Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (10P) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$ ein innerer Punkt. Ferner sei $f : I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es gebe $a \in \mathbb{R}$ so, dass die durch a in x_0 fortgesetzte Funktion

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \neq x_0, \\ a, & \text{wenn } x = x_0 \end{cases}$$

stetig auf ganz I ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung: Existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f'(x)$ und $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f'(x)$ und stimmen diese überein, so ist die Funktion $\widetilde{f}$ in x_0 differenzierbar.

Aufgabe 2 (4+5+1=10P) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

a) Begründen Sie, dass g auf $\mathbb{R} - \{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und zeigen Sie, dass für ihre n-te Ableitung folgende Formel gilt:

$$g^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0.$$

Hierbei ist p_n ein Polynom vom Grad $3n$.

b) Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, dass g in $x = 0$ beliebig oft differenzierbar ist mit $g^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Folgern Sie, dass sich g nicht lokal als Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 darstellen lässt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (10P) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

um den Entwicklungspunkt 0 und berechnen Sie ihren Konvergenzradius.

Hinweis: Für $x \in (-1, 1)$ gilt $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$

Aufgabe 4 (10P) Begründen Sie, dass die Funktion $x \mapsto e^{\alpha x}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ auf jedem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^2 e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe von Ober- und Untersummen.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 27. April** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.