksungleichung”)

iv) $|\overline{z}| = |z|, \ |\mathrm{Re} z| \leq |z|, \ |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$

Beweis: iii) $|w + z|^2 = (w + z)\overline{(w + z)} = (w + z)(\overline{w} + \overline{z}) =$

$w \cdot \overline{w} + z \cdot \overline{z} + \underbrace{z\overline{w} + \overline{z}w}_{=2\cdot \text{ Re } (z\overline{w})} = |w|^2 + |z|^2 + 2 \text{ Re } (z\overline{w}) \leq$

$|w|^2 + |z|^2 + 2|z\overline{w}| = |w|^2 + |z|^2 + 2|z|\,|w| = (|w| + |z|)^2.$

Bemerkungen: 1) Natürlich ist der Absolutbetrag von $x \in \mathbb{R}$ gleich dem Absolutbetrag $\sqrt{x^2}$ von x in $\mathbb{C}$.
2) Die Dreecksungleichung verdient jetzt ihren Namen!

Geometrische Größen: $a \in \mathbb{C}, \ r > 0$

$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ offene (geschlossene) Kreisscheibe um a mit Radius r

$S_r(a) := \{w \in \mathbb{C}\ |z - a| = r\}$ Kreis (linie) um a mit Radius r

Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$: Wir werden das später zeigen (jetzt zu aufwendig!)

Fundamentalsatz der Algebra:

> Sind $n \in \mathbb{N}$ und $a_{n-1}, \dots, a_\circ \in \mathbb{C}$, so hat
> $$z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0$$
> mindestens eine Lösung $z_1 \in \mathbb{C}$

$\rightarrow$ genau n Lösung (mit Vielfachheiten gerechnet): Division durch $z - z_1$ und erneute Anwendung des Satzes auf das Restpolynom.

Beispiel: $z^3 - 1 = 0$ (die 3^{ten} Einheitswurzeln)
eine Lösung $z_1 = 1$; Reduktion:

$$z^2 + z + 1 = 0 \iff (z + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = 0$$

$$\implies z_2 = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\; z_3 = -\tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Es gilt: $|1 - z_2| = |1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$ gleichseitiges Dreieck, $\overline{z}_2 = z_3$