Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+6+3=12P) Für $p \in [1, \infty)$ definieren wir den Vektorraum $\ell^p(\mathbb{R})$ aller *p-summierbaren* reellen Zahlenfolgen als

$$\ell^p := \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,:\, x_n \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

zusammen mit der gliedweisen Addition bzw. skalaren Multiplikation von Folgen.

a) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ eine Norm auf ℓ^p gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass der normierte Raum $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ für alle $p \in [1, \infty)$ vollständig ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$X = \left\{ x \in \ell^1 \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^1 und damit selbst ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist.

Aufgabe 2 (4×2=8P) Seien $K, L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass dann die folgenden Mengen ebenfalls kompakt sind:

a) $K \cap L$,

b) $K \cup L$,

c) $K \times L := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n};\, x \in K, y \in L \right\}$,

d) $K + L := \left\{ x + y;\, x \in K, y \in L \right\}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (3×4=12P) Untersuchen Sie die nachstehenden Teilmegen normierter Räume auf Beschränktheit und Kompaktheit:

a) $A := \left\{ f \in \big(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big) \ : \ \int\limits_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \le 1 \right\};$

b) $B := \left\{ x \in \big(\ell^2, \|\cdot\|_2\big) \ : \ x_n < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\};$

c) $C := \left\{ y \in \big(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1\big) \ : \ y_1^2 + y_2^2 \le 1 - |y_3| \right\}.$

Aufgabe 4 (8P) Es sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) $k(x,\cdot) \to \mathbb{R}$ ist für alle $x \in [0,1]$ eine Regelfunktion,

(ii) $m := \sup\limits_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |k(x,y)|\,\mathrm{d}y < 1.$

Zeigen Sie, dass dann die *Integralgleichung*

$$f(x) - \int\limits_0^1 k(x,y) \cdot f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

für jede Wahl von $g \in \big(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ eine *eindeutige* Lösung $f \in \big(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ besitzt. Zeigen Sie des Weiteren die Abschätzung

$$\|f\|_\infty \le \frac{\|g\|_\infty}{1-m}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.)

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 1. Juni** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.