Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (8P) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe offene Menge. Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitzstetig, wenn es $L > 0$ gibt sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Zeigen Sie: Ist f in jedem Punkt von K total differenzierbar, so ist f genau dann Lipschitzstetig, wenn die Operatornorm von $f'(x)$ auf K beschränkt ist, d.h. wenn es $L > 0$ gibt sodass

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{|f'(x)(\xi)|}{|\xi|} \leq L \quad \text{für alle } x \in K.$$

Aufgabe 2 (4×3=12P) Verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von $g \circ f$ in den folgenden Fällen zu bestimmen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x + 2y \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (u, v) \mapsto u + e^v$.

b) $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ \frac{\sqrt{x}}{y} \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R},\ (u, v) \mapsto \ln(u^2 + v^2)$.

c) $f : (0, \infty) \to (0, \infty) \times (0, \infty),\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^y$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (r, s) \mapsto \begin{pmatrix} 3r + s \\ 3r - s \\ r^2 s \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto e^{xyz}$.

Aufgabe 3 (5+5=10P)

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine auf U total differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass an jeder globalen Extremstelle (d.h. Minimal- oder Maximalstelle) $x_0 \in U$ notwendigerweise $\nabla f(x_0) = 0$ gilt.

Bitte wenden!

b) Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2y^2 > 0\}$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte (d.h. Nullstellen der ersten Ableitung) der Funktion

$$g : D \to \mathbb{R},\; g(x,y) := x\ln(x^2+y^2) - y.$$

Hat g auf D ein globales Minimum/Maximum?

Aufgabe 4 (10P)

Es sei $\nu \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ein beliebiger Vektor und $H := \big\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle x, \nu\rangle = 0\big\}$ die Hyperebene senkrecht zu ν. Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ total differenzierbar. Zeigen Sie: An jeder globalen Extremstelle $x_0 \in H$ der Einschränkung $f_{|H} : H \to \mathbb{R}$, $H \ni x \mapsto f(x)$ sind $\nabla f(x_0)$ und ν linear abhängig, d.h. es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so dass

$$\mu \cdot \nabla f(X_0) + \lambda \cdot \nu = 0.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 3 a)).

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 20. Juli** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.