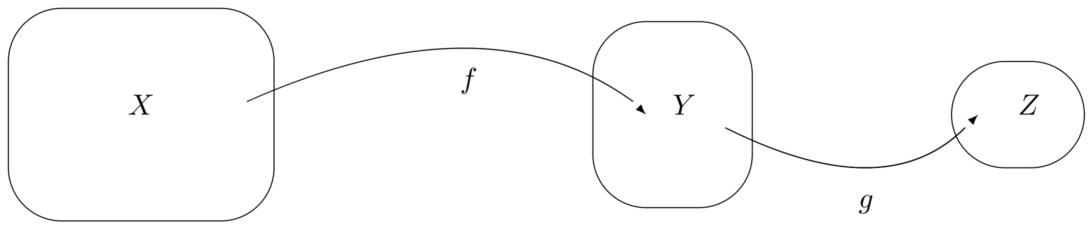
§5

Reelle und komplexe Funktionen

Allgemeine Begriffsbildung (vgl. § **1**): X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen



"injektiv", "surjektiv", "bijektiv"

Verkettung: $g \circ f : X \to Z$, $g \circ f(x) := g(f(x))$

$A \subset Y$: $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ Urbild von A

Spezialfälle: $f : X \to \mathbb{R}$ reelle Funktion, $f : X \to \mathbb{C}$ komplexe Funktion

(Natürlich ist jede reelle Funktion auch komplexe Funktion. Man verwendet die Bezeichnung "reell", um deutlich zu machen, dass f nur rein reelle Werte hat.)

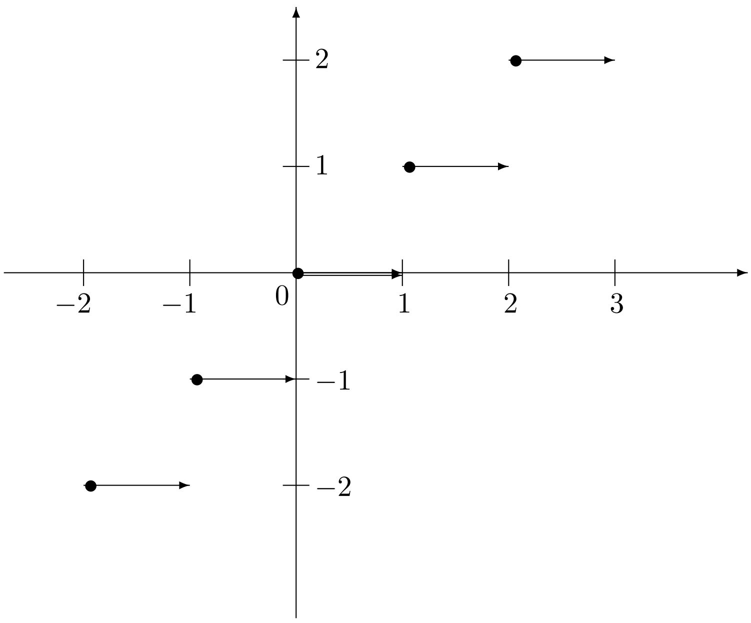
Beispiele:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ x \in \mathbb{Q} \\ 0,\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array} \right\} =: \chi_{\mathbb{Q}}(x)$

charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ (den Graphen kann man nicht zeichnen)

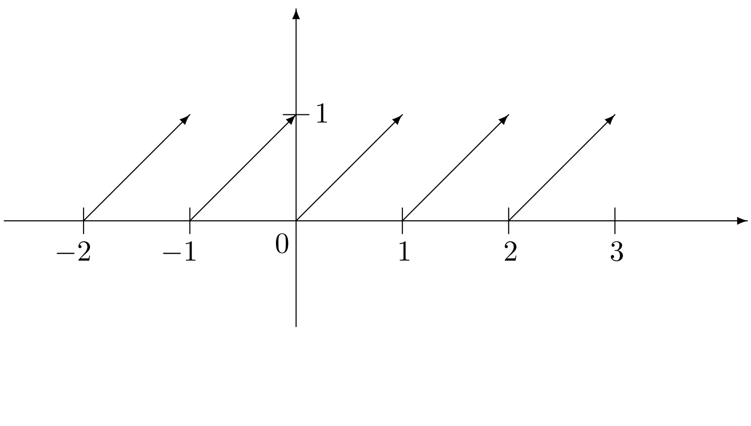
2)
$$\begin{aligned} [\cdot\,] : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ [x] &:= \text{größte ganze Zahl} \leq x \\ &= \sup\{m \in \mathbb{Z} :\ m \leq x\} \end{aligned}$$

Gauß - Klammer



3) **Sägezahnfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x - [x]$

$f(x) = x$ auf $[0,1),\ f(x) = x - 1$ auf $[1,2), \ldots$



Definition 5.1 *Sei* $X \subset \mathbb{R}$ *und* $f : X \to \mathbb{R}$ *reelle Funktion*

$$\left.\begin{cases} f \ \underline{\textit{monoton wachsend}} & \Longleftrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2) \\ f \ \underline{\textit{monoton fallend}} & \Longleftrightarrow \qquad\quad \geq \end{cases}\right\} \begin{array}{c} \forall\ x_1, x_2 \in X \\ x_1 \leq x_2 \end{array}$$

$$\left.\begin{cases} f \ \underline{\textit{streng monoton wachsend}} & \Longleftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \\ f \ \underline{\textit{streng monoton fallend}} & \Longleftrightarrow \qquad\quad > \end{cases}\right\} \begin{array}{c} \forall\ x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in X \end{array}$$

Bemerkungen:

1) f monoton ... auf $Y \subset X \Longleftrightarrow$ die Ungleichung gilt nur für $x_1, x_2 \in Y$
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3,$ ist streng monoton wachsend;

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,$ ist weder wachsend noch fallend

   aber: f ist streng fallend auf $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$, streng wachsend auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
3) streng nomotone Funktionen sind injektiv
4) da $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist, macht Monotonie für komplexe Funktionen mit Def.bereich $\subset \mathbb{R}$ keinen Sinn!

Algebraische Operationen für komplexe (und reelle) Funktionen:
werden (wie üblich) punktweise erklärt: $f,\, g : X \to \mathbb{C}$, X beliebig

$$f + g,\ f \cdot g : X \to \mathbb{C},\ f/g : \{x \in X : g(x) \neq o\} \to \mathbb{C},$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

analog: $\overline{f},\ |f|,\ \operatorname{Re} f,\ \operatorname{Im} f \ldots$

Beispiele:

a) <u>Polynome</u> $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n z^k, n \in \mathbb{N}_\circ, a_\circ, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$
   werden zusammengebaut aus $z \mapsto z^k$. $n =$ <u>Grad</u> f, falls $a_n \neq 0$
b) <u>Rationale Funktionen:</u> f, g Polynome über $\mathbb{C}$

   $$R(z) := f(z) \Big/ g(z) \qquad \text{Def } (R) = \{z \in \mathbb{C} : \ g(z) \neq 0\}.$$

   (Quotienten von Polynomen)

Reelle Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten: <u>Was ist bekannt?</u>

1) $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ x^n := x \dots x \quad (n \text{ fach})$

2) $x \in \mathbb{R} - \{0\},\ n \in \mathbb{N},\ x^{-n} := (x^{-1})^n$; $\underline{x > 0:}$ $\ x^{1/n}$ in Satz 3.10 definiert.
Sei für $x \in \mathbb{R}^+$ und $q \in \mathbb{Q} : x^q = (x^{\frac{1}{n}})^m$, falls $q = \frac{m}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$
$\Big($zeige: $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^{\frac{1}{n'}})^{m'}$ für $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ $\Big)$

Satz 5.1 *Für $x > 0$ gelten die üblichen Potenzgesetze:*

$$\boxed{x^{r+p} = x^r \cdot x^p, (x^r)^p = x^{r \cdot p}} \qquad \forall\, r, p \in \mathbb{Q}$$

Ist auch $y > 0$, so hat man: $\boxed{(x \cdot y)^p = x^p \cdot y^p.}$

(Im Falle ganzer Exponenten dürfen x, y aus $\mathbb{R} - \{0\}$ sein.)

Bemerkung: Die Rechenregeln lassen sich auf die Gesetze für $x^n, n \in \mathbb{Z}$, reduzieren, wenn man diese mit der Definition der Wurzel kombiniert.

Aus der Def. der Wurzel folgt z.B.:

$$* \quad y^{\frac{1}{k \cdot \ell}} = (y^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{\ell}} = \left(y^{\frac{1}{\ell}}\right)^{\frac{1}{k}},$$
$$y > 0, k, \ell \in \mathbb{N}$$

Also haben wir exemplarisch für $x > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}$:

$$x^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} := \left(x^{\frac{1}{m \cdot n}}\right)^{m+n} \overset{\text{alte Rechenregel}}{=} y^m \cdot y^n \left(y := x^{\frac{1}{m \cdot n}}\right)$$

nun ist $\quad y^m \underset{*}{=} \left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^m = x^{\frac{1}{n}},\ y^n = x^{\frac{1}{m}},$

zusammen: $\quad x^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{1}{n}}, \quad$ usw.

Merke: $\boxed{\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^r \text{ ist streng wachsend/fallend für } r \ \substack{> \\ <}\ 0, r \in \mathbb{Q}}$