Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+3+3=10P) Die sog. *(Eulersche) Gammafunktion* ist für $x > 0$ definiert durch das beidseitig-uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

a) Zeigen Sie, dass das Integral für alle $x \in (0, \infty)$ konvergiert.

b) Zeigen Sie die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

c) Beweisen Sie die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ für alle } x \in (0, \infty)$$

und folgern Sie daraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\Gamma(n+1) = n!$.

(*Hinweis:* Integrieren Sie $\int_r^R t^x e^{-t} \,\mathrm{d}t$ für $0 < r < R$ partiell und gehen Sie zum Grenzwert $R \to \infty$, $r \to 0$ über.)

Aufgabe 2 (10P) Zeigen Sie das *Kriterium von Cauchy für uneigentliche Integrale*: Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf allen Intervallen $[a, b]$ mit $a < b < \infty$. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$$

genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $s \in [a, \infty)$ gibt, sodass

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x) \,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

für alle $s < \beta_1 < \beta_2 < \infty$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (1+2+3+4=10P) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^s \frac{e^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x$ für $s>0$;

b) $\displaystyle\int_e^\pi \frac{x^4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 (3+3+2+2=10P) Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz ($n\in\mathbb{N}$):

(a) $f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f_n(x):=\sin\left(\frac{x}{n}\right)$;

(b) $g_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ g_n(x):=nx\big(1-x^2\big)^n$;

(c) $h_n:(0,1)\to\mathbb{R},\ h_n(x):=\sqrt[n]{x}$;

(d) $i_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ i_n(x):=\max\Big\{0,\frac{1}{n}-n^2\big|x-\frac{1}{n}\big|\Big\}$.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 4. Mai** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.