Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+3+3+3=13P) Für $x \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ definiert durch die beiden Integrale

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad G(x) := \left(\int_0^x e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right)^2.$$

a) Zeigen Sie, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$F'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

b) Zeigen Sie, dass G auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$G'(x) = -F'(x).$$

c) Folgern Sie, dass $F(x) + G(x) = c = \text{const.}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, mit Konstante $c = \frac{\pi}{4}$.

d) Folgern Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

indem Sie in $G(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$ zum Grenzwert $x \to \infty$ übergehen.

Aufgabe 2 (9P)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten Funktionen mit $a_n := \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $F : I \to \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (9P)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Beweisen Sie, dass der gleichmäßige Limes einer Folge gleichmäßig stetiger Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4 (9P)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Ferner existiere $R > 0$ so dass $\eta(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$. Zeigen Sie, dass dann die durch

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \eta(t-x)\,\mathrm{d}t$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und dass für ihre n-te Ableitung gilt:

$$\mathcal{F}^{(n)}(x) := (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \eta^{(n)}(t-x)\,\mathrm{d}t.$$

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 11. Mai** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.