Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+3+4=10P) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

a) Untersuchen Sie f im Punkt $(0,0)$ auf Stetigkeit sowie Existenz und Wert der partiellen Ableitungen.

b) Prüfen Sie, ob f im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Kurve $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = (0,0)$ die Ableitung $(f \circ \alpha)'(0)$ existiert. (Sie dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass die Spur von α doppelpunktfrei ist.)

(*Hinweis*: $f(cx,cy) = cf(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 2 (4+7=11P) Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$.

a) Zeigen Sie, dass f an jeder Stelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ total differenzierbar ist.

b) Beweisen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $f'(E)(A) = \mathrm{tr}(A)$.
Hierbei ist E die $n \times n$-Einheitsmatrix und $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ die sog. *Spurabbildung*.

Aufgabe 3 (3+3+4=10P) Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ an allen Punkten ihres Definitionsbereichs auf totale Differenzierbarkeit:

a) $f(x_1, ..., x_n) := \varphi(x_1) + ... + \varphi(x_n)$,

b) $g(x_1, ..., x_n) := \varphi(x_1) \cdot ... \cdot \varphi(x_n)$,

c) $h(x_1, ..., x_n) := \varphi\big((x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}\big)$, $\varphi'(0) = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (3+3+3=9P)

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$, $u : U \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Identität

$$\operatorname{div}(uf) = \langle \nabla u, f \rangle + u \operatorname{div} f.$$

b) Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$. Gibt es eine differenzierbare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x,y,z) = \nabla\Phi(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$?

c) Zeigen Sie, dass $H : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$, $H(x) = |x|^{2-n}$ für $n \geq 3$ die Gleichung $\Delta H = 0$ löst.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 13. Juli** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.