§7

Reihen

sind spezielle Folgen, die durch Summation entstehen.

Definition 7.1 *:* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sei Folge in* $\mathbb{C}$; $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *heißt* n^{te} *Partialsumme und die Folge* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *unendliche Reihe. Falls* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert, so schreibt man:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{statt} \quad \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Bemerkung:

1) Beginnt die Folge bei 0 oder irgendeinem $N \in \mathbb{Z}$, so beginnt die Summation bei N, und S_n ist nur für $n \geq N$ erklärt.
2) Wie man den Summationsindex nennt, ist egal.
3) Achtung: manchmal schreibt man formal $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für die Folge $\{S_n\}$ der Partialsummen und spricht dann von Konvergenz oder Divergenz der unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
4) Da Reihen speziele Folgen sind, können wir natürlich alle Konvergenzkriterien aus ï¿$\frac{1}{2}$6 zum Einsatz bringen.

Beispiele:

1) $a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_\circ$

   $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist streng monoton wachsend und beschränkt, außerdem gilt:

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \;\le\; \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \;\le\; \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{e \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \quad \text{Eulersche Zahl}}$$

2) <u>geometrische Reihe:</u> $z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktion}}}{=} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-z} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$$

$\Big($ <u>Bem.:</u> $z \in \mathbb{C},\ |z| \ge 1 \quad \Longrightarrow$ Divergenz von $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k \Big)$

3) <u>Berechnung des Reihenwerts durch Umformung:</u> (selten möglich!)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,\frac{1}{k+1} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\frac{1}{k+1} \;=\; 1$$

4) <u>Konvergenz durch Vergleich mit bekannter Reihe:</u>

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \;=\; 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot n}$$

$$< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;=:\; 1 + S_n'$$

Nach 3) ist $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = 1$,, also gilt $S_n < 2$, denn $S_n' \nearrow 1$. Da offenbar $S_n < S_{n+1}$ ist, folgt konvergenz von $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.

$\Big($ später: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\Pi^2}{6} \Big)$

5) <u>harmonische Reihe:</u> $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ <u>ist bestimmt divergent:</u>

Teilfolge:

$$S_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \overbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right)}^{2^{m-1}\text{Summanden}} =$$

$$1 + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{k} >$$

$$1 + \sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\sum_{\ldots} \frac{1}{2^\ell}}_{2^{\ell-1}\text{ Summanden}} = 1 + \sum_{\ell=1}^{m} 2^{-\ell} \cdot 2^{\ell-1} =$$

$$1 + \frac{m}{2}$$

unbeschränkt!

andererseits (s. später): $\sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent
(alternierend harmonische Reihe)

□

Trivial zu beweisen sind die folgenden

Rechenregeln:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{konvergent} \quad \Longrightarrow$$

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$ konvergent, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda\, a_k$ konvergent mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda\, a_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Cauchy's Konvergenzkriterium lautet jetzt

Satz 7.1 *:* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\Longleftrightarrow$ <u>*zu jedem*</u> $\varepsilon > 0$

gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ *mit* $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ *für alle*

$n \geq N$ *und alle* $p \in \mathbb{N}$.

Denn:

$$\text{Cauchy-Bed.} \underset{\text{Def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : \quad |S_m - S_n| \leq \varepsilon$$
$$\iff \quad \ldots\ldots \quad \forall m > R \geq N : \quad \ldots\ldots,$$

da man ja aus Symmetriegründen immer $m > n$ annehmen darf. Nun nennt man m einfach $n + p$ und läßt p alle natürlichen Zahlen durchlaufen.

Offenbar ist $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|$.

Korollar: $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \implies \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}}$

Beweis: $p - 1$ in "$\Longrightarrow$" von Satz 7.1 $\square$

Achtung: Umkehrung falsch! $\longrightarrow$ harmonische Reihe

(Wenigstens das Korollar + Gegenbeispiel sollte man sich für Prüfungen merken)

Der Satz über die Konvergenz monotoner und beschränkter Folgen in $\mathbb{R}$ ergibt

Satz 7.2 *:* $a_k \geq 0$ *ab einem gewissen Index;*

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\iff$ $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt.*

denn ("$\Leftarrow$") $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ist ab einer gewissen Nummer n an monoton wachsend (es kommen nur noch positive Glieder hinzu) und beschränkt.

Was passiert bei der alternierend harmonischen Reihe?

Satz 7.3 *: (von Leibniz)*

Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine alternierende reelle Zahlenfolge, d.h. $a_k \cdot a_{k+1} \leq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist dann $\{|a_k|\}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right\}$

alternative Formulierung:

$$a_k \geq 0 \text{ monotone Nullfolge } \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ konvergent}$$
$$\left(\text{und damit auch } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k\right)$$

Beweis: o.E. $a_1 \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{2k} \geq 0 \\ a_{2k-1} \leq 0 \end{cases} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$$U_n := \sum_{k=1}^{2n} a_k, \quad V_n := \sum_{k=1}^{2n-1} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

dann:

$$U_{n+1} = U_n + a_{2n+1} + a_{2n+2} = U_n + \underbrace{|a_{2n+2}| - |a_{2n+1}|}_{\leq 0} \leq U_n$$
$$V_{n+1} = V_n + a_{2n} + a_{2n+1} = V_n + \underbrace{|a_{2n}| - |a_{2n+1}|}_{\geq 0} \geq V_n$$

und

$$U_n = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\geq 0} + \underbrace{a_4 + a_5}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq a_1$$

sowie

$$V_n = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\leq 0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{\leq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n-3} + a_{2n-2})}_{\leq 0} + \underbrace{a_{2n-1}}_{\leq 0} \leq 0$$

Daher sind $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ beide konvergent. Gemäß $U_n - V_n = a_{2n} \to 0$ haben beide Folgen den selben Grenzwert. Daraus folgt die Beh. (Übung). □

Beispiele:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Leibniz Reihe}}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{1}{2n+1}}, \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{alternierende harm. Reihe}}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{1}{n+1}} \qquad \text{sind konvergent}$$

Es gibt eine wesentliche Verschärfung von Satz 7.3

Satz 7.4 *: (Abelsches Kriterium)*

> $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ *seien reelle Zahlenfolgen mit*
>
> *1)* *die Partialsummenfolge* $\sum_{k=1}^{n} b_k$ *ist beschränkt*
>
> *2)* $\{a_k\}$ *ist monoton fallende Nullfolge*
>
> $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k$ *konvergiert*

Korollar: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, $a_k \downarrow 0 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent

Spezialfall: $b_k = (-1)^k \Longrightarrow$ Leibniz Kriterium

Beweis: $\exists\, K$ mit $|S_n| \leq K$, $n \in \mathbb{N}$; $S_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$

Seien $n > m \geq 1$; wir wollen die Cauchy Bedingung für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ prüfen und betrachten dazu

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k\, b_k \quad = \quad \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big(S_k - S_{k-1}\Big) \quad =$$

Verschieben des Index
in der 2^{ten}Summe

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cdot S_k \quad - \quad \sum_{k=m+1}^{n} a_k \cdot S_{k-1} \quad =$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cdot S_k \quad - \quad \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}\, S_k \quad =$$

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{\geq 0} S_k \quad + \quad a_n S_n \quad - a_{m+1} S_m \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\, b_k\Big| &\leq K \cdot \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) + a_n\, K + a_{m+1}\, K \\ &= K\,(a_{m+1} - a_n) + a_n\, K + a_{m+1} \cdot K \\ &= 2 \cdot a_{m+1} \cdot K \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $\quad a_k < \varepsilon/2K \quad \forall\, k \geq N.$

Für $n > m \geq N$ ist dann $\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\Big| < \varepsilon.$

Überraschend klingt

Satz 7.5 : *(Kondensationskriterium)*

> $\{a_k\}$*monoton fallend*, $a_k > 0$. *Dann gilt* :
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\{ \begin{array}{l} \textit{konvergent} \\ \textit{bestimmt divergent} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} \left\{ \begin{array}{l} \textit{konvergent} \\ \textit{bestimmt divergent} \end{array} \right\}$$

Beweis: Siehe Übungen.

Anwendungen:

1) $r \in \mathbb{Q},\ r > 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$? (Übung)

2) Reihen der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k/k$ mit b_k fallend, $b_k \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} b_k/k \quad \text{konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_{2^k} \quad \text{konvergent}}\,.$$

Definition 7.2 : *Sei* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent* $:\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent*

b) *Sei* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv. Dann heißt* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *eine Umordnung von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkungen:

1) $\boxed{\text{Abs. Kvgnz} \Longrightarrow \text{Kvgnz}}$ nach Cauchy: $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p} |a_k|$.

2) Endliche Summen darf man beliebig umordnen, also die Reihenfolge der Summand ändern, ohne das Ergebnis zu ändern.

Bei Reihen ist das anders:

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ ist konvergent gegen eine reelle Zahl x mit $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, denn

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 + \overbrace{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}^{\leq 0} + \overbrace{(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5})}^{\leq 0} + \ldots + \underbrace{(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1})}_{\leq 0} \leq 1$$

und

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = (1 - \frac{1}{2}) + \overbrace{(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})}^{\geq 0} + \ldots + \overbrace{(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n})}^{\geq 0} \geq \frac{1}{2}$$

Wir betrachten folgende Umordnung:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots\ldots,$$

d.h. auf ein positives Glied folgen zwei negative , und setzen Klammern

$$(1-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6})-\tfrac{1}{8}+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10})-\tfrac{1}{12}+\ldots =$$
$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\ldots\ldots =$$
$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\tfrac{1}{k}=\tfrac{1}{2}\,x,$$

d.h. durch Umordnung ergibt sich ein anderer Reihenwert. (Natürlich lassen sich die obigen Umformungen präzisieren).

Allgemein gilt nämlich:

Satz 7.6 *Sei die reelle Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung σ, so dass die neue Reihe gegen s konvergiert bzw. bestimmt divergiert*

M.a.W.: Bei nicht absolut konvergenten reellen Reihen kann man durch Umordnung jeden Grenzwert $\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ erreichen.

Beweis: $\longrightarrow$ Literatur bzw. Ergänzungsvorlesung

Bei absoluter Konvergenz kann dieses Phänomen nicht eintreten!

Satz 7.7 *:* *$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ sei eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Dann ist für jede Umordnung $\sigma\ : \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ$ auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.*

Hilfssatz: Seien $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \geq 0$. Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ konvergent, so auch jede Umordnung, und zwar gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis des Hilfssatzes: Sei $\sigma : \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ$ Umordnung,

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \quad \nearrow \quad , \; S'n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_\sigma(k) \quad \nearrow$$

Sei $\alpha := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$, also $S_n \leq \alpha \quad \forall\, n$

offenbar: $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{\sigma(k)} \leq \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k \leq \alpha$

mit $N := \max\{\sigma(o), \ldots, \sigma(n)\}$

$\Longrightarrow \quad \{S'_n\}$ beschränkt und damit konvergent gegen $\alpha' \leq \alpha$.

Umgekehrt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ ist Umordnung von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_{\sigma(k)}$ (mit σ^{-1})

$$\underset{\text{Argument v. oben}}{\Longrightarrow} \quad \alpha \leq \alpha'$$

$\square$

<u>Beweis von Satz 7.7</u>:

Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, folgt aus dem H.S. Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ also abolute Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$. Seien

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \; a' := \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Zu zeigen: $a = a'$.

Für $n \in \mathbb{N}_\circ$ sei (beachte $\sigma : \mathbb{N}_\circ \to \mathbb{N}_\circ$ ist Bijektion)

$$k_n := \min\Big\{\ell : \{0, 1, \ldots, n\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(\ell)\}\Big\}$$

$\Longrightarrow \quad \Big| \sum\limits_{\ell=0}^{k_n} a_{\sigma(\ell)} - \sum\limits_{\ell=0}^{n} a_\ell \Big|$ enthält nur noch Glieder mit einem Index $> n$, wird also durch $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ abgeschätzt.

Man weiß : $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \longrightarrow 0$

$n\to\infty$

(da $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$),

es folgt $a = a'$. □

Satz 7.6 und 7.7 ergeben

Satz 7.8 *:* *großer Umordnungssatz*

> *Eine Reihe von reellen Zahlen ist genau dann absolut konvergent, - wenn jede Umordnung in* $\mathbb{R}$ *konvergiert*

Beweis: "$\Longrightarrow$" Satz 7.7; "$\Longleftarrow$": wäre $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ und gleichzeitig jede Umordnung konvergent, so hat man insbesondere Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Gemäß Satz 7.6 gibt es aber eine Umordnung σ mit z.B. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = +\infty$, Wspr! □

Bis jetzt noch offen: Multiplikation von Reihen!

Natürlich gilt keine Produktformel $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$, denn diese ist ja schon für endliche Summen (d.h. $a_n = 0$, $b_n = 0$ ab einer Nummer N) falsch.

Satz 7.9 *:* *Cauchy Produkt*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien absolut konvergent. Sei für* $n \in \mathbb{N}_\circ$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *<u>absolut konvergent</u> und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Hierbei sind $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ *zugelassen.*

Beweis: O.E. betrachtet man den $\mathbb{R}$-Fall, sonst zerlege man in Re, Im

1) $a_k, b_k \geq 0$ Man betrachtet die Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ T_n := \sum_{k=0}^{n} b_k,\ U_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$$

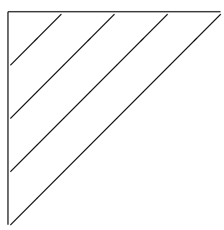
Man hat

$$U_n \leq S_n \cdot T_n \quad = \quad \sum_{\ell,k=0}^{n} a_k \cdot b_\ell \quad \leq \quad U_{2n}$$

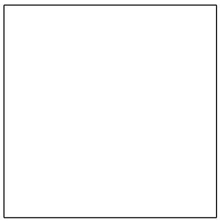
wie man aus folgendem Schema leicht erkennt.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_\circ b_\circ & & a_\circ b_1 & & a_\circ \cdot b_2 & & a_\circ b_3 & & a_\circ b_4 & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
a_1 b_\circ & & a_1 b_1 & & a_1 b_2 & & a_1 b_3 & & a_1 b_4 & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \\
a_2 b_\circ & & a_2 b_1 & & a_2 b_2 & & a_2 b_3 & & a_2 b_4 & \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & & & \\
a_3 b_\circ & & a_3 b_1 & & a_3 b_2 & & a_3 b_3 & & a_3 b_4 & \dots \\
 & \swarrow & & & & & & & & \\
a_4 b_\circ & & a_4 b_1 & & a_4 b_2 & & a_4 b_3 & & a_4 b_4 & \dots
\end{array}$$

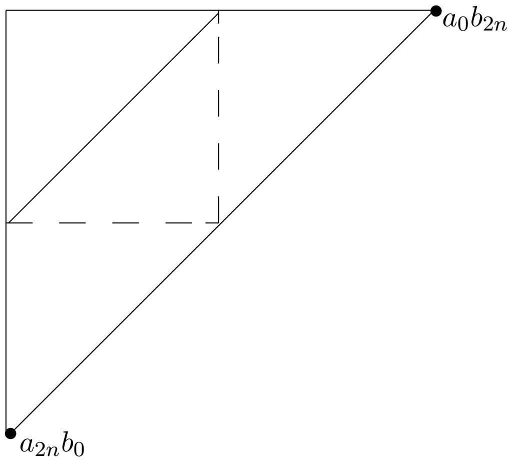
$U_n =$ Summation über die Diagonalen



$S_n \cdot T_n =$ Summation über die ganze Matrix



$U_{2n} =$ Summation über die Diagonalen in



Aus $\quad U_n \le S_n \cdot T_n \le U_{2n} \quad$ folgt sofort $\quad U_{2n} \le S_{2n} \cdot T_{2n}$

(linke Ungl. mit $2n$), also existiert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} U_n$ mit Wert wie behauptet.

2) $b_k \geq 0,\ a_k$ beliebiges Vorzeichen

Zerlege $\quad a_k = a_k^+ - a_k^-, \quad a_k^+ := \frac{1}{2}\,(a_k + |a_k|),\ a_k^- := \frac{1}{2}\,(|a_k| - a_k)$

$$\underset{\text{nach 1)}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\pm} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^{\pm} \cdot b_{n-k} \right)$$

Subtraktion der Gleichungen führt auf die Formel.

3) $a_k,\, b_k$ beliebiges Vorzeichen

$$\text{aus 2)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k^+ \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}^+$$

und entsprechend für "−"

Subtraktion liefert das Ergebnis.

□

Bemerkungen:

1) Im reellen Fall gilt die Formel auch dann, wenn nur eine der Reihe absolut konvergiert.

2) Konvergiert keine der Reihen absolut, so kann man keine Aussage erwarten:

Beispiel dazu: $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ (-1)^n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert (Leibniz)

Setze $c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\ \frac{1}{\sqrt{n+1-k}}\ (-1)^{n+1}$

(beachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_{n+1-k}$

für absolut konvergente Reihen! Begründung?)

Es gilt

$$\begin{aligned} 4 \cdot k \cdot (n+1-k) &= (n+1)^2 - (n+1-2k)^2 \leq (n+1)^2 \implies \\ |c_n| &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{\sqrt{k}}\ \tfrac{1}{\sqrt{n+1-k}} \geq \sum_{k=1}^{n} 2/(n+1) = \tfrac{2n}{n+1}, \end{aligned}$$

so dass die Koeffizienten c_n keine Nullfolge bilden, d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ divergiert und die Cauchy-Formel ist falsch.

3) Anwendungsbeispiel: für $|x| < 1$ ist

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(1-x)^2} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot x^{n-k} = \sum_{n=o}^{\infty} (n+1) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot x^n. \end{aligned}$$

□

Wir kommen jetzt zu

Kriterien für absolute Konvergenz:

Folgende Aussage ist klar (da ja "fast Definition")

$$\left| \begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent } \iff \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent } \iff \\ \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \text{ beschränkt unabhängig von } n. \end{array} \right.$$

Man beweist damit ohne weitere Rechnung

Satz 7.10 : *(allg. Vergleichskriterium)*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent,* $|a_n| \leq |b_n|$ *für f.a.* $n \implies$

$\implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent ("Majorantenkrit.")*

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \infty,\ 0 \leq b_n \leq a_n \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ *("Minorantenkrit.")*

Eine Reihe mit positiven Gliedern ist also bestimmt divergent, wenn man eine devergente Minorante finden kann.

Die beliebtesten konvergenten Majoranten sind geometrische Reihen, diese zeigt auch der Beweis des folgenden

Satz 7.11 : *(Wurzelkriterium)*

Es sei $a := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *für eine Folge* $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} a < 1 \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \quad \textit{absolut konvergent} \\ a > 1 \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \quad \textit{divergent} \end{array}}$$

Bemerkung: $a = 1 \implies$ keine Aussage möglich!

denn

$$a_n = 1/n \quad \Longrightarrow \quad a = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \quad \text{divergent}$$
$$a_n = 1/n^2 \quad \Longrightarrow \quad a = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} \quad \text{konvergent}$$

Beweis:

1) $a < 1$: man wählt $q \in (a, 1) \Longrightarrow \exists\, n_\circ$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q \quad \forall\, n \ge n_\circ$$

(nach Definition von lim sup). Also

$$|a_n| \le q^n \quad \forall\, n \ge n_\circ \quad \underset{\text{Satz 7.10}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent, da } \sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty \text{ gemäß } q < 1$$

2) $a > 1$: ($a = \infty$ eingeschlossen)

$$\Longrightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} \ge 1 \quad \text{für unendlich viele } n$$

(denn wäre $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ nur für höchstens <u>endlich</u> viele n, so hätte man auch $a \le 1$).

Betrachte die Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \ge 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_\circ$

$$\Longrightarrow \quad |a_{n_k}| \ge 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_\circ$$

$$\Longrightarrow \quad \{a_n\} \text{ ist } \underline{\text{keine}} \text{ Nullfolge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \underline{\text{divergent}}.$$

$\square$

Anwendung

Satz 7.12 : *<u>(Quotientenkriterium)</u>*

Es sei $a_n \neq 0$ *für f.a.* n.

(i) Gilt $b := \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *so ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ *für f.a.* n, *so divergiert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis: (ii) $|a_{n+1}| \geq |a_n| \quad \forall\, n \geq n_\circ \Longrightarrow \{a_n\}$ keine Nullfolge

(i) Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, so dass Satz 7.11 anwendbar ist. Wir beweisen diese Ungleichung nicht, sondern geben einen anderen Beweis von (i).

Zur $r \in (b,1)$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r \quad \forall\, n \geq N$

$\Longrightarrow \quad |a_{n+1}| \leq r \cdot |a_n|$

Iteration $|a_{n+N}| \leq r\,|a_{n+N-1}| \leq \ldots \leq r^n\,|a_N|$

$\Longrightarrow \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert,

denn $|a_n| \leq |a_N| \cdot r^n\, r^{-N} \quad \forall\, n \geq N$

und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergiert. □

Bemerkung: Wurzel- und Quotientenkriterium sind hinreichend, aber nicht notwendig für absolute Konvergenz, d.h. es kann absolute Konvergenz vorliegen ohne dass $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ oder $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist. Dies zeigt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. □

Wir schließen mit einer Verbesserung des Quotientenkriteriums.

Satz 7.13 : *(Raabe)*

(i) Sei $c > 1$. *Für f.a.* n *gelte* $a_n \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq 1 - c/n$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent}$$

(ii) $a_n > 0$ *für f.a.* n *und* $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 - 1/n \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

Beispiele: (i) $a_n = 1/n^2 \quad \Longrightarrow \quad a_n/a_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{n^2} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$

$$\leq \quad 1 - \tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{2n} \quad = \quad 1 - \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{n}$$

also: $c = 3/2$ möglich. Beachte: aus der Bed. in (i) folgt nur $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n-1}| \leq 1$.

(ii) $a_n = 1/n \implies a_n/a_{n-1} = 1 - 1/n$

Beweis von Satz 7.13: (i) $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq 1 - c/n \iff$

$n \cdot |a_n| \leq (n-c)\,|a_{n-1}| \iff (c-1)\,|a_{n-1}| \leq (n-1)\,|a_{n-1}| - n\,|a_n|$

gilt für alle $n \geq n_\circ$. Es folgt für $m \geq n_\circ$

$$\sum_{k=n_\circ}^{m} |a_{k-1}| \leq \frac{1}{(c-1)} \sum_{k=n_\circ}^{m} \Big\{(k-1)\,|a_{k-1}| - k|a_k|\Big\} =$$

$$\frac{1}{c-1}\left\{\sum_{k=n_\circ}^{m} (k-1)\cdot|a_{k-1}| - \sum_{k=n_\circ+1}^{m+1} (k-1)\cdot|a_{k-1}|\right\} =$$

$$\frac{1}{c-1}\Big\{(n_\circ - 1)\,|a_{n_\circ-1}| - m\cdot|a_m|\Big\} \leq \frac{1}{c-1}\,(n_\circ-1)\cdot|a_{n_\circ-1}|$$

also Beschränktheit der Partialsummenfolge.

(ii) jetzt ist für $n \geq n_\circ$:

$$a_n/a_{n-1} \geq 1 - 1/n \iff n\cdot a_n \geq (n-1)\,a_{n-1}.$$

Also:

$$(n_\circ - 1)\,a_{n_\circ-1} \leq n_\circ \cdot a_{n_\circ} \leq (n_\circ+1)\cdot a_{n_\circ+1} \leq \ldots$$

$$\leq (n_\circ + k)\,a_{n_\circ+k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

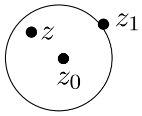
$$\implies a_n \geq \tfrac{1}{n}\,(n_\circ - 1)\cdot a_{n_\circ-1} \quad \forall\, n > n_\circ$$

Mithin hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ die harmonische Reihe als divergente Minorante. □

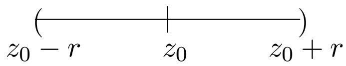
Potenzreihen sind in der Analysis von großer Bedeutung zur Darstellung und Beschreibung der sog. elementaren Funktionen. Außerdem bilden sie das Fundament der Funktionentheorie.

Sei $z_\circ \in \mathbb{C}$ gegeben sowie eine Koeffizientenfolge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}_\circ}$ komplexer Zahlen. Man nennt dann $z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_\circ)^k$ Potenzreihe (-$n$funktion) mit Entwicklungsmitte $z_\circ$. Die Definition ist solange formal zu verstehen bis man weiß , für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_\circ)^k$ konvergent ist.

Hilfssatz: Potenzreihen konvergieren immer in $z_\circ$. Gibt es ein $z_1 \neq z_\circ$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z_1 - z_\circ)^k$ konvergiert, so liegt <u>absolute Konvergenz</u> für <u>alle z</u> mit $|z - z_\circ| < |z_1 - z_\circ|$ vor.



Bemerkung: Sind die $a_k \in \mathbb{R}$ und sind auch $z_\circ, z_1$ reell, so folgt insbesondere absolute Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - z_\circ)^k$ für alle $x \in (z_\circ - r,\ z_\circ + r)$, $r := |z_1 - z_\circ|$.



Beweis des Hilfssatzes: O.E. sei $z_\circ = 0$. Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$

$\Longrightarrow$ $\{a_n z_1^n\}$ ist Nullfolge, speziell:

$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \cdot |z_1|^n \leq 1 \quad \forall\, n \geq N$

Sei nun $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_1|$. $\Longrightarrow$ $|a_n \cdot z^n| =$

$|a_n \cdot z_1^n| \cdot |\frac{z}{z_1}|^n \leq |\frac{z}{z_1}|^n \quad \forall\, n \geq N.$

Da $|z/z_1| < 1$ ist, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z/z_1|^n$, das Majorantenkriterium ergibt Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|$, also absolute Konvergenz der Potenzreihe an der Stelle z. $\square$

$\Longrightarrow$

Satz 7.14 *:* *Sei* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_\circ)^k$ *formale Potenzreihe um* $z_\circ \in \mathbb{C}$. *Man definiert*

$$R := \sup\Big\{ r \geq 0 : \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \ \textit{konvergiert} \Big\}$$

Dann gilt:

(i) *absolute Konvergenz für alle* z *mit* $|z - z_\circ| < R$

(ii) *Divergenz für alle* z *mit* $|z - z_\circ| > R$.

Bemerkungen:

1) Es sind drei Fälle möglich: $R = 0,\ 0 < R < \infty,\ R = \infty$

   $R = 0:$ Konvergenz nur für $z = z_\circ$
   $R = \infty:$ Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$

2) $D_R(z_\circ) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_\circ| < R\}$ Konvergenzkreis,
   R Konvergenzradius

3) Berechnung von R:
   - Wurzelkriterium $\Longrightarrow$ $R = 1/L, \quad L := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
   - Quotientenkriterium $\Longrightarrow$ $R = 1/q, \quad q := \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, falls existent
   - (Konvention : $1/0 = \infty,\ 1/\infty = 0$)

4) Man kann keine allgemeine Aussage darüber machen, was auf dem Rand des Konvergenzkreises passiert:

   i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$: $R = 1$, Konvergenz in $z = -1$
   Divergenz in $z = 1$

   ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$: $R = 1$, Divergenz für alle $|z| = 1$

   iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$: $R = 1$, Konvergenz für alle $|z| = 1$.

Beweis von Satz 7.14: i) sei $z \in \mathbb{C}$ mit $r := |z - z_\circ| < R$.

wähle $\quad r' \in (r, R) \underset{\text{Def } R}{\Longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (r')^n \quad$ konvergent

Hilfssatz (mit $z_\circ = 0$, $\quad r'$ statt z_1) $\quad\Longrightarrow$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad$ ist absolut konvergent $\quad\Longleftrightarrow\quad$ abs. Kvgnz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n$.

ii) hätte man Konvergenz an einer Stelle z mit $|z - z_\circ| =: \rho > R$, so ergibt der Hilfssatz <u>absolute</u> Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k (w - z_\circ)^k$ für alle w mit $|w - z_\circ| < \rho$. Ist also $r \in (0, \rho)$, so folgt die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n$, indem man ein w mit $|w - z_\circ| = r$ wählt. Gemäß $\rho > R$ kann man auch $r > R$ einrichten, was der Definition von R widerspricht. $\square$

Bemerkung: Die Rechnungen zeigen, dass man "R" auch so hätte definieren können: $R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}$

Potenzreihen definieren <u>Funktionen</u>

$$f : \quad D_R(z_\circ) \longrightarrow \mathbb{C}, \; f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n,$$

z.B.

<u>Exponentialfunktion</u> $\quad E(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$

<u>Logorithmusfunktion</u> $\quad L(z) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k}, \quad |z| < 1.$

Die Bedeutung dieser Funktionen wird im nächsten Abschnitt klar, dort werden wir diese Funktionen auf natürlichem Weg (über ihre charakteristischen Eigenschaften) definieren und danach die obigen Formeln beweisen. Hier interessieren wir uns zunächst nur für den Konvergenzradius.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad$: $\quad$ Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. $\quad$ Dann gilt

$$\left| \frac{1}{(k+1)!} z^{k+1} \right| \Big/ \left| \frac{1}{k!} z^k \right| \quad = \quad |z| \frac{1}{k+1} \quad \leq \quad \frac{1}{2}$$

für $\quad k \geq k_z$. $\quad$ Nach dem Quotientenkriterium folgt Konvergenz.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$: $\quad$ Für $|z| < 1 \quad$ liegt sicher Konvergenz vor für $\quad |z| > 1 \quad$ nicht mehr, man hat bereits Divergenz in $z = -1$. Die Konvergenz kann man mit dem Quotientenkriterium nachweisen:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|z|^{n+1}/n+1}{|z|^n/n} \quad = \quad \limsup_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \cdot |z| \quad = \quad |z| < 1.$$

$\square$

Wir stellen uns die Frage, wie man entscheidet, ob zwei Potenzreihenfunktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_\circ)^n$ identisch sind, also für jede Stelle z aus dem Konvergenzbereich den gleichen Wert liefern.

Satz 7.15 *:*

Die beiden Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_\circ)^n$ *seien konvergent für alle* $z \in D_\rho(z_\circ)$ *mit einem* $\rho > 0$. $\{z_k\}$ *sei eine Folge in* $D_\rho(z_\circ)$, $z_k \neq z_\circ$, *mit* $\lim_{k\to\infty} z_k = z_\circ$. *Gilt dann* $f(z_k) = g(z_k)$ *für alle* k, *so folgt bereits* $f(z) = g(z)$ *auf* $D_\rho(z_\circ)$, *denn* $a_n = b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_\circ$.

(Identitätssatz für Potenzreihen)

Beweis: Sei $h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)\cdot(z-z_\circ)^n \quad \Longrightarrow \quad h(z_k) = 0$. Gilt nicht $a_n = b_n$ für alle n, so sei ℓ der kleinste Index mit

$a_\ell \neq b_\ell \quad \Longrightarrow$

$$h(z) = (z-z_\circ)^\ell \underbrace{\left\{(a_\ell - b_\ell) + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} (a_n-b_n)(z-z_\circ)^{n-\ell}\right\}}_{=:\,H(z)}$$

Aus $h(z_k) = 0$ und $z_k - z_\circ \neq 0$ folgt $H(z_k) = 0$.

Also: $0 = a_\ell - b_\ell + (z_k - z_\circ)\cdot \sum_{n=\ell+1}^{\infty} (a_n-b_n)\,(z_k-z_\circ)^{n-(\ell+1)}$

benutze die Formel für den Konvergenzradius!

$\swarrow$

Hilfssatz: i) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_\circ)^n$ sei konvergent auf $D_r(z_\circ) \Longrightarrow$

$\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_\circ)^{n-k}$ ist konvergent auf $D_r(z_\circ)$

für jedes $k \in \mathbb{N}_\circ$

(Beweis später!)

ii) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m(z-z_\circ)^m$ sei konvergent auf $D_r(z_\circ) \Longrightarrow$

$\forall\, r' < r \quad \exists\, M < \infty$ mit $\left|\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m(z-z_\circ)^m\right| \le M$

für alle z mit $|z-z_\circ| \le r'$.

$\nearrow$

lokale Beschränktheit
konvergenter Reihen.

Insbesondere ist $\left|\sum\limits_{n=\ell+1}^{\infty} (a_n-b_n)\,(z-z_\circ)^{n-(\ell+1)}\right| \le M < \infty$ für alle $z \in D_{\rho/2}(z_\circ)$.

Es gilt $z_k \in D_{\rho/2}(z_\circ)$ für k groß,

also:

$$\begin{aligned}
|a_\ell - b_\ell| &= |z_k - z_\circ| \cdot \left|\sum_{n=\ell+1}^{\infty} (a_n-b_n)\,(z-z_\circ)^{n-(\ell+1)}\right| \\
&\le M \cdot |z_k - z_\circ| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

so dass $a_\ell = b_\ell$, Wspr.! $\square$