**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

**Analysis 2 (SoSe 2017)**
**4. Übungsblatt**

---

**Aufgabe 1** (10P) Zeigen Sie, dass die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

auf dem offenen Intervall $(0,\infty)$ stetig differenzierbar ist indem Sie den Ansatz aus der Vorlesung verwenden und bestimmen Sie $\Gamma'(x)$. Begründen Sie alle Schritte sorgfältig!

**Aufgabe 2** (2+4+4=10P) Die sog. *Digammafunktion* $\psi$ ist für $x \in (0,\infty)$ definiert durch

$$\psi(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\big(\Gamma(x)\big).$$

a) Zeigen Sie die folgende Funktionalgleichung:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} \text{ für alle } x \in (0,\infty).$$

Folgern Sie daraus für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\psi(n+1) = \psi(1) + H_n,$$

wobei $H_n$ die $n$-te *harmonische Zahl*, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ bezeichnet.

b) Beweisen Sie, dass für alle $x \in (1,\infty)$ gilt:

$$\ln\big(\Gamma(x)\big) - \ln\big(\Gamma(x-1)\big) = \ln(x-1) \quad \text{und} \quad \ln\big(\Gamma(x+1)\big) - \ln\big(\Gamma(x)\big) = \ln(x).$$

Folgern Sie daraus mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Abschätzung

$$\ln(x-1) \le \psi(x) \le \ln(x) \text{ für alle } x \in (1,\infty).$$

(*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\psi$ auf $(0,\infty)$ monoton wächst.)

c) Folgern Sie aus Teil a) und b):

$$\psi(1) = \lim_{n\to\infty}\big(\ln(n+1) - H_n\big),$$

d.h. $-\psi(1) = -\Gamma'(1)$ ist die aus der Vorlesung bekannte Euler-Mascheroni Konstante $\gamma \approx 0,57721$.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3** (2+2+2+2=8P)

Prüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $d_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definieren:

i) $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;     ii) $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$;

iii) $d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$;     iv) $d_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

**Aufgabe 4** (6+6=12P) Es sei $\mathbb{R}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome in einer Variablen $x$ mit reellen Koeffizienten, d.h.

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \; : \; a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}, \; m \in \mathbb{N} \right\}$$

zusammen mit der üblichen punktweisen Addition bzw. skalaren Multiplikation von Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\|p(x)\|_1 := \sum_{k=0}^{m} |a_k| \quad \text{und} \quad \|p(x)\|_2 := \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |p(x)|$$

zwei Normen auf $\mathbb{R}[x]$ gegeben sind.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$ unbeschränkt bezüglich $\| \cdot \|_1$, aber beschränkt bezüglich $\| \cdot \|_2$ ist. Folgern Sie, dass die beiden Normen nicht äquivalent sind.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 18. Mai** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.